Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

3.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Exercice 3.1 ★

On considère l'espace E *des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *l'endomorphisme qui à une fonction* f *de* E *associe la fonction* $u(f)$ *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer le spectre de u.

Exercice 3.2 ★

Soient f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $n \in \mathbb{N}^\star$. *On suppose que* $0 \in sp(f^n)$. *Montrer que* $0 \in sp(f)$.

Exercice 3.3 ★ **Centrale 2003**

Trouver les éléments propres des endomorphismes f *et* g *de* $\mathbb{R}[X]$ *définis par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P)(X) = P(X+1)$$
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad g(P)(X) = P(-X)$$

Exercice 3.4 ★

Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie.*
Montrer

$$0 \notin sp(f) \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

Exercice 3.5 ★

Soit u *un automorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E .
Établir

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}.$$

Exercice 3.6 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Déterminer tous les endomorphismes de* E *pour lesquels chaque vecteur de* E *est un vecteur propre.*

Exercice 3.7 ★★ **Mines-Pont PC 2017**

Soit Φ *l'endomorphisme de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par :*

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = \alpha M + \beta M^T.$$

1. *Déterminer les éléments propres de* Φ.
2. *Calculer la trace et le déterminant de* Φ.

Exercice 3.8 ★

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *l'espace des applications continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Pour $f \in \mathrm{E}$, *on définit* $u(f)$ *par, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* $u(f)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et donner la valeur de* $\big(u(f)\big)'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) *Justifier que l'application* $u : f \mapsto u(f)$ *est un endomorphisme de* E.
   (b) u *est-il surjectif ?*
3. (a) *Prouver l'équivalence* $\big(f \in \operatorname{Ker} u\big) \Longleftrightarrow \Big(f \text{ est } 1\text{−périodique et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\Big)$.
   (b) $\operatorname{Ker} u$ *est-il de dimension finie ? On pourra considérer la famille* $(f_k)_{k\geqslant 0}$ *avec* $f_k : x \mapsto \cos(2k\pi x)$.
4. *Pour* $a \in \mathbb{R}$, *on considère* $h_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.
   (a) *Prouver que* h_a *est un vecteur propre de* u.
   (b) *Prouver que* $\mathbb{R}_+$ *est inclus dans le spectre de* u.

Exercice 3.9 ★

On pose $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. *Pour tout* $f \in E$, *on définit :*

$$T_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & T_f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que pour tout* $f \in E$, $T_f \in E$.
2. *On note* T *l'application de* E *dans* E *qui à* f *associe* T_f. *Montrer que* T *est linéaire.*
3. *Déterminer les éléments propres de* T.

Exercice 3.10 ★★★ **Centrale – P.C. 2014**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *on note* $T(P)$ *l'unique polynôme tel que*

$$\forall x > 0, \qquad T(P)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* T.

3.2 Détermination des éléments propres d'un endomorphisme

Exercice 3.11 ★★

Soit E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions continues de* $[0, +\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$ *convergentes en* $+\infty$.
Soit T *l'endomorphisme de* E *donné par*

$$\forall x \in [0, +\infty[, T(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer les valeurs propres de T *et les vecteurs propres associés.*

Exercice 3.12 ★

Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* D *l'endomorphisme de* E *qui à* f *associe sa dérivée* f'.
Déterminer les valeurs propres de D *ainsi que les sous-espaces propres associés.*

Exercice 3.13 ★

Soient $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* I *l'endomorphisme de* E *qui à* $f \in E$ *associe sa primitive qui s'annule en 0.*
Déterminer les valeurs propres de I.

Exercice 3.14 ★

Soient E *l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et* $\Delta : E \to E$ *l'endomorphisme défini par*

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice 3.15 ★★

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P' - nXP \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* u *est un endomophisme de* E *et écrire sa matrice dans la base canonique de* E.
2. *Déterminer, suivant la valeur de* n, *le noyau, le rang et l'image de* u. *On précisera des bases de ces sous-espaces.*
3. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *résoudre et discuter l'équation* $u(P) = \lambda P$. *Donner une base de l'espace des solutions.*

Exercice 3.16 ★ **CCP MP**

Soient u *et* v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Soit* λ *une valeur propre non nulle de* $u \circ v$. *Montrer que* λ *est une valeur propre de* $v \circ u$.
2. *Montrer que cette propriété reste valable si* $\lambda = 0$ *et si* E *est de dimension finie.*
3. *On pose* $E = \mathbb{R}[X]$ *et pour* $P \in E$, $u(P) = P'$, $v(P) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$. *Calculer le noyau de* $u \circ v$ *puis celui de* $v \circ u$. *Conclusion ?*

Exercice 3.17 ★★★ **X PC 2018**

Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ *scindé à racines simples de degré* n. *Soit* φ_A *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui à* P *associe le reste de la division euclidienne de* XP *par* A. *Déterminer les valeurs propres de* φ_A.

3.3 Éléments propres d'une matrice

Exercice 3.18 ★

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = (ij)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.19 ★

1. *Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*
2. *Que dire de la réciproque ?*

Exercice 3.20 ★

Soit F *un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme* u *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie.*
Établir que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u *sur* F *divise le polynôme caractéristique de* u.

Exercice 3.21 ★★ **Lemmes d'Hadamard et de Gerschgörin**

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. **Hadamard :** *On suppose que* A *est à diagonale dominante :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A *est inversible.*

2. **Gerschgörin : Localisation des valeurs propres d'une matrice.** *En déduire que le spectre (complexe) d'une matrice est inclus dans une union de disques :*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{D}(a_{ii}, \rho_i) \text{ où } \rho_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Exercice 3.22 ★ ***Classique***

On considère une matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ stochastique *: tous ses coefficients sont des réels* $\geqslant 0$ *et*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

1. *Montrer que* 1 *est valeur propre de* A*.*
2. *On définit sur* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *la norme* $\|\mathrm{X}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$*. Montrer que* $\|\mathrm{AX}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{X}\|_\infty$*.*
3. *En déduire que si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de* A*, alors* $|\lambda| \leqslant 1$*.*
4. *En utilisant la localisation des valeurs propres de Gerschgörin, montrer que si tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, alors* 1 *est la seule valeur propre de* A *de module* 1*.*

Exercice 3.23 ★ ***Matrice compagnon***

On appelle matrice compagnon C(P) *du polynôme* $\mathrm{P} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *la matrice carrée suivante :*

$$\mathrm{C}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $\chi_{\mathrm{C(P)}} = \mathrm{P}$*.*
2. *En déduire que si* $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{X} + \mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est un polynôme normalisé, si* $z \in \mathbb{C}$ *est racine de* P*, alors*

$$|z| \leqslant \max\bigl(|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|\bigr).$$

Exercice 3.24 ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le rang de* A*. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de* A *et indiquer si* A *est diagonalisable ou pas.*
2. *Donner les éléments propres de* A*.*

Exercice 3.25 ★

Les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

Exercice 3.26 ★★ ***Mines-Pont PC 2017***

Soeint A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *avec* B *nilpotente et telles que* $\mathrm{AB} = 0$*. Montrer que le spectre de* A + B *est égal au spectre de* A*.*

Exercice 3.27 ★★★ ***X PC 2012***

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer que s'il existe* $\mathrm{S} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *non nulle telle que* AS = SB *alors* A *et* B *ont une valeur propre commune.*
Réciproque ?

Exercice 3.28 ★★★ ***Mines PC 2018***

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *canoniquement associé à la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer l'image et le noyau de* f*. Donner une base* b *de l'image.*
2. *On note* g *la restriction de* f *à son image. Donner la matrice de* f *dans la base* b *et donner ses éléments propres.*
3. *Donner les éléments propres de* f*.*

3.4 Polynômes d'endomorphisme

Exercice 3.29 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$*. Soit* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E *de rang* 1*.*

1. *Montrer que* u *admet un polynôme annulateur de la forme* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - k\mathrm{X}$ *avec* $k \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*
2. *Que représente* k *pour* u *?*

Exercice 3.30 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. On considère la matrice*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0_n & \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0_n & 0_n & \mathrm{A} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{C}).$$

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$*, calculer* P(M) *en fonction de* A *de* P *et de ses dérivées.*

Exercice 3.31 ★★★ **Mines-ponts – P.C. 2013**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = A - I_n$*. Montrer que* $\det(A) = 1$*.*

3.5 Polynôme caractéristique

Exercice 3.32 ★

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 3.33 ★ **L'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices carrées**

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Exercice 3.34 ★ $\chi_{A^{-1}}$ **en fonction de** χ_A

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice inversible. Exprimer le polynôme caractéristique de* A^{-1} *à l'aide du polynôme caractéristique de* A*.*

Exercice 3.35 ★★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, on forme la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Exprimer le polynôme caractéristique de M *en fonction de celui de* A*.*

Exercice 3.36 ★ **Théorème de Cayley-Hamilton**

On considère un polynôme unitaire

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^n + X^n \in \mathbb{K}_n[X]$$

À partir des coefficients de ce polynôme, on forme sa matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique* $\chi_C(\lambda)$*.*
2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathfrak{L}(E)$*. Le but des questions suivantes est de montrer que* $\chi_u(u) = 0$*. Si* $u = 0$*, ce résultat est évident aussi on suppose que* $u \neq 0$*.*
   (a) *Soit* $x \in E$ *tel que* $u(x) \neq 0$*. Montrer qu'il existe* $p \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ *est libre et tel que* $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ *est liée.*
   (b) *Il existe donc* $a_0, \dots, a_{p-1}$ *tels que* $a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{p-1} u^{p-1}(x) + u^p(x)$*. Posons* $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{p-1} X^{p-1} + X^p$*. Introduisons aussi* $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$*. Montrer que si* $u_{|F}$ *est la restriction de* u *à* F *alors* $\chi_{u_{|F}} = P$*.*
   (c) *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de* E *est un polynôme annulateur de* u *:* $\chi_u(u) = 0$*.*

Exercice 3.37 ★ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Soient $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices quelconques.*

1. *Si* A *est inversible, montrer que* $\chi_{AB} = \chi_{BA}$*.*
2. *En considérant les produits par blocs*

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_n & -XI_n \end{pmatrix}$$

montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ *pour toutes matrices* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*.*

Exercice 3.38 ★ **En dimension impaire**

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie impaire et* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*.*

1. *Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par* u*.*
2. *Montrer qu'il existe un hyperplan stable par* u*.*

Exercice 3.39 ★★★ **X PC 2005,2017**

Soient A *et* B *deux matrices complexes d'ordre* n*. On suppose que* A *et* B *commutent et que* B *est nilpotente. Montrer que* $\det(B + I_n) = 1$ *puis que* $\det(A + B) = \det(A)$*.*

Exercice 3.40 ★★ **Mines 2009**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$*. On note* $A^{-1} = (a'_{i,j})$*,* $J = ((1))$ *et* $B = A + J$*. Montrer que :*

$$\det(B) = \left(1 + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j}\right) \det(A).$$

Exercice 3.41 ★ **CCP 2003**

Soient $A, B, C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} BC = CB \\ AB - BA = C \end{cases}.$$

1. *Montrer que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad AB^{p+1} = B^p \big(BA + (p+1)C\big).$$

2. *En déduire que* $\det(B) = 0$ *ou* $\det(C) = 0$*.*

Exercice 3.42 ★★ **X PC 2017**

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que la fonction* Ψ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $t \mapsto \det(A + tB)$ *est constante si et seulement si il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(A^{-1}B)^r = 0$*.*

Exercice 3.43 ★★★ **X PC 2018**

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On suppose que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(x\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 0$.

Exercice 3.44 ★ **Mines PC 2018**

Déterminer le polynômes caractéristique de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

3.6 Existence de valeurs propres sur $\mathbb{C}$

Exercice 3.45 ★ **Dimension finie versus dimension infinie**

1. *Justifier que tout endomorphisme d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie* E *possède au moins une valeur propre.*
2. *Observer que l'endomorphisme* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$ *de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *n'a pas de valeur propre.*

Exercice 3.46 ★ **Centrale 2005**

Soient u, v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie non nulle. On suppose*

$$u \circ v = v \circ u$$

Montrer que u *et* v *ont un vecteur propre en commun.*

Exercice 3.47 ★ **CCP MP**

Soit la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ *où* a, b, c *sont des réels.*

M *est-elle diagonalisable dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? M *est-elle diagonalisable dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 3.48 ★★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

1. *Montrer que* A *et* B *ont un vecteur propre commun.*
2. *Montrer que* A *et* B *possèdent un hyperplan stable commun.*

Exercice 3.49 ★★★ **X ESPCI PC 2013**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$.

1. *Montrer que* A *et* B *ont un vecteur propre commun.*
2. *Montrer que* A *et* B *sont cotrigonalisables.*

3.7 Diagonalisation

Exercice 3.50 ★

Diagonaliser la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.51 ★

Réduire la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.52 ★

Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$
2. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix}$ *dans* $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 3.53 ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$$

1. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
3. *Mêmes questions avec* B.

Exercice 3.54 ★

On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{K})$$

Trouver une CNS sur (a, b, c, d, e, f) *pour que* A *soit diagonalisable.*

Exercice 3.55 ★

On considère un entier $n \geqslant 2$ et deux complexes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a \neq 0$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

exo:2004:Nov:Mon:10:55:14

1. *La matrice* $H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est-elle diagonalisable ?*
2. *En déduire que* A *est diagonalisable.*
3. *Calculer* $\det(A)$.

Exercice 3.56 ★

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

exo:2005:Nov:Sun:15:55:17

1. *Calculer son polynôme caractéristique* $\chi_A(X)$.
2. A *est-elle diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *?*
3. A *est-elle diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *?*
4. *Application : Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ *et soit*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(M)$.

Exercice 3.57 ★ **Classique**

exo:2005:Nov:Fri:15:53:38

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent.*

1. *Déterminer les valeurs propres de* u.
2. u *est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.58 ★ **Instructif**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Quels-sont les endomorphismes de* E *diagonalisables qui n'ont qu'une seule valeur propre ?*
2. *Quels-sont les endomorphismes de* E *diagonalisables tels que* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ *?*
3. *Donner un exemple d'endomorphisme qui n'a qu'une seule valeur propre et qui n'est pas une homothétie.*

Exercice 3.59 ★

On considère deux complexes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.60 ★

Pour $n \geqslant 3$, *diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. *sans calculer son polynôme caractéristique,*
2. *puis en le calculant.*

Exercice 3.61 ★ **Matrices de rang 1**

1. *On considère deux matrices colonnes non nulles* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *et l'on forme la matrice* $A = XY^T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = 1$ *et déterminer* $\mathrm{Ker}(A)$ *et* $\mathrm{Im}(A)$. *Exprimer matriciellement* $\mathrm{Tr}(A)$ *à l'aide de* X *et* Y.
2. *Réciproquement, montrer que toute matrice de rang* 1 *s'écrit* $A = XY^T$ *où* X *et* Y *sont des matrices colonnes non nulles.*
3. *Que vaut le polynôme caractéristique d'une matrice de rang* 1 *?*
4. *Montrer qu'une matrice de rang* 1 *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
5. *On considère la matrice* $A = ((i/j)) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Diagonaliser cette matrice.*

Exercice 3.62 ★ **Diagonalisation simultanée**

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *On suppose que* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *possède* n *valeurs propres distinctes et que* $v \in \mathfrak{L}(E)$ *commute avec* u. *Montrer qu'il existe une base* e *formée de vecteurs propres communs à* u *et* v.
2. *Soit* F *un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable* $u \in \mathfrak{L}(E)$. *Montrer que la restriction* $v = u_{|F}$ *de* u *à* F *est un endomorphisme diagonalisable de* F.

3. *Soient deux endomorphismes $(u,v)\in\mathfrak{L}(E)^2$ diagonalisables qui commutent : $u\circ v = v\circ u$. Montrer qu'il existe une base $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de vecteurs propres communs à u et v.*

Exercice 3.63 ★★★ **Type X**

Soient $A,B\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables. Montrer que si $A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}$ alors la matrice définie par blocs

$$M=\begin{pmatrix}a_{1,1}B & a_{1,2}B\\ a_{2,1}B & a_{2,2}B\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$$

est aussi diagonalisable.

Exercice 3.64 ★ **Centrale 2005**

Diagonaliser la matrice

$$M=\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac & ad\\ ab & b^2 & bc & bd\\ ac & bc & c^2 & cd\\ ad & bd & cd & d^2\end{pmatrix}$$

où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.65 ★ **Mines 2005**

Soient $a\in\mathbb{C}$ et $M=\begin{pmatrix}0 & a & a\\ 1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3.8 Étude de matrices diagonalisables

Exercice 3.66 ★

Montrer que si A est diagonalisable alors A^T l'est aussi.

Exercice 3.67 ★

Soient $A\in GL_n(\mathbb{K})$ et $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose la matrice AB diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 3.68 ★

Soient $A_1\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2\in\mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ et $A\in\mathfrak{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exercice 3.69 ★

Pour $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, $a,b\in\mathbb{K}$ non tous deux nuls, montrer que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & \dots & 0 & b\\ 0 & a & \dots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & b & \dots & a & 0\\ b & 0 & \dots & 0 & a\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2p}(\mathbb{K})$$

est diagonalisable.

Exercice 3.70 ★

1. *Montrer que si $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 alors $M^2=\mathrm{Tr}(M)M$.*
2. *En déduire que si λ est une valeur propre de M alors $\lambda^2-\mathrm{Tr}(M)\lambda=0$.*
3. *Quelles sont les valeurs propres de M possibles ?*
4. *Si $\mathrm{Tr}(M)=0$, M peut-elle être diagonalisable ?*

Exercice 3.71 ★★★ **Type X**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Sans utiliser le théorème spectral, prouver que la matrice suivante est diagonalisable :

$$A=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & \alpha_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\end{pmatrix}$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$.

Exercice 3.72 ★★★ **Type X**

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la matrice définie par blocs :

$$B=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ A & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. *Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.*
2. *Relier les éléments propres de B à ceux de A.*
3. *Montrer que si B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors A l'est. Que dire de la réciproque ?*

Exercice 3.73 ★★★ **Type X**

Soit A une matrice carrée d'ordre n diagonalisable. La matrice $M=\begin{pmatrix}0 & 2A\\ -A & 3A\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3.9 Diagonalisabilité d'une matrice

Exercice 3.74 ★

Soient $n\geqslant 2$ et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$ un n-uplet de scalaires non tous nuls. Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à $(a_1,\dots,a_n)^T$.

1. *Trouver les valeurs propres de A.*
2. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
3. *Soit $B=2A-\mathrm{Tr}(A)I_n$. A quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ? Inversible ?*

Exercice 3.75 ★★ **Type Centrale**

Soit $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle qu'il existe $k\geqslant 2$ vérifiant $B^k=0$.

1. *Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ alors $\lambda^p \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}^p)$. En déduire le spectre de* B. *La matrice* B *est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{AB} = 0$.
   (a) *Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *telle que*
   $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A}_1 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) *Montrer que* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ *et* A *ont le même spectre.*

Exercice 3.76 ★ **CCP MP**

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où a est un réel.*

1. *Déterminer le rang de* A.
2. *Pour quelles valeurs de a, la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.77 ★ **CCP MP**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* A. A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ *et* $\mathrm{B} = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{A} + c\mathrm{A}^2$, *où* I_3 *désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question* ***1.*** *les éléments propres de* B.

Exercice 3.78 ★ **CCP 2003**

Trouver, sans calculer son polynôme caractéristique, les éléments propre de

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3.79 ★★ **Centrale PSI 2013**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathrm{A}_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.

1. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer* A^p *pour* $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.80 ★ **Petites Mines 2011, CCP 2016**

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

1. *Calculer* M^2 .
2. M *est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.*

Exercice 3.81 ★★ **Mines 2011**

Déterminer les éléments propres de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.82 ★ **X 2013**

On se donne des nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ *et on pose pour* $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & \ddots & a_n & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

1. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *calculer* J^p.
2. *Exprimer* A *comme un polynôme en* J.
3. *Soit* ω *une racine nième de l'unité. On pose* $\mathrm{X}_\omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. *Calculer* JX_ω.
4. *En déduire que* J *est diagonalisable. Préciser une matrice de passage* P *diagonalisant* J.
5. *Montrer que* A *est diagonalisable. Préciser ses éléments propres. Que vaut* $\det(\mathrm{A})$ *?.*

Exercice 3.83 ★★★ **Mines 2003**

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ *admettant n valeurs propres deux à deux distinctes* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. *On note* $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}) : u \circ v = v \circ u\}$.

1. *Montrer que tout élément de* $\mathscr{C}(u)$ *est diagonalisable et s'écrit comme un polynôme en u.*
2. *Montrer que* $\mathscr{C}(u)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension n et que* $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ *en forme une base.*

Exercice 3.84 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ *est diagonalisable.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$. *Montrer que* $\lambda \geqslant 0$.

3. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ la liste des valeurs propres de $A^T A$. En notant $a_{i,j}$ les coefficients de A, montrer que
$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k.$$

Exercice 3.85 ★★ **X PC 2014**

On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$
On suppose que $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.86 ★ **X PC 2008**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$
Déterminer les éléments propres de la matrice A.

Exercice 3.87 ★★ **X PC 2011**

Soient $a \in \mathbb{C}^*$. On définit la matrice $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad m_{ij} = a^{i-j}.$$
La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

Exercice 3.88 ★★★ **X PC 2012**

Soit A une matrice nilpotente de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Soit B une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que $\det(A+B) = \det(B)$.

Exercice 3.89 ★★ **X PC 2012**

1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on peut trouver A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Exercice 3.90 ★★ **X PC 2012**

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A-B) \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 3.91 ★★ **X PC 2013**

Soient A et B deux matrices non semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ayant la même trace t et le même déterminant d. Montrer que $t^2 = 4d$.

Exercice 3.92 ★★★ **E.N.S. PC 2007-2009**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{V} \setminus \{0_{\mathscr{L}(E)}\} \subset GL(E)$.

1. Montrer que $\dim(\mathscr{V}) \leqslant \dim(E)$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on a $\dim(\mathscr{V}) \leqslant 1$.
3. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$. Donner un exemple d'espace $\mathscr{V}$ de dimension 2.
4. On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que si $\dim(\mathscr{V}) \geqslant 2$ alors la dimension de E est paire.

Exercice 3.93 ★★ **X PC 2014**

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3 constitué uniquement de matrices diagonalisables. Donner un exemple de tel sous-espace vectoriel. Montrer que $I_2 \in V$.

Exercice 3.94 ★★★ **X PC 2014**

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 3.95 ★★ **Mines-Pont PC 2017**

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ symétrique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M ne soit pas diagonalisable.

Exercice 3.96 ★★ **X PC 2017**

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et
$$B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que α est valeur propre de B si et seulement si α^2 est valeur propre de A.
2. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.97 ★★★ **X 2016**

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$ et $B^2 = A$. Montrer que si A est diagonalisable alors B est diagonalisable.

Exercice 3.98 ★ **Mines PC 2017, diagonalisabilité de la matrice compagnon**

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1 X - a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$. La matrice
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$
est appelée matrice compagnon du polynôme P. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que C soit diagonalisable.

Exercice 3.99 ★★★ ***X 2016***

Soient $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \geqslant n-1$ *et* $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. *Montrer que si* A *est diagonalisable alors* B *est diagonalisable.*

Exercice 3.100 ★★ ***Centrale PC 2018***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice diagonale telle que* $a_{i,i} = i$ *pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$.

1. *On considère l'endomorphisme*
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} - \mathrm{MA} \end{array} \right. .$$
Montrer que $\mathrm{Im}\, g$ *est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.*
2. *Montrer que toute matrice* M *d'ordre* n *de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.*

Indication 3.0 : Pour la question 2, si u *est l'endomorphisme de* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *canoniquement associé à la matrice* A, *on pourra chercher un vecteur* $ef_1 \in \mathrm{E}$ *tel que* $(f_1, u(ef_1))$ *est libre*

Exercice 3.101 ★★ ***Mines PC 2018***

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ *et*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. *Déterminer les valeurs propres de* A *et son polynôme caractéristique.*
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une liste de vecteurs propres.*

3.10 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

Exercice 3.102 ★★ ***Type Mines***

Soit u *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* E.
On suppose que
$$Im(u - Id_{\mathrm{E}}) \cap Im(u + Id_{\mathrm{E}}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$$
Montrer que u *est diagonalisable.*

Exercice 3.103 ★

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. *Pour* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, *on pose* $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$.

1. *Justifier que* φ *définit un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. *Déterminer les valeurs propres de* φ *et justifier que* φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.104 ★

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et deux réels* $a \neq b$. *Pour* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, *on pose*
$$\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$$
a) Montrer que φ *est un endomorphisme de* E.
b) Déterminer les valeurs propres de φ *et en déduire que* φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.105 ★

L'endomorphisme φ *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par*
$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + tr(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$
est-il diagonalisable ?

Exercice 3.106 ★★★ ***Type Centrale***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. *On introduit alors*
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\mathrm{E}) \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = f \circ g \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que toute valeur propre de* f *est une valeur propre de* φ.
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, *caractériser le sous-espace propre* $\mathrm{E}_\varphi(\lambda)$ *de* φ *et calculer sa dimension en fonction de celle de* $\mathrm{E}_f(\lambda)$.
3. *Prouver que si* f *est diagonalisable alors* φ *l'est aussi.*

Exercice 3.107 ★ ***CCP MP***

Soit p, *la projection vectorielle de* $\mathbb{R}^3$, *sur le plan* P *d'équation* $x+y+z=0$, *parallèlement à la droite* D *d'équation* $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{P} \oplus \mathrm{D}$.
2. *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ *et donner la matrice de* p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

Exercice 3.108 ★ ***CCP MP***

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension* n, *et soit* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, *où* v *est un vecteur donné de* E.

1. *Donner le rang de* f.
2. f *est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur* v*)*

Exercice 3.109 ★★★ ***Type X***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère un endomorphisme* u *de* E *tel que* u^2 *soit diagonalisable.*

1. *L'endomorphisme* u *est-il toujours diagonalisable ?*

2. *Si* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, *montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.
3. *Si* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, *montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Sp}(u^2)\subset\mathbb{R}_+$ *et* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

Exercice 3.110 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n\in\mathbb{N}^*$. *Soit* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^2=\mathrm{id}_E$.

1. *Montrer que :*
   (a) $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(u+\mathrm{id}_E)=\{0\}$;
   (b) $\operatorname{Im}(u+\mathrm{id}_E)\subset\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$;
   (c) $\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)\subset\operatorname{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$.
2. *Montrer que* $\dim\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)+\dim\operatorname{Ker}(u+\mathrm{id}_E)=n$.
3. *En déduire que* u *est diagonalisable.*

Exercice 3.111 ★

Soient u *et* v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* $n\in\mathbb{N}^*$. *On suppose que* u *admet* n *valeurs propres distinctes dans* $\mathbb{K}$.
Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
— $u\circ v=v\circ u$;
— *Tout vecteur propre de* u *est un vecteur propre de* v.

Exercice 3.112 ★

Soit E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* v *un endomorphisme nilpotent d'indice* k *de* E *(c'est-à-dire tel que* $u^{k-1}\neq 0$ *et* $u^k=0$*).*

1. *Montrer que* $\chi_u(X)=X^n$.
2. *Soit* v *un automorphisme de* E *qui commute avec* u *et soit* $f=u+v$.
   (a) *Montrer que* f *et* v *ont les mêmes valeurs propres.*
   (b) *Montrer que* $w=v^{-1}\circ u$ *est nilpotent.*
   (c) *En déduire que* $\det(f)=\det(v)$.

Exercice 3.113 ★

On définit sur le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E=\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *les matrices*

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad U=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Soit $F=\{M\in E\mid AM=MD\}$.

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E *admettant* (U,A) *comme base.*
2. *Montrer que*
$$f:\begin{cases}E&\longrightarrow&E\\M&\longmapsto&AM-MD\end{cases}$$
est un endomorphisme de E.
3. *Déterminer les solutions dans* E *de* $f(M)=M$ *puis de* $f(M)=-M$.
4. *Montrer que* f *est diagonalisable et en donner le spectre.*

Exercice 3.114 ★★★ **Type Centrale**

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $m\in\mathbb{N}^*$ *et* $g\in\mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme de* E. *On introduit l'application :*

$$T:\begin{cases}\mathfrak{L}(E)&\longrightarrow&\mathfrak{L}(E)\\f&\longmapsto&f\circ g-g\circ f\end{cases}.$$

1. *Montrer que* $T\in\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$.
2. *Montrer que si* g *est nilpotent,* T *l'est aussi. Que dire de la réciproque ?*
3. *Montrer que si* g *est diagonalisable alors* T *l'est aussi.*

Exercice 3.115 ★ **Mines PC 2016**

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\operatorname{Tr}(A)\neq 0$. *On considère :*

$$f:\begin{cases}\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})&\longrightarrow&\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\\M&\longmapsto&\operatorname{Tr}(A)M-\operatorname{Tr}(M)A\end{cases}.$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
3. f *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.116 ★ **Mines 2011**

Soient E*-un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* $u\in\mathfrak{L}(E)$ *tel que* $\operatorname{rg} u=1$.

1. *Montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Tr}(u)\neq 0$.
2. *Montrer que* u *est non iagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Im} u\subset\operatorname{Ker} u$.

Exercice 3.117 ★ **Mines PC 2016**

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\operatorname{Tr}(A)\neq 0$. *On considère :*

$$f:\begin{cases}\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})&\longrightarrow&\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\\M&\longmapsto&\operatorname{Tr}(A)M-\operatorname{Tr}(M)A\end{cases}.$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
3. f *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.118 ★ **Mines 2016**

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie* n. *Soit* u *un endomorphisme à* n *valeurs propres distinctes. Déterminer les sous-espaces vectoriels de* E *stables par* u.

Exercice 3.119 ★ **Un endomorphisme diagonalisable sur une décomposition en somme directe de E est diagonalisable sur E**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u\in\mathfrak{L}(E)$. *On suppose que* $E=\bigoplus_{i=1}^n E_i$ *où pour tout* $i\in[\![1,n]\!]$, E_i *est un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $u_{|E_i}$ *est diagonalisable. Montrer que* u *est diagonalisable.*

Exercice 3.120 ★ ***Centrale 2016 Maths 1***

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *telle que* $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

1. *Donner un exemple d'un tel endomorphisme dans* R^2 .
2. *Montrer que* f *n'admet pas de valeur propre réelle. En déduire que la dimension de* E *est paire.*
3. *Montrer que pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{V}ect(x, f(x))$ *est stable par* f.
4. *Déduire des questions précédentes qu'il existe* $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}$ *tel que* $(u_1, f(u_1), \ldots, u_n, f(u_n))$ *soit une base de* E *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*

Exercice 3.121 ★★★ ***Mines-Ponts P.C. 2014***

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. *On considère l'application*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} = (\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n) &\longmapsto (\mathrm{C}'_1, \ldots, \mathrm{C}'_n) \end{aligned}$$

où $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ *désignent les* n *colonnes de la matrice* M *et où*

$$\mathrm{C}'_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathrm{C}_k$$

pour tout $i \in [1, n]$.

1. *Montrer* Φ *est un endomorphisme de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *L'endomorphisme* Φ *est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.*

Exercice 3.122 ★★★★ ***E.N.S.***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. *On pose*

$$\Phi_u(f) = u \circ f \circ u^{-1}$$

pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer que* Φ_u *est un automorphisme de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. *Montrer que si* u *est diagonalisable alors* Φ_u *l'est aussi.*
3. *Montrer que si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *la réciproque est généralement fausse.*
4. *(E.N.S.) Montrer que si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *la réciproque est vraie.*

Exercice 3.123 ★★★ ***X PC 2015***

Soit u *un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Montrer que* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont en somme directe.*

Exercice 3.124 ★ ***Mines PC 2016***

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \neq 0$. *On considère :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{M} - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{A} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
3. f *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.125 ★★★ ***E.N.S.***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. *On pose*

$$\Phi_u(f) = u \circ f \circ u^{-1}$$

pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer que* Φ_u *est un automorphisme de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. *Montrer que si* u *est diagonalisable alors* Φ_u *l'est aussi.*
3. *Montrer que si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *la réciproque est généralement fausse.*
4. *(E.N.S.) Montrer que si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *la réciproque est vraie.*

Exercice 3.126 ★★ ***Mines PC 2018***

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* p *et* q *dans* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *des projecteurs.*

1. *Montrer que* $p + q$ *est un projecteur si et seulement si* $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. *On suppose que* $p + q$ *est un projecteur. Montrer que* p *et* q *sont codiagonalisables.*

3.11 Réduction et sous-espaces stables

Exercice 3.127 ★★ ***X MP***

Soit E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
Déterminer tous les endomorphismes f *de* E *vérifiant la propriété* $\mathscr{P}$ *suivante :*

$\mathscr{P}$: tout sous-espace vectoriel de E stable par f possède un supplémentaire stable.

Exercice 3.128 ★ ***CENTRALE PC***

Soient f *une endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *et* A *sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *On suppose que* λ *est une valeur propre non réelle de* A *et que* $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$ *est un vecteur propre associé.*
On note X *et* Y *les vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de* Z.

1. *Montrer que* X *et* Y *sont non colinéaires.*
2. *Montrer que* $\mathrm{V}ect(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est stable par* f.
3. *On suppose que la matrice de* f *est donnée par*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les plans stables par f.

Exercice 3.129 ★ **Centrale PC 2016**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 3.130 ★ **Mines 2016**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme à n valeurs propres distinctes. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercice 3.131 ★ **Centrale PC 2016**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé.

3.12 Trigonalisation

Exercice 3.132 ★

Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Exercice 3.133 ★

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé.

1. *Justifier que A est trigonalisable.*
2. *Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$Sp(A^k) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in Sp(A)\right\}$$

Exercice 3.134 ★

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

Déterminer une matrice de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^p).$$

Exercice 3.135 ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = 2A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 3.136 ★

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

Exercice 3.137 ★

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose le polynôme caractéristique de A de la forme

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$.

Exercice 3.138 ★

Expliquer pourquoi le déterminant de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est le produit des valeurs propres complexes de A, valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exercice 3.139 ★

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*

2. *Trigonaliser la matrice A.*

Exercice 3.140 ★

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*

2. *Trigonaliser la matrice A.*

Exercice 3.141 ★

Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.142 ★

Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable et préciser la matrice de passage.

Exercice 3.143 ★

Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *est semblable à la matrice* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.13 Applications de la diagonalisation

3.13.1 Résolution d'équations matricielles

Exercice 3.144 ★★ **Centrale PC 2011**

1. *Diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *On veut résoudre l'équation* $X^2 + X = A$ *d'inconnue* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) *Montrer que si* X *est solution de cette équation alors* X *et* A *ont les mêmes vecteurs propres. Préciser alors une matrice* P *qui les diagonalise simultanément.*
   (b) *En posant* $Y = P^{-1}XP$, *résoudre l'équation.*

exo:2004:Aug:Thu:15:42:20

Exercice 3.145 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Prouver que* A *est trigonalisable mais pas diagonalisable. Donner une base qui trigonalise* A.
2. *Montrer que si* $M^2 = A$ *alors* $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$. *En déduire toutes les matrices* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *solutions de* $M^2 = A$.

Exercice 3.146 ★ **CCP MP**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* A.
2. *Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A *est* $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 3.147 ★★ **Centrale 2011**

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer l'ensemble des matrices* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *solutions de* $M + M^2 = J$.

3.13.2 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 3.148 ★

Calculer A^n *pour*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.149 ★

3.13.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Exercice 3.150 ★

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(w_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifiant*

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), *ces trois suites sont-elles convergentes ?*

Exercice 3.151 ★

On considère deux réels $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ *et la suite récurrente définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2}{\dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}}$$

Déterminer la limite de (u_n) *en fonction de* u_0 *et* u_1.

Exercice 3.152 ★

Trouver toutes les suites numériques (u_n) *telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 3.153 ★

Trouver toutes les suites numériques satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

3.13.4 Résolution de systèmes différentiels

Exercice 3.154 ★ **CCP MP**

1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x+2z \\ y' = y \\ z' = 2x+z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 3.155 ★ **CCP MP**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x-4y \\ y' = x+3y \end{cases}$.

Exercice 3.156 ★ **Mines PC 2017**

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $AB = BA$. On suppose que B est nilpotente.
Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $A + B \in GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3.157 ★★ **Centrale 2017, Mines 2016**

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = AB - BA$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad AB^k - B^kA = kB^k$.
2. Montrer que B est nilpotente. Déterminer $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$.
3. On suppose que $\mathrm{Sp}(B) = 0$. Que dire de B ?
4. Trouver tous les couples $(A, B) \in (\mathfrak{M}_2(\mathbb{C}))^2$ tels que $B = AB - BA$.

Exercice 3.158 ★★ **X PC 2018**

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

3.13.5 Divers

Exercice 3.159 ★★★ **Centrale 91, Mines 06, X 2014**

Montrer que tout hyperplan H de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.
Indication 3.0 : Raisonner par l'absurde et montrer que pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $N \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n + N$. Que dire de λ pour M ? Construire alors une matrice inversible élément de H.

Exercice 3.160 ★

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on considère $A \in E$ de trace non nulle. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)M + \alpha \mathrm{Tr}(M)A \end{array} \right. .$$

Montrer que f est un endomorphisme puis déterminer son noyau, son rang, son image et sa trace.

Exercice 3.161 ★★ **Mines-ponts PC 2013**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 3.162 ★ **Mines 2016**

Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que B n'est pas inversible
2. Calculer $AB^k - B^kA$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 3.163 ★★★ **X PC 2015**

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = M$. Montrer que $(\mathrm{Tr}(A))^3 = n$.

Exercice 3.164 ★★ **X PC 2017**

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de spectre $\{1\}$. Montrer que A^k est semblable à A pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.165 ★★ **X PC 2017**

Existe-t-il une matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 \neq M^4$ et $M^4 = M^5$.

Exercice 3.166 ★★ **X PC 2017**

Soit A un matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{Tr}(A^n) \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. A-t-on forcément $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Quelle condition faut-il ajouter pour que A soit semblable à une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3.167 ★★ **X PC 2017**

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions possibles pour le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) : AM = MA\}.$$

Exercice 3.168 ★★ **X PC 2017**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un automorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{u^k(x) : k \in \mathbb{N}\right\}$ est fini. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$.

Exercice 3.169 ★★ **X PC 2017**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que $p + q$ est une symétrie vectorielle si et seulement si $p + q = \mathrm{id}_E$.

Exercice 3.170 ★★★ **ENS PC 2007-2009**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{V} \setminus \{0_{\mathscr{L}(E)}\} \subset GL(E)$.

1. *Montrer que* $\dim(\mathscr{V}) \leqslant \dim(\mathrm{E})$.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *montrer que l'on a* $\dim(\mathscr{V}) \leqslant 1$.
3. *On suppose que* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. *Donner un exemple d'espace* $\mathscr{V}$ *de dimension* 2.
4. *On suppose désormais que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Montrer que si* $\dim(\mathscr{V}) \geqslant 2$ *alors la dimension de* E *est paire.*

3.14 Applications de la trigonalisation

sRMS 2009 714 Mines Ponts PC

Exercice 3.171 ★ ***CENTRALE MP***

1. *Soient* A *et* B *dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. *Montrer que* $\mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$ *ou* $\mathrm{A} \in \mathbb{K}[\mathrm{B}]$.
2. *Le résultat subsiste-t-il dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$?

sRMS 2015 829 Centrale PSI

Exercice 3.172 ★ ***CCP MP***

Pour $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *on définit* $\mathrm{A} * \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ *par*

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{n,n}\mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que si* $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{B}, \mathrm{B}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *alors* $(\mathrm{A} * \mathrm{B})(\mathrm{A}' * \mathrm{B}') = (\mathrm{AA}') * (\mathrm{BB}')$.
2. *En déduire que* $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ *est inversible si, et seulement si,* A *et* B *sont inversibles.*
3. *Déterminer le spectre de* $\mathrm{A} * \mathrm{B}$.
   En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $\mathrm{A} * \mathrm{B}$.

sRMS 2013 585 Mines Ponts PSI

sRMS 2014 911 Centrale PSI

3.14.1 Éléments propres

PSI

Exercice 3.173 ★ ***Mines Ponts PSI 2010***

Mots-clés : ordres des matrices unipotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$
On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *est unipotente s'il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_n$. *L'ordre de* M *est alors le plus petit entier naturel non nul* k *tel que* $\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_n$.

1. *Montrer que toute matrice unipotente est diagonalisable.*
2. *Montrer que si* M *est unipotente d'ordre* p *alors* $\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_n$ *si et seulement si* $k \in p\mathbb{Z}$.
3. *Soient* V_n *l'ensemble des matrices unipotentes de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et O_n *l'ensemble des ordres des éléments de* V_n. *Montrer que* V_n *n'est pas vide, et que* O_n *est fini.*
4. *Déterminer* O_2.

sRMS 2013 423 X ESPCI PC

sRMS 2014 722 Mines Ponts PC

PSI

Exercice 3.174 ★ ***X ENS PSI 2009***

sRMS 2013 644 Mines Ponts PC

Mots-clés : caractérisation de l'existence d'une valeur propre commune
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisables, et* $\Phi_{\mathrm{A,B}}$ *l'endomorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que :* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_{\mathrm{A,B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$.

1. *Déterminer la matrice de* $\Phi_{\mathrm{A,B}}$ *dans la base* $(\mathrm{E}_{1,1}, \ldots, \mathrm{E}_{1,n}, \mathrm{E}_{2,1}, \ldots, \mathrm{E}_{2,n}, \ldots, \mathrm{E}_{n,1}, \ldots, \mathrm{E}_{n,n})$.
2. *Montrer que si* C *est semblable à* A, *alors* $\Phi_{\mathrm{C,B}}$ *est semblable à* $\Phi_{\mathrm{A,B}}$.
3. *Exprimer les valeurs propres de* $\Phi_{\mathrm{A,B}}$ *en fonction de celles de* A *et de* B.
4. *Montrer l'équivalence entre :*
   (i) $\exists \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \mathrm{AM} = \mathrm{MB}$;
   (ii) A *et* B *ont une valeur propre commune.*

Exercice 3.175 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Mots-clés : caractérisation de l'existence d'une valeur propre commune
Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* A *est diagonalisable ou trigonalisable et qu'il existe* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *telle que* $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$. *Montrer que* A *et* B *ont au moins une valeur propre commune.*

Exercice 3.176 ★ ***Centrale PSI 2015***

Mots-clés : caractérisation de l'existence d'une valeur propre commune
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *On suppose que* A *et* B *ont une valeur propre commune. Construire une matrice* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *non nulle telle que* $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$.
2. *On suppose qu'il existe une matrice* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *non nulle telle que* $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$. *Montrer que si* B *est diagonalisable ou trigonalisable, alors* A *et* B *ont une valeur propre commune.*

Exercice 3.177 ★ ***Mines Ponts PSI 2013 , X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : caractérisation de l'existence d'une valeur propre commune
Soient A, B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* A *et* B *ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe* $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *non nulle telle que* $\mathrm{AU} = \mathrm{UB}$.

Exercice 3.178 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : matrices équivalentes, valeurs propres communes
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{AC} = \mathrm{CB}$. *On note* r *le rang de* C.

1. *Montrer qu'il existe deux matrices* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *inversibles telles que* $\mathrm{C} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ *où* $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Montrer que* A *et* B *possèdent au moins* r *valeurs propres en commun (les valeurs propres étant comptées avec leur ordre de multiplicité).*

Exercice 3.179 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : valeur propre commune
Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie,* f *et* g *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On suppose que* f *et* g *ont une valeur propre commune. Montrer qu'il existe* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *de rang 1 tel que* $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

Exercice 3.180 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\Phi : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$. *Déterminer le spectre de* Φ.

Exercice 3.181 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Mots-clés : vecteur propre commun, hyperplan stable commun
Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

1. *Montrer que* A *et* B *ont un vecteur propre commun.*
2. *Montrer que* A *et* B *possèdent un hyperplan stable commun.*

Exercice 3.182 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : vecteur propre commun, matrices cotrigonalisables
Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $A = AB - BA$.

1. *Montrer que* A *et* B *ont un vecteur propre commun.*
2. *Montrer que* A *et* B *sont cotrigonalisables.*

sRMS 2013 318 X ESPCI PC

Exercice 3.183 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : vecteur propre commun
Soient E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension finie non nulle,* f *et* g *dans* $\mathcal{L}(E)$.

sRMS 2009 364 X ESPCI PC

1. *On suppose que* $f \circ g = g \circ f$. *Montrer que* f *et* g *ont un vecteur propre commun.*
2. *On suppose que* $f \circ g = g \circ f + f$. *Montrer que* f *et* g *ont un vecteur propre commun.*

sRMS 2009 974 Centrale PSI

Exercice 3.184 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : vecteur propre commun
Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que les valeurs propres de* A *sont de module différent de 1 et que* $AB = BA^2$. *Montrer que* A *et* B *admettent un vecteur propre commun.*

sRMS 2009 973 Centrale PSI

Exercice 3.185 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : vecteur propre commun
Soient A, B, C *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* $AB - BA = C$, $BC = CB$, $AC = CA$. *Montrer que* A, B, C *ont un vecteur propre commun.*

Exercice 3.186 ★ **Centrale PSI 2015**

sRMS 2013 583 Mines Ponts PSI

Mots-clés : vecteur propre commun
Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. *Montrer que dans les trois cas suivants,* u *et* v *possèdent un vecteur propre commun :*
(i) $u \circ v = 0$,
(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad u \circ v = \lambda v$,
(iii) $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad u \circ v = \lambda v + \mu u$.

sRMS 2014 724 Mines Ponts PC

Exercice 3.187 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une composée
Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* AB *et* BA *ont le même polynôme caractéristique.*

Exercice 3.188 ★ **TPE PSI 2015**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une composée

sRMS 2012 296 X ESPCI PC

1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* AB *et* BA *ont même polynôme caractéristique.*
2. *Soient* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $p < q$. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. *Établir une relation entre les polynômes caractéristiques de* AB *et de* BA.

Exercice 3.189 ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une composée, éléments propres de $A\overline{A}$ *et de* $\overline{A}A$

1. *Soient* $A \in GL_n(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Comparer* χ_{AB} *et* χ_{BA}. *Que dire si on suppose seulement* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*
   Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ *et* $\overline{A}$ *la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de* A.
2. *Montrer que* $\det(I_n + A\overline{A})$ *est réel.*
3. *Soit* λ *une valeur propre de* $A\overline{A}$. *Montrer que* $\overline{\lambda}$ *est aussi une valeur propre de* $A\overline{A}$. *Trouver un vecteur propre associé à* $\overline{\lambda}$.

Exercice 3.190 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une composée
Soient E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension* n, u *et* $v \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que, pour tout* $k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Tr}((uv)^k) = \mathrm{Tr}((vu)^k)$. *Montrer que* uv *et* vu *ont même polynôme caractéristique.*

Exercice 3.191 ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : éléments propres d'une matrice et de sa transposée
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Les matrices* A *et* A^T *ont-elles le même spectre ? Les mêmes espaces propres ?*

Exercice 3.192 ★ **Centrale PSI 2009**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$. *Comparer le spectre de* B *et celui de* A^TA.

Exercice 3.193 ★ **Centrale PSI 2009**

Mots-clés : éléments propres de la comatrice, diagonalisabilité de la comatrice
Soient A *une matrice carrée et* B *la transposée de sa comatrice.*

1. *Un vecteur propre pour* A *est-il vecteur propre pour* B *?*
2. *Comparer les valeurs propres de* A *et celles de* B.
3. *Comparer la diagonalisabilité de* A *et celle de* B.

Exercice 3.194 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : éléments propres de la comatrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Déterminer les valeurs propres de* $\mathrm{Com}(A)$.
Ind. Commencer par le cas A *inversible.*

Exercice 3.195 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : éléments propres de la comatrice

1. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{C})$. *Exprimer le polynôme caractéristique de la comatrice de* A *en fonction du polynôme caractéristique de* A.
2. *Exprimer les valeurs propres de la comatrice de* A *en fonction de celles de* A.
3. *Comment étendre le résultat à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

Exercice 3.196 ★ **X ESPCI PC 2012 , Centrale PSI 2014**

Mots-clés : matrice stochastique, disques de Gershgorin, théorème de Perron-Frobenius pour les matrices strictement stochastiques
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad a_{i,j} > 0$ *et* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. *Montrer que 1 est valeur propre de* A. *Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.*

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A distincte de 1. Montrer que $|\lambda| < 1$.

Exercice 3.197 ★ Mines Ponts PSI 2013

Mots-clés : matrice stochastique, théorème de Perron-Frobenius pour les matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall i, j,\ a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall i,\ a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} = 1$.

1. *Montrer que 1 est valeur propre de* A.
2. *Montrer que toutes les valeurs propres complexes de* A *sont de module* $\leqslant 1$.
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *de module 1 est valeur propre de* A, *montrer que* λ *est racine de l'unité.*

Exercice 3.198 ★ X ENS PSI 2014

Mots-clés : puissances des matrices strictement stochastiques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* (i, j), $m_{i,j} > 0$ *et pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \qquad (*)$. *On pose* $d = \min(m_{i,j})$.

1. *Montrer que* $0 < d \leqslant \frac{1}{n}$.

2. *Soit* $X \in \mathbb{R}^n$. *On note* $\min(X)$ *(resp.* $\max(X)$*) le minimum des coefficients de* X *(respectivement le maximum). Exprimer* $\min(-X)$ *et* $\max(-X)$ *en fonction de* $\max(X)$ *et de* $\min(X)$.
3. *Soit* $Y \in \mathbb{R}^n$. *Montrer que* $\min(MY) \geqslant d \max(Y)$.

4. *En posant* $Z = Y - aU$ *(où* $U(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ *et a est un réel judicieusement choisi), montrer que* $\min(MY)) \geqslant d \max(Y) + (1-d)\min(Y)$.
5. *Montrer que* $\max(MY) \leqslant d \min(Y) + (1-d)\max(Y)$ *et* $0 \leqslant \max(MY) - \min(MY) \leqslant (1 - 2d)$.

6. *Montrer que les suites* $(\max(M^N Y))_{N\in\mathbb{N}}$ *et* $(\min(M^N Y))_{N\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*
7. *Montrer que* M^N *converge vers une matrice nommée* M_∞. *Prouver alors que* M_∞ *a la propriété* $(*)$. *Quel est le rang de* M_∞ ?
8. *Obtient-on le même résultat si l'on remplace l'hypothèse* $(*)$ *par l'hypothèse suivante : pour tout* (i, j), $\quad m_{i,j} \geqslant 0$ *et pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$?

Exercice 3.199 ★ ENS PC 2015

Mots-clés : puissances des matrices strictement stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que A est stochastique si les coefficients de A sont positifs et si, pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\quad a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} = 1$.

1. *Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.*
2. *On note* $\varepsilon = \min_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$. *On suppose* $\varepsilon > 0$. *On pose* $A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Si* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *on note* $m_j^{(p)} = \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}^{(p)}$ *et* $M_j^{(p)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}^{(p)}$.

   (a) *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Montrer* $M_j^{(p+1)} \leqslant (1-\varepsilon) M_j^{(p)} + \varepsilon m_j^{(p)}$.

   (b) *En déduire, pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad, M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leqslant (1 - 2\varepsilon)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$.

   (c) *Que peut-on en déduire sur* (A^p) ?

Exercice 3.200 ★ Mines Ponts PC 2009

Mots-clés : matrice à diagonale dominante, disques de Gershgorin, théorème de Gershgorin

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Soient* $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et λ une valeur propre de B. Montrer qu'il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que* $|b_{i,i} - \lambda| \leqslant \sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$.

Exercice 3.201 ★ Mines Ponts PSI 2014

Mots-clés : matrice à diagonale dominante et positive

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *On suppose que* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,i} > 0$. *Montrer que* $\det(A) > 0$.

Exercice 3.202 ★ ENS PC 2015

Mots-clés : déterminant d'une matrice positive à diagonale dominante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de spectre réel. On suppose que, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad a_{i,i} = 1$ *et* $\sum_{j\neq i} a_{i,j} \leqslant 1$.

Montrer que $\det(A)$ *appartient à* $[0, 1]$.

Correction : il faut supposer les coefficients $a_{i,j}$ *positifs.*

Exercice 3.203 ★ CCP PC 2012

Mots-clés : polynôme caractéristique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\chi_A(0) \neq 0$. *Justifier que A est inversible. Exprimer* $\chi_{A^{-1}}$ *en fonction de* χ_A.

Exercice 3.204 ★ TPE PC 2011

Mots-clés : valeurs propres de $f \circ g$ *et de* $g \circ f$

Soient E un espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que les valeurs propres non nulles de* $g \circ f$ *sont aussi valeurs propres de* $f \circ g$.
2. *En dimension finie, montrer que si zéro est valeur propre de* $g \circ f$, *alors zéro est aussi valeur propre de* $f \circ g$.
3. *Montrer que cette propriété est fausse en dimension infinie.*
   Indication. *Considérer* $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto P'$ *et* $g : P \mapsto XP$.

Exercice 3.205 ★ X ESPCI PC 2013

Mots-clés : matrice semblable à un de ses multiples

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *non nilpotente. Montrer que l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* λM *est semblable à M est fini.*

Exercice 3.206 ★ RMS 2014 1200 Écoles des Mines PSI, RMS 2015 981 Mines d'Alès PSI

Mots-clés : dérivée logarithmique du polynôme caractéristique

1. *Soient B et C deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *et* $x \in \mathbb{C}$.

   (a) *Montrer que si B et C sont semblables,* $xI_n - B$ *et* $xI_n - C$ *sont aussi semblables.*

(b) *En est-il de même pour $(x\mathrm{I}_n - \mathrm{B})^{-1}$ et $(x\mathrm{I}_n - \mathrm{C})^{-1}$, dans le cas où ces matrices sont inversibles ?*

2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit* $\mathrm{P}_\mathrm{A}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}\,(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \frac{\mathrm{P}'_\mathrm{A}(x)}{\mathrm{P}_\mathrm{A}(x)}$.

Exercice 3.207 ★ ***RMS 2014 1199 Écoles des Mines PSI***

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

1. *La matrice* B *admet-elle 1 comme valeur propre ? Montrer que* $\mathrm{B} - \mathrm{I}_n$ *est inversible et donner son inverse.*
2. *Montrer que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Exercice 3.208 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Mot-clés : sous-espace vectoriel irréductible de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$

Soient E *un espace vectoriel complexe de dimension* $\geqslant 1$ *et* $\mathscr{L}$ *un sous-espace de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que les seuls sous-espaces vectoriels de* E *stables par tout élément de* $\mathscr{L}$ *sont* $\{0\}$ *et* E.

1. *Montrer que les seuls endomorphismes qui commutent avec les éléments de* $\mathscr{L}$ *sont les homothéties.*
2. *Montrer que ce résultat est faux sur* $\mathbb{R}$.

3.14.2 Éléments propres d'endomorphismes particuliers en dimension infinie

Exercice 3.209 ★ ***Centrale PC 2013***

Éléments propres de $\Phi\colon \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto (2\mathrm{X}+1)\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}' \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3.210 ★ ***ENSEA PSI 2014***

Soit $f\colon \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mapsto (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\mathrm{P}' - 2\mathrm{XP}$.

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. *Déterminer les éléments propres de* f.

Exercice 3.211 ★ ***TPE PSI 2014***

Soit $u\colon \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mapsto (\mathrm{X}-a)\mathrm{P}'$ *où* $a \in \mathbb{C}$.

1. *Trouver les éléments propres de* u.
2. *En déduire l'ensemble des polynômes divisibles par leur dérivée.*

Exercice 3.212 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ *tel que* $\int_0^1 \mathrm{A}(t)\mathrm{d}t \neq 0$ *et* $u\colon \mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{A}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t - \mathrm{P}\int_0^1 \mathrm{A}(t)\mathrm{d}t$. *Montrer que* u *est dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *puis déterminer ses éléments propres.*

Exercice 3.213 ★ ***Centrale PC 2009***

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* Φ *l'application qui à* $f \in \mathrm{E}$ *associe* $\Phi(f)\colon x \mapsto f(2x)$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* E.
2. *L'application* Φ *est-elle un automorphisme ?*
3. *Déterminer les valeurs propres de* Φ.

Exercice 3.214 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Mots-clés : éléments propres de la transformation de Cesáro

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ *et* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *qui à* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *associe* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k$. *Déterminer les éléments propres de* T.

Exercice 3.215 ★ ***CCP PSI 2014***

Soit $f\colon u \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mapsto v \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ *où* $v_0 = u_0$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. *On admet que* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^\mathbb{N})$. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* f.

3.14.3 Éléments propres de matrices ou d'endomorphismes particuliers d'ordre littéral

Exercice 3.216 ★ ***X ENS PSI 2009***

Mots-clés : matrice compagne, matrice de Frobenius, polynôme caractéristique d'une matrice compagne

Calculer le polynôme caractéristique de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.217 ★ ***Centrale PC 2013***

Mots-clés : éléments propres d'une matrice circulante, déterminant circulant

Si $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, *on pose* $\mathrm{M}(v) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$. *Soit* $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1,0,\ldots,0)$.

1. *Exprimer* $\mathrm{M}(v)$ *comme un polynôme en* J *de degré* $\leqslant n-1$.
2. *Déterminer le spectre de* J.
3. *Calculer le déterminant de* $\mathrm{M}(v)$.

Exercice 3.218 ★ ***ENSAM PSI 2013 , TPE PSI 2014***

Mots-clés : éléments propres d'une matrice circulante, déterminant circulant

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $m_{i,i-1} = 1$ *pour* $2 \leqslant i \leqslant n$, $m_{1,n} = 1$, *les autres coefficients étant nuls.*

1. *Montrer que* M *est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les racines* n*−ièmes de l'unité.*
2. *Soient* $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ *et* $\mathrm{A} = a_0\mathrm{I}_n + a_1\mathrm{M} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{M}^{n-1}$. *Montrer que* $\det(\mathrm{A}) = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1})$.

Exercice 3.219 ★ X ESPCI PC 2015 , Mines Ponts PC 2015

Mots-clés : déterminant circulant

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{H} = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ où $h_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $h_{n,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls. Soit $\mathrm{M} = a_0 + a_1\mathrm{H} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{H}_{n-1}$. Exprimer le déterminant de M en fonction de $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}$ et de $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Exercice 3.220 ★ Centrale PSI 2014

Mots-clés : matrice circulante, valeurs propres d'une matrice circulante

Pour $n \geqslant 3$, soit $\mathrm{A}_n \in\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = a_{1,n} = a_{n,1} = -1$, $a_{i,i} = 2$, les autres coefficients étant nuls.

1. *Écrire A_3 , déterminer ses éléments propres.*
2. *Montrer que 0 est valeur propre de A_n.*
3. *Déterminer le spectre de A_n. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que 4 soit valeur propre de A_n.*

Exercice 3.221 ★ X ENS PSI 2015

Mots-clés : matrice tridiagonale, éléments propres d'une matrice tridiagonale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale où $m_{i,i} = 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = -1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls.

1. *Justifier que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre et $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ un vecteur propre associé. On pose $v_0 = v_{n+1} = 0$. Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$.*
3. *Soient r_1 et r_2 les racines du polynôme $r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$. Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - (2-\lambda)u_n + 1 = 0$.*
4. *En déduire l'ensemble des valeurs propres de M et des vecteurs propres associés.*

Exercice 3.222 ★ X ESPCI PC 2009

Déterminer les éléments propres de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.223 ★ X ESPCI PC 2009

Déterminer les éléments propres de

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.224 ★ Mines Ponts PC 2009

Déterminer les éléments propres de $(\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 3.225 ★ CCP PSI 2014

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,j} = 1$ si $j = 1$, i ou n et $m_{i,j} = 0$ sinon. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 3.226 ★ CCP PSI 2014

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice avec des 1 sur la première ligne, la première colonne, la dernière ligne, la dernière colonne, et des 0 ailleurs.

1. *Déterminer le spectre de A.*
2. *Démontrer que pour tout $k \geqslant 3$, il existe λ_k et μ_k tels que $\mathrm{A}^k = \lambda_k\mathrm{A} + \mu_k\mathrm{A}^2$.*

Exercice 3.227 ★ X ESPCI PC 2015

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = i + j(n-i)$. Déterminer le rang de A. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.228 ★ CCP PSI 2011

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j), \quad a_{i,j} = i$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 3.229 ★ Mines Ponts PC 2014

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{A} \\ \mathrm{A} & 2\mathrm{A} \end{pmatrix}$. Exprimer le spectre de B en fonction de celui de A.

Exercice 3.230 ★ X ESPCI PC 2015

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,n} = m_{n,i} = i$, les autres coefficients étant nuls. Déterminer le polynôme caractéristique de M.

Exercice 3.231 ★ CCP PC 2007

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n$ ne soit pas inversible.

1. *Montrer qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{AX} = i\mathrm{X}$ et $\mathrm{X} \neq 0$.*
2. *Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.232 ★ TPE PSI 2006

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est exacte

(i) $\exists(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (\mathrm{E} \setminus \{0\}), \quad f(u) = \lambda u$.

(ii) $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists(u, v) \in (\mathrm{E} \setminus \{0\})^2, \quad f(u) = \lambda u + \mu v$ *et* $f(v) = -\mu u + \lambda v$.

Exercice 3.233 ★ CCP PC 2007

Soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En considérant S^2, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de S.

Exercice 3.234 ★ **CCP PC 2011** sRMS 2014 1186 CCP PSI

Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ *et* $\mathrm{M}=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *où* $m_{i,j}=a$ *si* $i+j$ *est pair et* $m_{i,j}=b$ *sinon.*

1. *Déterminer le rang de* M.
2. *Déterminer les éléments propres de* M *dans le cas où le rang est maximal.*

sRMS 2011 1124 CCP PC

Exercice 3.235 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : éléments propres d'une matrice de rang 1

Soit $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de* XX^{T}.

Exercice 3.236 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1

Soient $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ *et* $\mathrm{M}=(a_ib_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer le polynôme caractéristique de* M.

Exercice 3.237 ★ **CCP PSI 2015**

Mots-clés : polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1

Soient X *et* Y *dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{M}=\mathrm{XY}^{\mathrm{T}}$. sRMS 2015 712 Mines Ponts PC

1. *Quel est le rang de* M *? Calculer* $\det(\mathrm{M}-t\mathrm{I}_n)$ *pour* $t\in\mathbb{R}$.
2. *Soit* $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *on pose* $\mathrm{Y}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}^{-1}}\mathrm{X}$. *En calculant* $\det(\mathrm{M}+\mathrm{I}_n)$, *montrer que* $1+(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X})_{1,1}=\frac{\det(\mathrm{XX}^{\mathrm{T}}+\mathrm{A})}{\det(\mathrm{A})}$.

sRMS 2015 1030 CCP PC

Exercice 3.238 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : décomposition LU

Soit $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{i,j}=\min\{i,j\}$.

1. *Trouver une matrice triangulaire inférieure* L *à coefficients diagonaux valant 1 et une matrice triangulaire supérieure* U *telles que* $\mathrm{A}=\mathrm{LU}$.
2. *Soit* $\mathrm{N}=(n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *où* $n_{i,j}=1$ *si* $j=i+1$ *et* $n_{i,j}=0$ *sinon. Exprimer* A^{-1} *en fonction de* N.
3. *Montrer que le spectre de* A^{-1} *est inclus dans* $[0,4]$. sRMS 2011 1074 CCP PSI

Exercice 3.239 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : trace de la transposition sRMS 2011 1078 CCP PSI

Soit $f:\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Calculer la trace de* f.

Exercice 3.240 ★ **CCP PSI 2010**

Mots-clés : valeurs propres de la transposition, déterminant de la transposition sRMS 2009 309 Mines Ponts PC

Soit $\Phi:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$. *Déterminer les valeurs propres et calculer le déterminant de* Φ.

Exercice 3.241 ★ **CCP PSI 2013**

Mots-clés : éléments propres de la transposition

Soient $\varphi:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\frac{1}{3}(2\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\mathrm{T}})$ *et* $\psi:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

1. *Montrer que* φ *et* ψ *sont des endomorphismes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. *Montrer que* ψ *est diagonalisable et donner ses éléments propres.* sRMS 2013 639 Mines Ponts PC
3. *En déduire que* φ *est diagonalisable et donner ses éléments propres.*
4. *Calculer la trace et le déterminant de* φ.

Exercice 3.242 ★ **CCP PSI 2014**

Mots-clés : éléments propres de la transposition

Pour $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on note* $\varphi(\mathrm{X})=\mathrm{X}+2\,\mathrm{X}^{\mathrm{T}}$. *Déterminer les éléments propres de* φ *et évaluer sa trace.*

Exercice 3.243 ★ **CCP PC 2011**

Mots-clés : éléments propres du crochet de Lie

Soient E *un espace vectoriel,* f *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *non nul et* $\Phi:g\in\mathcal{L}(\mathrm{E})\mapsto g\circ f-f\circ g\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Si* $a\in\mathbb{R}$, *on pose* $\mathrm{L}(a)=\{g\in\mathcal{L}(\mathrm{E}),\quad g\circ f-f\circ g=ag\}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{L}(a)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\mathrm{L}(0)$ *n'est pas réduit à zéro.*
2. *On suppose que* E *est de dimension finie,* $a\neq0$ *et* $g\in\mathrm{L}(a)$. *Si* $p\in\mathbb{N}^*$, *exprimer* $\Phi(g^p)$. *En déduire qu'il existe* $m\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $g^m=0$.

Exercice 3.244 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : éléments propres du crochet de Lie

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB}^2-\mathrm{B}^2=\mathrm{B}$. *Calculer* $\mathrm{AB}^{2k}-\mathrm{B}^{2k}\mathrm{A}$ *pour* $k\in\mathbb{N}^*$. *En déduire que* B *est nilpotente.*

L'hypothèse est en fait : $\mathrm{AB}^2-\mathrm{B}^2\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Exercice 3.245 ★ **CCP PC 2015**

Mots-clés : valeurs propres de la composition dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* f *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et* $\Phi:u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})\mapsto f\circ u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
2. *Montrer que* u *est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ *si et seulement si* $\mathrm{Im}\,u\subset\mathrm{Ker}\,(f-\lambda\,\mathrm{id})$.

Exercice 3.246 ★ **CCP PSI 2011**

Soit $\Phi:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto(\mathrm{Tr}\,\mathrm{M})\mathrm{I}_n+\mathrm{M}$. *Trouver un polynôme annulateur de* Φ *de degré 2. En déduire les éléments propres de* Φ.

Exercice 3.247 ★ **CCP PSI 2011**

Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $\Phi:\mathrm{X}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto-\mathrm{X}+(\mathrm{Tr}\,\mathrm{X})\mathrm{I}_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3.248 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soient $n\in\mathbb{N}$ *avec* $n\geqslant2$, $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *et* $\Phi:\mathrm{P}\in\mathrm{E}\mapsto(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})\mathrm{P}(1)+(\mathrm{X}^2+\mathrm{X})\mathrm{P}(-1)$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* E.
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}\,\Phi$ *et* $\mathrm{Im}\,\Phi$.
3. *Déterminer les éléments propres de* Φ.

Exercice 3.249 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient $n\geqslant2$ *et* $\Phi:\mathrm{P}\in\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]\mapsto(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})\mathrm{P}(1)+(\mathrm{X}^2+\mathrm{X})\mathrm{P}(-1)$. *L'endomorphisme* Φ *est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.250 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto nXP - (X^2+1)P'$. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$. *Est-ce un automorphisme ? Déterminer ses éléments propres.*

Exercice 3.251 ★ **Centrale PC 2015**

Mots-clés : éléments propres de l'opérateur de moyenne sur $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *on note* $T(P)$ *l'unique polynôme tel que* $\forall x > 0,\quad T(P)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,dt$.

1. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de* T .

3.14.4 Éléments propres de matrices ou d'endomorphismes particuliers de petits ordres

Exercice 3.252 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : matrices à coefficients positifs, vecteurs propres à coordonnées positives

Soient a, b, c, d *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Montrer que* M *possède un vecteur propre à coordonnées* > 0.

Exercice 3.253 ★ **Centrale PSI 2009**

Soit $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
2. *Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de* f.
3. *L'endomorphisme* f *est-il inversible ? Si oui, donner son inverse.*

Exercice 3.254 ★ **X ESPCI PC 2012**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Déterminer les éléments propres de* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.255 ★ **TPE PC 2012**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Trouver un polynôme annulateur de* A *de degré 2. En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.256 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $M = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}$. *Montrer que* M *est diagonalisable ; déterminer son spectre.*

Exercice 3.257 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : commutant d'une matrice circulante réelle

Déterminer la dimension du commutant de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3.258 ★ **Centrale PC 2014**

1. *Montrer qu'il n'existe pas de* $A \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A + A^{-1}$ *soit de rang 1. En existe-t-il dans* $GL_2(\mathbb{C})$?
2. *Soient* $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *canoniquement associé à* A *et* $F = \operatorname{Ker}(f + f^{-1})$.
   (a) *Montrer que* F *est stable par* f.
   (b) *Montrer que* F *est de dimension paire.*

Exercice 3.259 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

Exercice 3.260 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et possède une unique valeur propre réelle* $a > 1$.
2. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^n$ *est un entier.*
3. *Déterminer la nature de la série de terme général* $\sin(\pi a^n)$.

3.14.5 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Exercice 3.261 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : polynômes qui sont annulateurs

1. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$. *Existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $P(M) = 0$?
2. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$. *Existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P(M) = 0$?

Exercice 3.262 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : polynômes qui sont annulateurs

Soit P *un polynôme réel non constant.*

1. *Existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $P(M) = 0$?
2. *Existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P(M) = 0$?

Exercice 3.263 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *n'est pas valeur propre de* M, *montrer qu'il existe* P *dans* $\mathbb{C}[X]$ *tel que* $P(M) = 0$ *et* $P(\lambda) \neq 0$.

Exercice 3.264 ★ **X ESPCI PC 2014 , X ESPCI PC 2015** sRMS 2014 718 Mines Ponts PC

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré pair. Soit* $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. L'application* f *est-elle surjective ?* sRMS 2014 719 Mines Ponts PC

Exercice 3.265 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *diagonalisable et* $P \in \mathbb{C}[X]$ *avec* $\deg P \geqslant 1$*. Montrer qu'il existe* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $P(M) = A$*.* sRMS 2013 881 Centrale PC

Exercice 3.266 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : existence d'un polynôme annulateur

Soient E *un espace vectoriel et* $u \in \mathscr{L}(E)$*. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de* E *?* sRMS 2015 427 X ESPCI PC

Exercice 3.267 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : existence d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de* A *non nul à coefficients réels.*

Exercice 3.268 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : existence d'un polynôme annulateur, polynôme annulateur d'un automorphisme

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(E)$*.*

1. *Montrer que* f *possède un polynôme annulateur non nul.*
2. *Montrer que* f *est un automorphisme si et seulement si* f *possède un polynôme annulateur* P *tel que* $P(0) \neq 0$*.* sRMS 2010 1045 T\'el\'ecom Sud Paris PC

Exercice 3.269 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente, sous-algèbre engendrée par une matrice nilpotente sRMS 2010 983 CCP PSI

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*, puis* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad f(e_i) = e_{i+1}$ *et* $f(e_n) = 0$*, et* A *la matrice de* f *dans la base canonique.*

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P(A) = 0$*. Montrer que* X^n *divise* P*.*
2. *Soit* $\mathscr{E} = \{P(A), \quad P \in \mathbb{R}[X]\}$*. Montrer que* $\mathscr{E}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*. Déterminer sa dimension.* sRMS 2011 1073 CCP PSI
3. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$*. À quelle condition la matrice* $P(A)$ *est-elle nilpotente ?*

Exercice 3.270 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : polynômes rendant nilpotente une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*. Déterminer les* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tels que* $P(A)$ *est nilpotente.*

Exercice 3.271 ★ **X ESPCI PC 2013** sRMS 2014 716 Mines Ponts PC

Mots-clés : décomposition en plans stables

Soient E *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(E)$*. On suppose qu'il existe* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $u^2 = au + b\,\mathrm{id}_E$ *et qu'aucune droite n'est stable par* u*.* sRMS 2006 1113 CCP PC

1. *Si* $x \in E$*, montrer que* $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ *est stable par* u*.* sRMS 2009 708 Mines Ponts PC
2. *Montrer que* E *se décompose en somme directe de plans stables par* u*.*

Exercice 3.272 ★ **X ESPCI PC 2013** sRMS 2010 986 CCP PSI

Mots-clés : polynôme annulateur d'une matrice nilpotente

Soit P *un polynôme annulateur d'une matrice nilpotente. Montrer que* $P(0) = 0$*.*

Exercice 3.273 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) \geqslant 0$*. Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, montrer que* $\det(P(A)) \geqslant 0$*.*

Exercice 3.274 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisable dont les valeurs propres sont 2 et 3. On pose* $B = A - 4I_n$*. Montrer que* B *est inversible et que* B^{-1} *est un polynôme en* A*.*

Exercice 3.275 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisable. On pose* $B = 2A^5 + A^3 + 2A + I_n$*. Montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P(B) = A$*.*

Exercice 3.276 ★ **X ESPCI PC 2015**

1. *Soient* $A \in GL_n(\mathbb{R})$*. Montrer que* A *est annulée par un polynôme* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *tel que* $P(0) \neq 0$*.*
2. *Soient* $A, C \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $B, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. On suppose que* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k B = C^k D$*. Montrer que* $B = D$*.*

3.14.6 Polynômes annulateurs, ordre littéral

Exercice 3.277 ★ **RMS 2010 1045 Télécom Sud Paris PC**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *non nulle ayant pour polynôme annulateur* $X(X+2)$*. Montrer que* -2 *est valeur propre de* A*.*

Exercice 3.278 ★ **CCP PSI 2010**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = 2A + 8I_n$*.*

1. *La matrice* A *est-elle inversible ? Diagonalisable ?*
2. *Trouver les* $M \in \mathrm{Vect}(I_n, A)$ *telles que* $M^2 = 2M + 8I_n$*.*

Exercice 3.279 ★ **CCP PSI 2011**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^2 + A + 4I_n = 0$*.*

1. *Montrer que* A *n'a pas de valeur propre réelle.*
2. *Montrer que* n *est nécessairement pair.*
3. *Calculer le déterminant et la trace de* A*.*

Exercice 3.280 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = A - I_n$*. Montrer que* $\det A = 1$*.*

Exercice 3.281 ★ **CCP PC 2006**

Déterminer les $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $M^3 - 2M^2 + M = 0$ *et* $\mathrm{Tr}(M) = 0$*.*

Exercice 3.282 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = A^2 - 2A$*. Montrer que le rang de* A *est pair.*

Exercice 3.283 ★ **CCP PSI 2010 , ENSEA PC 2012 , Mines Ponts PC 2013**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = A + I_n$*. Montrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*, puis que* $\det(A) > 0$*.*

Exercice 3.284 ★ **CCP PC 2012**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On suppose que* $f \circ f$ *est un projecteur.*

1. *Montrer que le spectre de* f *est inclus dans* $\{-1, 0, 1\}$.
2. *Montrer que* f *est diagonalisable si et seulement si* $f^3 = f$.

Exercice 3.285 ★ **ENSEA PC 2006**

Soit A *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$. *Déterminer les valeurs propres de* A. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.286 ★ **CCP PC 2014**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$.

1. *Montrer que* A *est inversible et déterminer son inverse.*
2. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \leqslant 0$.

Exercice 3.287 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer les* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ *et* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Exercice 3.288 ★ **CCP PC 2012**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 = 0$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}\,\mathrm{A} \in 2\mathbb{N}$.

Exercice 3.289 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2013**

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$ *et* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = n$.

Exercice 3.290 ★ **TPE PC 2011**

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On suppose qu'il existe un scalaire* λ *et* $p \in \mathbb{N}$ *tels que* $(f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})^p = 0$. *Montrer que* λ *est valeur propre de* f *et que c'est la seule.*

Exercice 3.291 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^{2p+1} = \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$. *Montrer que* $\det \mathrm{A} > 0$.

Exercice 3.292 ★ **Centrale PC 2014**

Soient $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^3 - 12\mathrm{X} - 12$ *et* $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^3 + 12\mathrm{X} - 12$.

1. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{P}_1(\mathrm{M}) = 0$. *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*
2. *Trouver les* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{P}_2(\mathrm{M}) = 0$ *avec* $\mathrm{M} \notin \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.
3. *On cherche les racines de* P_2. *On pose* $z = u + v$ *avec* $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $u^3 + v^3 = 12$, $uv = -4$. *Déterminer les racines de* P_2 *en fonction de* $\sqrt[3]{2}$ *et* j.

Exercice 3.293 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_n = 0$. *Montrer que* $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Déterminer le signe de* $\det \mathrm{A}$.

Exercice 3.294 ★ **Centrale PC 2015**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $u^2 - u + \mathrm{id} = 0$.

1. *Si* $x \neq 0$, *montrer que* $(x, u(x))$ *est libre.*
2. *Soient* x *et* y *dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *On suppose que* y *n'appartient pas à* $\mathrm{Vect}(x, u(x))$. *Montrer que* $(x, u(x), y, u(y))$ *est libre.*
3. *Que dire de la parité de* n *? Du polynôme caractéristique de* u *? Du déterminant et de la trace de* u *?*
4. *Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de* u *est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.295 ★ **CCP PSI 2015**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *non constant tel que* $\mathrm{P}(0) = 1$ *et* $\mathrm{AB} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$. *Montrer que* A *est inversible ; en déduire que* A *et* B *commutent.*

3.14.7 Polynômes annulateurs, petits ordres

Exercice 3.296 ★ **CCP PSI 2010**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A} \neq 0$ *et* $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A} = 0$.

1. *Les matrices* A *et* A^2 *sont elles diagonalisables dans* $\mathbb{C}$ *? Dans* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Montrer que* A *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.297 ★ **CCP PC 2011**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5)$ *tel que* $f^3 + f^2 + f = 0$. *Déterminer les valeurs possibles pour la trace de* f.

Exercice 3.298 ★ **CCP PC 2012**

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} = 0$ *et* $\mathrm{Tr}\,\mathrm{A} = 8$. *Déterminer le polynôme caractéristique de* A.

Exercice 3.299 ★ **Centrale PC 2013**

Déterminer les $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *tels que* $u^3 = u$ *et* $\mathrm{Tr}(u) = 3$.

Exercice 3.300 ★ **RMS 2014 1202 Écoles des Mines PSI**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ *telle que* $12\mathrm{A}^3 - 8\mathrm{A}^2 + 7\mathrm{A} - \mathrm{I}_5 = 0$. *Montrer que* $0 \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \leqslant 2$.

Exercice 3.301 ★ **RMS 2014 1195 Écoles des Mines PSI**

Trouver les $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 3$ *et* $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$.

Exercice 3.302 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_3 = 0$. *Quel est le signe de* $\det(\mathrm{A})$ *?*

Exercice 3.303 ★ **Centrale PSI 2014**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer que* $\dim(\mathrm{Ker}\,u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u^2) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}\,u)$.
2. *Soit* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.
   (a) *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$. *Étudier la convergence de la suite* $(\mathrm{E}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) *Montrer qu'il n'existe pas de matrice* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ *semblable à* M.
   (c) *Soit* $\mathscr{I} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0\}$. *Quelle est la structure de* $\mathscr{I}$ *? Le déterminer.*

Exercice 3.304 ★ **CCP PSI 2015**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 = 2\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A}$. *Montrer que* A *n'est pas inversible.*

Exercice 3.305 ★ ***CCP PSI 2015*** sRMS 2012 291 X ESPCI PC

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$. On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3.306 ★ ***CCP PSI 2011*** sRMS 2012 292 X ESPCI PC

Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie, f, u et v dans E. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $f = au + bv$, $f^2 = a^2u + b^2v$ et $f^3 = a^3u + b^3v$. Montrer que f est diagonalisable.

3.14.8 Réduction

Exercice 3.307 ★ ***Mines Ponts PSI 2013*** sRMS 2014 1330 CCP PC

Mots-clés : caractérisation de la diagonalisabilité par hyperplans stables
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n$ stables par f et tels que : $\mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_n = \{0_\mathrm{E}\}$.

Exercice 3.308 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension p, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i \circ g = f \circ u_i$ et $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, u_i = \{0\}$. Montrer que g est diagonalisable.

Exercice 3.309 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : supplémentaire stable, endomorphisme semi-simple
Soient E un espace de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable, F un sous-espace de E stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u.

1. *Montrer que v est diagonalisable.*
2. *Montrer qu'il existe un supplémentaire de F stable par u.*

Exercice 3.310 ★ ***Mines Ponts PC 2014*** sRMS 2015 428 X ESPCI PC

Mots-clés : supplémentaire stable, endomorphisme semi-simple et nilpotent
Soient E un $\mathbb{K}$–espace de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotents tels que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u.

Exercice 3.311 ★ ***X ESPCI PC 2013*** sRMS 2015 429 X ESPCI PC

Mots-clés : décomposition de Dunford, diagonalisabilité de la somme de deux matrices qui commutent
Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

1. *Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{B}$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \mu \mathrm{I}_n$.*
2. *Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$. On suppose que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A})$.* sRMS 2010 982 CCP PSI

Exercice 3.312 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : décomposition de Dunford, diagonalisabilité de la somme de deux matrices qui commutent
Soient N et D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $\mathrm{ND} = \mathrm{DN}$. Montrer que $\mathrm{D} + \mathrm{N}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3.313 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$.

1. *Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.*
2. *Est-ce toujours le cas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$?*

Exercice 3.314 ★ ***X ESPCI PC 2012 , X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : somme de matrices diagonalisables

1. *L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?*
2. *Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.*

Exercice 3.315 ★ ***CCP PC 2014***

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Les matrices A et B sont-elles nilpotentes ? Diagonalisables ?*
3. *Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que M est nilpotente si et seulement si M est semblable à N.*
4. *L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?*
5. *L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?*

Exercice 3.316 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables
Soit V un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3 constitué uniquement de matrices diagonalisables. Donner un exemple. Montrer que I_2 est dans V.

Exercice 3.317 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables
Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *L'ensemble D est-il un sous-espace vectoriel ?*
2. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, contenu dans D. Montrer que $\dim(\mathrm{V}) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.*

Exercice 3.318 ★ ***CCP PSI 2010***

Mots-clés : sous-espace vectoriel des matrices diagonales
Soit $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et déterminer sa dimension.*
2. *Si $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ possède n termes diagonaux distincts, montrer que $(\mathrm{I}_n, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$.*
3. *L'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?*

Exercice 3.319 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : matrice semblable à son opposé

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $\mathrm{Tr}(A)$ *et* $\det(A)$ *pour que* A *soit semblable à* $-A$.

Exercice 3.320 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$*. Montrer que* A *est semblable à* $-A$ *si et seulement si* $\mathrm{Tr}\,A = 0$ *et* $\det A = 0$.

Exercice 3.321 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : sous-groupe du groupe linéaire formé de symétries

Soit $\mathscr{E}$ *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $\forall A \in \mathscr{E}, \quad A^2 = I_n$.

1. *Montrer que les éléments de* $\mathscr{E}$ *sont simultanément diagonalisables.*
2. *Montrer que* $\mathscr{E}$ *est fini. Que dire de son cardinal ?*

Exercice 3.322 ★ ***X ESPCI PC 2009 , X ESPCI PC 2013 , CCP PSI 2013 , X ESPCI PC 2014***

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice de rang 1

Soient $n \geqslant 2$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice de rang 1. Montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.*

Exercice 3.323 ★ ***CCP PC 2010***

Mots-clés : diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang 1

Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\mathrm{rg}(f) = 1$.

1. *Montrer que* f *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}(f) \neq 0$.
2. *On suppose que* $\mathrm{Tr}(f) \neq 0$*. Déterminer* f^k *pour* $k \geqslant 1$*. Caractériser l'endomorphisme* $g = \frac{1}{\mathrm{Tr}(f)} f$.

Exercice 3.324 ★ ***Centrale PC 2015***

Mots-clés : diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang 1

Soient E *un espace de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(E)$ *de rang 1.*

1. *Montrer que* f *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}\, f \neq 0$.
2. *Montrer que* f *est diagonalisable si et seulement si* $f^2 \neq 0$.

Exercice 3.325 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : diagonalisabilité comparée d'une matrice et de son carré

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* A^2 *est diagonalisable. La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.326 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : diagonalisabilité comparée d'une matrice et de son carré

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A^2 = 0$*. La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Inversible ? Montrer que* $\mathrm{rg}\,A \leqslant \frac{n}{2}$.

Exercice 3.327 ★ ***Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2013***

Mots-clés : diagonalisabilité comparée d'une matrice et de son carré

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. On suppose que* A^2 *est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que* A *est diagonalisable.*

Exercice 3.328 ★ ***CCP PSI 2013 , X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : diagonalisabilité comparée d'une matrice et de son carré

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $B^2 = A$.

1. *Si* A *est diagonalisable, la matrice* B *est-elle diagonalisable ?*
2. *Si* A *est diagonalisable et inversible, la matrice* B *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.329 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : diagonalisabilité comparée d'un endomorphisme et de ses puissances

Soient E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(E)$*. Pour* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*, on note* $\alpha_i(\lambda), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$ *les* n *racines* n*-ièmes de* λ*. Soient* $L_i(X), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$*, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux* $\alpha_i(\lambda)$.

1. *Montrer que* u *diagonalisable implique* u^n *diagonalisable. Quid de la réciproque ?*
2. *Montrer que* $\sum_{i=1}^n L_i = 1$*. En déduire que* $\mathrm{Ker}\,(u^n - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \oplus_{i=1}^n \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_i(\lambda)\,\mathrm{id}_E)$.
3. *Montrer que si* u *est inversible, alors* u^n *diagonalisable implique* u *diagonalisable.*

Exercice 3.330 ★ ***X ESPCI PC 2009 , Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : sous-espaces stables d'un endomorphisme à valeurs propres simples

Soit E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension* n.

1. *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$*. Montrer que si* u *est diagonalisable, alors la restriction de* u *à tout sous-espace stable est également diagonalisable.*
2. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $u \in \mathscr{L}(E)$ *défini par :* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u(e_i) = i e_i$*. Déterminer les sous-espaces stables par* u.

Exercice 3.331 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Mots-clés : plan stable

Soit $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$ *et* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$*. Montrer qu'il existe un sous-espace de dimension 2 de* $\mathbb{R}^n$ *stable par* f.

Exercice 3.332 ★ ***CCP PSI 2008***

Trouver les matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ *non diagonalisables.*

Exercice 3.333 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Une matrice complexe symétrique est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.334 ★ ***CCP PC 2010***

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice compagne, diagonalisabilité d'une matrice de Frobenius

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ *et* C_P *la matrice compagne :*

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que C_P est de rang n si $a_0 \neq 0$ et de rang $n-1$ si $a_0 = 0$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{rg}(C_P - \lambda I_n) \geqslant n-1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P.*
3. *Montrer que $\chi_{C_P} = (-1)^n P$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.*
4. *On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$. Si $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k^q)^{m_k}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.*

sRMS 2010 987 TPE PSI

sRMS 2006 1116 ENSEA PC

Exercice 3.335 ★ X ESPCI PC 2012

Mots-clés : commutant d'une matrice diagonalisable

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad AB = BA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

sRMS 2014 990 Centrale PC

Exercice 3.336 ★ Centrale PSI 2014

Mots-clés : commutant de la transposition, commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $V = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(M^T) = (u(M))^T\}$. Montrer que V est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension.

Exercice 3.337 ★ CCP PC 2011

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme à valeurs propres simples

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

sRMS 2014 992 Centrale PC

1. *Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.*
2. *En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.*
3. *Montrer qu'il existe un unique n–uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.*
4. *Déterminer la dimension du commutant de f.*

Exercice 3.338 ★ Mines Ponts PC 2013

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme à valeurs propres simples

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que le commutant de u est égal à $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1})$.

Exercice 3.339 ★ Centrale PC 2015 , Centrale PC 2015

Mots-clés : commutant d'une matrice à valeurs propres simples

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$ est un espace vectoriel de base $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Exercice 3.340 ★ Mines Ponts PC 2014

Mots-clés : commutant d'une matrice à valeurs propres simples

sRMS 2007 935 T\'el\'ecom Sud Paris PC

Soient B et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M possède n valeurs propres distinctes. Montrer que B et M commutent si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(M)$.

sRMS 2013 322 X ESPCI PC

Exercice 3.341 ★ Centrale PSI 2014

Mots-clés : commutant d'une matrice à valeurs propres simples

1. *Soit $A = \mathrm{Diag}(1, \dots, n)$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec A. Montrer que cet ensemble est $\mathbb{R}_{n-1}[A] = \{P(A), \quad P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.*
2. *On suppose désormais que A est triangulaire, avec pour coefficients diagonaux $1, 2, \dots, n$. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A.*

Exercice 3.342 ★ TPE PSI 2010

Mots-clés : projecteurs spectraux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ et n matrices $M_1, \dots, M_n$ dans $\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p M_i$.

Exercice 3.343 ★ ENSEA PC 2006

Mots-clés : projecteurs spectraux

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \mathrm{id}_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$. Montrer que $g = 3f_1 + f_2 - 2f_3 + 5f_4$ est diagonalisable.

Exercice 3.344 ★ Centrale PC 2014

Mots-clés : projecteurs spectraux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

1. *Montrer que A^T est diagonalisable.*
2. *Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres $(Y_1, \dots, Y_n)$ de A^T telle que $A = \lambda_1 X_1 {Y_1}^T + \lambda_2 X_2 {Y_2}^T + \dots + \lambda_n X_n {Y_n}^T$ avec ${X_i}^T Y_j = \delta_{i,j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Exercice 3.345 ★ Centrale PC 2014

Mots-clés : sous-espace vectoriel engendré par les projecteurs, projecteurs spectraux, caractérisation de la diagonalisabilité par une famille de projecteurs qui commutent

1. *Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme différence de deux matrices de projecteurs.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$–espace de dimension finie. Montrer que tout endomorphisme de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de projecteurs.*
3. *Soient E un espace de dimension finie, $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E qui commutent deux à deux. Montrer, par récurrence sur la dimension de E, qu'il existe une base de vecteurs propres communs à tous les p_i.*
4. *Soient E un espace de dimension finie, f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f s'écrit comme combinaison linéaire de projecteurs qui commutent deux à deux.*

Exercice 3.346 ★ RMS 2007 935 Télécom Sud Paris PC

Soit u dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 3.347 ★ X ESPCI PC 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

1. *Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^2) = A$?*
2. *Soit $k \in \mathbb{N}$ impair. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^k) = A$?*

Exercice 3.348 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : sous-groupe du groupe linéaire formé de symétries

Soit G *un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$*. On suppose que* $\forall M \in G, \quad M^2 = I_n$*. Montrer que* G *est fini.*

Exercice 3.349 ★ **CCP PSI 2013**

Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On suppose qu'il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\lambda \neq \mu$ *tel que* $M = A + B$, $M^2 = \lambda A + \mu B$ *et* $M^3 = \lambda^2 A + \mu^2 B$*. Montrer que* M *est diagonalisable.*

3.14.9 Coréduction

Exercice 3.350 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : endomorphismes codiagonalisables

Dans un espace E *de dimension finie, on considère deux endomorphismes* u *et* v *diagonalisables tels que* $u \circ v = v \circ u$*.*

1. *Montrer que les sous-espaces propres de* v *sont stables par* u*.*
2. *Montrer que la corestriction de* u *à un sous-espace propre de* v *est diagonalisable.*
3. *Montrer qu'il existe une base de* E *constituée de vecteurs propres pour* u *et* v*.*

Exercice 3.351 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : caractérisation de la commutation de 2 matrices diagonalisables

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *diagonalisables. Montrer que* A *et* B *commutent si et seulement s'il existe* $C \in GL_n(\mathbb{C})$*, et* P *et* Q *dans* $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ *tels que* $A = P(C)$ *et* $B = Q(C)$*.*

Exercice 3.352 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : matrices codiagonalisables

1. *Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont co-diagonalisables.*
2. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$*. On considère les affirmations :*
   (*) A *et* B *sont diagonalisables et commutent ;*
   (**) $A + \lambda B$ *est diagonalisable pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*
   (a) *Montrer que (*)* $\Rightarrow$ *(**).*
   (b) *Montrer que la réciproque est fausse sur* $\mathbb{R}$*, vraie sur* $\mathbb{C}$*.*

Exercice 3.353 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : matrices codiagonalisables, polynôme d'interpolation de Lagrange

1. *Soient* A *et* $B \in \mathcal{M}_n(C)$ *deux matrices co-diagonalisables. Montrer qu'il existe une matrice* C *et des polynômes* P *et* Q *tels que* $A = P(C)$ *et* $B = Q(C)$*.*
2. *Montrer que si* A *est de plus supposée à valeurs propres simples, alors il existe un polynôme* R *tel que* $B = R(A)$*.*

Exercice 3.354 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soient B *et* M *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* M *diagonalisable et* $BM = MB$*. Existe-t-il* P *dans* $\mathbb{R}[X]$ *tel que* $B = P(M)$ *?*

Exercice 3.355 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : matrices cotrigonalisables, produit de matrices nilpotentes qui commutent

Soient $A_1, \ldots, A_n$ *des matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *qui commutent. Montrer que* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *est nulle.*

3.14.10 Réduction de matrices par blocs

Exercice 3.356 ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

À quelle condition portant sur A *la matrice* B *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.357 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* A *pour que la matrice* $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ *soit diagonalisable.*

Exercice 3.358 ★ **CCP PSI 2015**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$*.*

1. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Montrer que 0 est valeur propre de* B*. Déterminer la dimension de* $\operatorname{Ker} B$*.*
3. *La matrice* B *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.359 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$*.*

1. *Montrer que* λ *est valeur propre de* M *si et seulement si* λ^2 *est valeur propre de* A*.*
2. *Montrer que* M *est diagonalisable si et seulement si* A *est diagonalisable et inversible.*

Exercice 3.360 ★ **Centrale PC 2009**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$*. On suppose* A *diagonalisable. Exprimer les éléments propres de* B *en fonction de ceux de* A*. À quelle condition la matrice* B *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.361 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$*.*

1. *Diagonaliser* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*
2. *Montrer que* B *est semblable à* $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$*.*

3. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *pour* B *soit diagonalisable.*

PSI

Exercice 3.362 ★ ENSAM PSI 2010

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$. *Exprimer le rang de* M *en fonction de celui de* A^2. *La matrice* M *peut-elle être diagonalisable ?*

sRMS 2013 879 Centrale PC

PSI

Exercice 3.363 ★ Centrale PSI 2015

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$.

1. *Déterminer le rang de* B *en fonction de celui de* A.
2. *Étudier la diagonalisabilité de* B *en fonction de celle de* A.

e PC

Exercice 3.364 ★ Centrale PC 2009

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

sRMS 2010 882 Centrale PC

1. *Montrer que si* D *est diagonalisable, alors* A *et* B *le sont aussi.*
2. *Montrer que si* D *est diagonalisable, il existe* $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que la matrice* $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$ *soit inversible et vérifie :* $P^{-1}DP$ *diagonale. En déduire qu'il existe* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $C = MB - AM$.
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A, B, C *pour que* D *soit diagonalisable.*

e PC

Exercice 3.365 ★ Centrale PC 2013

sRMS 2010 881 Centrale PC

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

sRMS 2013 832 Centrale PSI

1. *Donner la forme de* M^k *pour* $k \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que si* M *est diagonalisable, alors* A *et* B *le sont aussi.*
2. *On suppose qu'il existe* $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que la matrice* $Q = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$ *soit inversible et* $Q^{-1}MQ$ *soit diagonale. Montrer qu'il existe* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $C = UB - AU$.

sRMS 2013 833 Centrale PSI

3. *On suppose que* A *et* B *sont diagonalisables et que* $C = UB - AU$ *avec* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Que peut-on dire de* M *?*
4. *Si* M *est diagonalisable, montrer qu'il existe une matrice* Q *comme dans (b) telle que la matrice* $Q^{-1}MQ$ *soit diagonale.*

sRMS 2013 884 Centrale PC

e PC

Exercice 3.366 ★ Centrale PC 2013

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que si* M *est diagonalisable, alors* A *et* B *le sont aussi.*
2. *On suppose que* $A = B = C$ *et que* M *est diagonalisable. Montrer que* $A = 0$.
3. *On suppose que* $A = B$ *et que* $C = I_n$. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *pour que* M *soit diagonalisable.*

Exercice 3.367 ★ Centrale PC 2013

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. *On suppose* M *diagonalisable.*

1. *Si* $B = 0$, *montrer que* A *est diagonalisable.*
2. *Si* $A = 0$, *montrer que* B *est diagonalisable.*
3. *Donner un exemple de matrices* A, B *non toutes deux diagonalisables mais telles que* M *soit diagonalisable.*

Exercice 3.368 ★ Centrale PC 2010

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *diagonalisables. On suppose que* $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

1. *Soit* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Déterminer l'inverse de* $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
2. *Soit* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que les matrices* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

Exercice 3.369 ★ Centrale PC 2010

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ *sont-elles diagonalisables ?*

Exercice 3.370 ★ Centrale PSI 2013

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisable et* $A = \left(\begin{array}{c|c} B & B^2 \\ \hline B^2 & -B \end{array}\right)$. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de* B *pour que* A *soit diagonalisable. Ind. Commencer par* B *diagonale.*

Exercice 3.371 ★ Centrale PSI 2013

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Étudier la diagonalisabilité de* $\left(\begin{array}{c|c} A & A^3 \\ \hline A^{-1} & A \end{array}\right)$.

Exercice 3.372 ★ Centrale PC 2013

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $A = \begin{pmatrix} J & I_n \\ -I_n & J \end{pmatrix}$.

1. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Montrer qu'il existe* P_k *et* Q_k *dans* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $A^k = \begin{pmatrix} P_k(J) & Q_k(J) \\ -Q_k(J) & P_k(J) \end{pmatrix}$.

2. Calculer les coefficients de ces polynômes en diagonalisant dans $\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$.
3. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $R(A) = 0$ si et seulement si $R(J + iI) = 0$.
4. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $f_k : x \mapsto x^k \cos x$ et $g_k : x \mapsto x^k \sin x$. On pose $E = Vect(f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_n$ 2.1) Vérifier que $\dim E = 2n$. Montrer que $\Phi : f \in E \mapsto f'$ est un endomorphisme de E. Montrer que la matrice de Φ est du type précédent et en déduire un polynôme annulateur pour Φ.

PSI **Exercice 3.373** ★ **RMS 2014 1201 Écoles des Mines PSI**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et de n.
2. Diagonalisabilité de M ?

s PC **Exercice 3.374** ★ **Mines Ponts PC 2015**

sRMS 2013 831 Centrale PSI

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. On suppose M diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que M soit diagonalisable.

s PC **Exercice 3.375** ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, v la restriction de u à $\operatorname{Im} u$.

1. Comparer $\operatorname{Tr} u$ et $\operatorname{Tr} v$.
2. On suppose v diagonalisable. L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?

e PC **Exercice 3.376** ★ **Centrale PC 2015**

sRMS 2012 297 X ESPCI PC

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On suppose que $AB = BA$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ à l'aide de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

sRMS 2014 981 Centrale PC

3.14.11 Réduction de matrices particulières d'ordre littéral

PSI **Exercice 3.377** ★ **X ENS PSI 2009**

Mots-clés : diagonalisation d'une matrice tridiagonale

On considère la matrice tridiagonale

sRMS 2014 715 Mines Ponts PC

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

sRMS 2007 908 CCP PSI

1. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ. On pose $v_0 = v_{n+1} = 0$. Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad v_{i+1} - (2 - \lambda) v_i + v_{i-1} = 0$.
2. Montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.
3. Montrer que le polynôme $r^2 - (2 - \lambda) r + 1$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées que l'on note r_1 et r_2. On pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$. Montrer que $\sin(n+1)\theta = 0$ et que $\rho = 1$.
4. Déterminer les valeurs propres de A et pour chacune d'entre elles un vecteur propre associé.
5. On pose $M = 2I_n$, $N = M - A$ et $J = M^{-1}N$. Montrer que J est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.
6. On définit une suite par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. Montrer que cette suite converge vers l'unique solution u de l'équation $Au = b$.

Exercice 3.378 ★ **Centrale PSI 2013**

Mots-clés : diagonalisation d'une matrice tridiagonale

Soient $\theta \in]0, \pi[$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - (2\cos\theta) u_{n+1} + u_n = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ l'ensemble $\mathcal{S}$ contient-il une suite (u_n) non nulle telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j,\ a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 3.379 ★ **X ESPCI PC 2012**

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad m_{i,j} = a^{i-j}$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 3.380 ★ **Centrale PC 2014**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $M = (a^{i-j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré deux tel que $P(M) = 0$.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur b pour que $M + bI_n$ soit inversible. Exprimer alors son inverse.

Exercice 3.381 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : déterminant de Hurwitz, matrice de Hurwitz

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ et $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $m_{k,\ell} = e^{i\theta}$ si $\ell > k$, $m_{k,\ell} = e^{-i\theta}$ si $\ell < k$, $m_{k,\ell} = a$ si $k = \ell$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.382 ★ **CCP PSI 2007 , CCP PSI 2014**

Mots-clés : matrice de Hurwitz

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 4$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

1. Prouver que A est diagonalisable.
2. Montrer que $A - 3I_n$ n'est pas inversible.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice 3.383 ★ CCP PC 2011

Mots-clés : matrice de Hurwitz

Soit A la matrice carrée d'ordre n avec des zéros sur la diagonale et des 1 en dehors.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $B = A + I_n$. Calculer B^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.
3. Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, comment calculer son inverse ?

Exercice 3.384 ★ Centrale PSI 2014

Mots-clés : matrice de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

1. Pour $n = 3$, calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer A^2. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 3.385 ★ TPE PSI 2015

Mots-clés : matrice circulante

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$ si $i \leqslant n-1$ et $a_{n,j} = \delta_{1,j}$. On pose $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $B \in GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n,p) = 1$.

Exercice 3.386 ★ CCP PSI 2008

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.387 ★ TPE PSI 2010

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $m_{i,j} = \frac{a_i}{a_j}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.388 ★ CCP PSI 2007

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne, de la première colonne et de la diagonale valent 1, les autres étant nuls. Montrer que 1 est valeur propre de A. Trouver l'espace propre associé. En déduire les autres valeurs propres et les autres espaces propres.

Exercice 3.389 ★ CCP PSI 2008

Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels strictement positifs et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par $n_{i,j} = a_i$. On pose $s = a_1 + \cdots + a_n$ et $M = 2N - sI_n$.

1. Calculer N^2. La matrice N est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 3.390 ★ Mines Ponts PC 2015

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $n_{i,j} = a_i$. On pose $M = 2N - \mathrm{Tr}(N) I_n$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.391 ★ CCP PC 2010 , Mines Ponts PC 2013

Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose $s = \mathrm{Tr}\, A$ et $B = 2A - sI_n$. À quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ? À quelle condition est-elle inversible ?

Exercice 3.392 ★ TPE PC 2006

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice antidiagonale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_0,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $a_{n-k,k+1} = z_k$, les autres coefficients étant nuls.

Exercice 3.393 ★ Centrale PC 2014

Mots-clés : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Soit E un $\mathbb{K}$–espace de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces de E tels que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilisant chacun des F_i. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si la restriction de u à chacun des F_i est diagonalisable.
2. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $u(e_k) = a_k e_{n+1-k}$. Montrer que E est somme directe de sous-espaces de dimension 1 ou 2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable (distinguer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exercice 3.394 ★ X ESPCI PC 2015 , Mines Ponts PC 2015

Mots-clés : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace de E stable par u. Soit v l'endomorphisme induit par u sur F. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Exercice 3.395 ★ Petites Mines PC 2010

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m pour que A soit diagonalisable.
2. La matrice A peut-elle être semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$?

Exercice 3.396 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

sRMS 2014 650 Mines Ponts PSI

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ *et* $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *où* $m_{i+1,i} = a_i$ *si* $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $m_{1,n} = a_n$, *les autres coefficients étant nuls. Étudier la diagonalisabilité de* M. *Le cas échéant, diagonaliser* M.

sRMS 2013 640 Mines Ponts PC

Exercice 3.397 ★ **Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2014**

Soient $a_1,\dots,a_{n-1},b_1,\dots,b_{n-1} \in \mathbb{R}$ *et* $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, *où* $m_{n,i} = a_i$, $m_{i,n} = b_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n-1$, *les autres coefficients étant nuls. À quelle condition la matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.398 ★ **Centrale PSI 2013 , Mines Ponts PSI 2015**

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $m_{i,n} = m_{n,i} = a_i$ *pour* $i \in \{1,\dots,n\}$, *les autres coefficients étant nuls. Étudier la diagonalisabilité de* M.

sRMS 2013 642 Mines Ponts PC

Exercice 3.399 ★ **TPE EIVP PSI 2013**

Déterminer les éléments propres de la matrice de taille n *dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des dernières ligne et colonne qui valent 1.*

Exercice 3.400 ★ **CCP PSI 2008 , TPE PSI 2014**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *avec* $n \geqslant 3$. *On suppose que* $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$, *et* $A^n \neq 0$. *Montrer que* A *est diagonalisable.*

sRMS 2013 887 Centrale PC

3.14.12 Réduction d'endomorphismes particuliers de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou de $\mathcal{L}(E)$

Exercice 3.401 ★ **CCP PC 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{Tr}\,A \neq 0$ *et* $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{Tr}\,A)M - (\mathrm{Tr}\,M)A$.

sRMS 2013 978 CCP PSI

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et déterminer son noyau.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* Φ. *L'application* Φ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.402 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

1. *On suppose* Φ *nulle. A-t-on nécessairement* $(A,B) = (0,0)$?
2. *On suppose* A *et* B *diagonalisables. L'application* Φ *est-elle diagonalisable ?*
3. *On suppose* A *et* B *nilpotentes. L'application* Φ *est-elle nilpotente ?*

sRMS 2015 168 ENS PC

Exercice 3.403 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2015**

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* Φ *qui à une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de colonnes* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *associe la matrice* M' *de colonnes* $C'_1,\dots,C'_n$ *où* $C'_k = \sum_{j\neq k} C_j$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. *L'endomorphisme* Φ *est-il diagonalisable ? Préciser la trace de* Φ *et donner un polynôme annulateur de* Φ.

sRMS 2014 649 Mines Ponts PSI

Exercice 3.404 ★ **Mines Ponts PC 2013**

sRMS 2010 1052 TPE PC

Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ *et* $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \mathrm{Tr}(AM)B$. *L'application* Φ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.405 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit P *une matrice de projection, et* Φ *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *défini par* $\Phi(M) = PM + MP$. *Montrer que* Φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.406 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : diagonalisabilité d'un crochet de Lie avec un projecteur

Soient $n \geqslant 2$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *canoniquement associée à un projecteur de* $\mathbb{R}^n$, $u\colon M \mapsto PM$, $v\colon M \mapsto MP$, $w\colon M \mapsto PM - MP$. *Montrer que les endomorphismes* u, v *et* w *sont diagonalisables. Déterminer les éléments propres de ces endomorphismes.*

Exercice 3.407 ★ **Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : crochet de Lie avec un nilpotent, diagonalisabilité d'un crochet de Lie avec un diagonalisable

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. *On suppose que* A *est nilpotente. Montrer que* Φ *est nilpotente.*
2. *On suppose que* A *est diagonalisable. Montrer que* Φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.408 ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : diagonalisabilité d'un crochet de Lie avec un diagonalisable

Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $T\colon f \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ f - f \circ u$.

1. *On suppose* u *diagonalisable. Montrer que* T *est diagonalisable.*
2. *On suppose* T *diagonalisable. Étudier la diagonalisabilité de* u.

Exercice 3.409 ★ **CCP PSI 2013**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* $v \in \mathcal{L}(E)$ *une symétrie de* E *et* $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \frac{1}{2}(u \circ v + v \circ u)$.

1. *Montrer que* φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$.
2. *Déterminer un polynôme annulateur de* φ.
3. *L'endomorphisme* φ *est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.410 ★ **ENS PC 2015**

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, $p \in \mathcal{L}(E)$ *un projecteur de rang* r *et* $\Phi\colon f \in \mathcal{L}(E) \mapsto \frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme.*
2. *Calculer* Φ^2 *et* Φ^3. *L'endomorphisme* Φ *est-il diagonalisable ?*
3. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* Φ.

Exercice 3.411 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit E *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *telle que* $\mathrm{Ker}\,f = \mathrm{Im}\,f$. *On pose* $T\colon g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g + g \circ f \in \mathcal{L}(E)$. *Étudier les éléments propres de* T. *L'endomorphisme* T *est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.412 ★ **TPE PC 2010**

Mots-clés : diagonalisabilité de la composition

Soient E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension* n, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\Phi\colon v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$.

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de Φ si et seulement si λ est une valeur propre de u.*
3. *Si E_λ est l'espace propre de u associé à la valeur propre λ, montrer que $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E}_\lambda)$ est l'espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.*
4. *Montrer que u est diagonalisable si et seulement si Φ est diagonalisable.*

Exercice 3.413 ★ ***TPE PC 2014***

Mots-clés : diagonalisabilité du produit
Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_\mathrm{A} : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{AM} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_\mathrm{A} = 0$.*
2. *Déterminer $(\Phi_\mathrm{A})^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi_{\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B}}$ pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, comparer $\Phi_{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$ et $\mathrm{P}(\Phi_\mathrm{A})$.*
3. *Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.*

Exercice 3.414 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit $\psi : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$.

1. *Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'image et le noyau de ψ.*
2. *L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.415 ★ ***CCP PSI 2015***

Soient E un espace vectoriel et $\Phi : u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mapsto u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id}$. L'application Φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.416 ★ ***CCP PSI 2014***

L'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?

Exercice 3.417 ★ ***RMS 2014 1189 Écoles des Mines PSI***

Soient $n \geqslant 2$ et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application u de E dans E qui envoie une matrice A sur la matrice B définie par $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{A}_{j,i}$ pour $i \neq j$, et $\mathrm{B}_{i,i} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})}{n}$.
Vérifier que u est un endomorphisme de E. Quelles sont les valeurs propres et matrices propres de u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 3.418 ★ ***CCP PSI 2014***

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \neq 0$, et $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(\mathrm{X}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{X})\mathrm{A}$.

1. *Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer son noyau.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quelle est la trace de f ?*

3.14.13 Réduction d'endomorphismes particuliers de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$

Exercice 3.419 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto (3-\mathrm{X})\mathrm{P}' + \mathrm{X}^2\mathrm{P}'' - \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. L'endomorphisme T est il injectif ? Diagonalisable ?

Exercice 3.420 ★ ***CCP PC 2011 , RMS 2012 1320***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(-4)\mathrm{X} + \mathrm{P}(6) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 3.421 ★ ***CCP PC 2010 , CCP PC 2011***

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ défini par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad \Phi(\mathrm{P}) = a\mathrm{P}(\mathrm{X}+2) + b\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + c\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. *Montrer que Φ est un automorphisme si et seulement si $a+b+c \neq 0$.*
2. *Montrer que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad \Phi(\mathrm{P}) = (a+b+c)\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k a+b}{k!}\mathrm{P}^{(k)}(\mathrm{X})$.*
3. *On suppose que $a+b+c = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ si et seulement si $2a+b \neq 0$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$ dans ce cas.*
4. *On suppose que $a+b+c \neq 0$. Déterminer les valeurs propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.422 ★ ***Centrale PC 2013***

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) : x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} \mathrm{P}(u)\,\mathrm{d}u$.

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*
2. *Calculer sa trace et son déterminant.*
3. *L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.423 ★ ***Mines Nancy PSI 2013***

Soient $n \geqslant 2$, $f : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*
2. *On se place dans le cas $n = 2$. Donner la matrice de f dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?*
3. *Dans le cas général, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.424 ★ ***X ESPCI PC 2013***

1. *Soit $\Phi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{XP}' - \mathrm{P}''$. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?*
2. *Condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une solution polynomiale non nulle de $\lambda y'' - \lambda x y' + y = 0$?*

Exercice 3.425 ★ ***CCP PSI 2013***

Soient $n \geqslant 2$ et $g : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto n^2\mathrm{XP} - (\mathrm{X}^2+\mathrm{X})\mathrm{P}' - \mathrm{X}^3\mathrm{P}''$.

1. *Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*
2. *L'endomorphisme g est-il injectif ? Est-il diagonalisable ?*

Exercice 3.426 ★ ***Centrale PC 2014***

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ *avec* $\deg B = n+1$. *Si* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *on note* $\Phi(P)$ *le reste de la division euclidienne de* AP *par* B.

sRMS 2011 1076 CCP PSI

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *On suppose que* B *possède* $n+1$ *racines réelles distinctes. Montrer que* Φ *est diagonalisable.*
3. *Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus* B *simplement scindé ?*

Exercice 3.427 ★ ***CCP PSI 2014***

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ *est un endomorphisme diagonalisable de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3.428 ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

sRMS 2011 1115 CCP PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* T *l'application de* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *dans lui-même qui, à* $P \in E$, *associe* $T(P) = (1-X)^n P\left(\frac{X}{X-1}\right)$.

1. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* E.
2. *L'endomorphisme* T *est-il diagonalisable ?*

sRMS 2013 969 CCP PSI

Exercice 3.429 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-1)P' + P(1) \in \mathbb{R}_n[X]$. *L'endomorphisme* f *est-il diagonalisable ?*

3.14.14 Réduction de matrices ou d'endomorphismes particuliers de petits ordres

Exercice 3.430 ★ ***Centrale PC 2009***

sRMS 2015 700 Mines Ponts PC

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $\det(A)$.
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.*

sRMS 2015 701 Mines Ponts PC

Exercice 3.431 ★ ***CCP PSI 2010***

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

sRMS 2007 936 CCP PC

1. *Montrer que* A *est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*
2. *Montrer qu'il existe* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *tel que* $M^5 + M^3 + M = A$.

Exercice 3.432 ★ ***CCP PSI 2010***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique* P *de* A.
2. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* P. *En déduire* A^n.

Exercice 3.433 ★ ***CCP PSI 2011***

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Diagonaliser* A.
2. *Si* $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *vérifie* $B^2 = A$, *montrer que* B *et* A *commutent. Déterminer l'ensemble* $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\quad B^2 = A\}$.

Exercice 3.434 ★ ***CCP PC 2011***

Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*

Exercice 3.435 ★ ***CCP PSI 2013***

Soient $z \in \mathbb{C}$ *et* $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $A(z)$ *est diagonalisable sauf pour une valeur particulière de* z *que l'on précisera.*
2. *Soit* $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *Montrer qu'il existe un unique* $z \in \mathbb{C}$ *pour lequel* $e^{i\theta}$ *est valeur propre de* $A(z)$. *Déterminer cette valeur* $z(\theta)$ *et calculer son module.*
3. *Tracer la courbe polaire* $\rho = |z(\theta)|$.

Exercice 3.436 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Soit $z \in \mathbb{C}$. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* z *pour que la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *soit diagonalisable.*

Exercice 3.437 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Pour quels $\varphi \in \mathbb{R}$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & \sin(2\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & \sin(2\varphi) \\ \sin(\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.438 ★ ***CCP PC 2007***

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} A$.
2. *Calculer le polynôme caractéristique de* A. !
3. *Préciser les éléments propres de* A. *Est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.439 ★ **CCP PC 2010**

sRMS 2015 1029 Mines d'Al\`es PC

Soit $J=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2. La matrice J est-elle inversible ? Montrer que J est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

sRMS 2013 619 Mines Ponts PC

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $M(a,b)=aI_3+bJ$. Montrer que $M(a,b)$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. À quelle condition est-elle inversible ?
3. Si $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=I_3+(-1+e^x)J$ et $G(x)=I_3-(1+e^x)J$. Calculer $F(x)F(y)$ et la seconde $G(x)G(y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En déduire que $F(x)$ et $G(x)$ sont inversibles et déterminer leurs inverses.

Exercice 3.440 ★ **CCP PC 2010**

sRMS 2016 898 CCP PSI

Soit $M=\begin{pmatrix}7&9&3\\-8&-11&-4\\12&18&7\end{pmatrix}$.

1. Montrer $\det(M-XI_3)=(1-X)^3$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que $M=I_3+N$ où $N^2=0$.
3. Déterminer la limite de $\frac{M^n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.441 ★ **CCP PC 2012**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice de rang 1

sRMS 2013 632 Mines Ponts PC

Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{a}&\frac{1}{a^2}\\a&1&\frac{1}{a}\\a^2&a&1\end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.442 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : diagonalisabilité d'une matrice de rang 1, puissances d'une matrice de rang 1

sRMS 2013 829 Centrale PSI

Soient $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ et $M=\begin{pmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2&yz\\xz&yz&z^2\end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

sRMS 2013 970 TPE EIVP PSI

2. Si M n'est pas diagonalisable, montrer que M est semblable à la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où $a_{1,3}=1$, les autres coefficients étant nuls.
3. Calculer M^p pour $p\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.443 ★ **RMS 2009 1093 Télécom Sud Paris PSI**

sRMS 2013 872 Centrale PC

Calculer $\begin{pmatrix}4&-15&3\\1&-4&1\\2&-10&3\end{pmatrix}^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.444 ★ **RMS 2015 1029 Mines d'Alès PC**

Mots-clés : suite récurrente linéaire d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $(u_0,u_1,u_2)\in\mathbb{R}^3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}=6u_{n+2}-11u_{n+1}+6u_n$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=(u_n,u_{n+1},u_{n+2})^T$. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad X_{n+1}=AX_n$. Diagonaliser A puis donner l'expression de u_n en fonction de n et des conditions initiales.

Exercice 3.445 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : sous-espaces stables, hyperplans stables

1. Soient $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ non nulle, $H=\operatorname{Ker}\varphi$. Montrer que H est stable par f si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi\circ f=\lambda\varphi$.
2. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces stables par f.

Exercice 3.446 ★ **CCP PSI 2016**

Mots-clés : sous-espaces stables, hyperplans stables

1. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{C}$–espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Montrer que $u(H)\subset H \iff \exists\lambda\in\mathbb{C},\quad \operatorname{Im}(u-\lambda\,\mathrm{id})\subset H$.
2. Trouver tous les sous-espaces stables par u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 3.447 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces stables par f.

Exercice 3.448 ★ **Centrale PSI 2013**

Si $a\in\mathbb{R}$, soit $M(a)=\begin{pmatrix}1&-1&a\\-1&1&-a\\a&-a&2-a\end{pmatrix}$. Déterminer, suivant la valeur de a, les sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a)$.

Exercice 3.449 ★ **TPE EIVP PSI 2013**

Discuter de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-a&a\end{pmatrix}$.

Exercice 3.450 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(A)=2$ et $A^3=0$. Montrer que A est semblable à $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Exercice 3.451 ★ **CCP PC 2013**

Étudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. sRMS 2014 357 X ESPCI PC

Exercice 3.452 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit $\Phi : \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *qui à* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *associe* $\begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix}$. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?* sRMS 2009 352 X ESPCI PC sRMS 2009 706 Mines Ponts PC

Exercice 3.453 ★ **TPE PC 2006**

Soit u *l'application de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *dans lui-même qui, à la matrice de colonnes* $[C_1, C_2, C_3]$ *associe* $[C_3, C_1, C_2]$.

1. *Montrer que* u *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* u.
3. *L'endomorphisme* u *est-il diagonalisable ?*
4. *Écrire la matrice de* u *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, *puis dans une base de diagonalisation.* sRMS 2013 575 Mines Ponts PSI

Exercice 3.454 ★ **RMS 2014 1180 Écoles des Mines PSI**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit diagonalisable.*

Exercice 3.455 ★ **RMS 2014 1181 Écoles des Mines PSI** sRMS 201[illegible] 893 X ESPCI PC

Soient $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* M *est semblable à* T. sRMS 2009 136 X ENS PSI

Calculer M^n.

Exercice 3.456 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?* sRMS 2010 297 X ESPCI PC
2. *Soit* $B = I_3 - A$. *Trouver* $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *tel que* (B^2X, BX, X) *soit une base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. *En déduire une matrice* P *inversible telle que* $P^{-1}AP$ *soit triangulaire.*

Exercice 3.457 ★ **X ESPCI PC 2015** sRMS 2013 965 ENSAM PSI

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Soit* $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $BM = MB$. *Montrer que* B *est combinaison linéaire de* I_3, M *et* M^2.

3.14.15 Équations matricielles

Exercice 3.458 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice

Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $M^2 = X$?

Exercice 3.459 ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : racines carrées de $-I_n$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = -I_n$. *Montrer que* $\det(A) = 1$.

Exercice 3.460 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : racines carrées de $-I_n$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. *Soient* E *un espace vectoriel réel de dimension* $2p$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $f^2 = -\mathrm{id}_E$. *Montrer qu'il existe une base de* E *de la forme* $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer l'équivalence entre :*
   (i) $M^2 = -I_n$;
   (ii) n *est pair et* M *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.461 ★ **Mines Ponts PSI 2013 , Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : racines carrées de $-I_n$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. *Montrer que* n *est pair. On pose* $n = 2p$.
2. *Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de* f *est* $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline -I_p & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 3.462 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice diagonalisable

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *telles que* $M^2 = \mathrm{Diag}(1, 2, 3)$.

Exercice 3.463 ★ **X ENS PSI 2009**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice nilpotente

1. *Résoudre dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $X^2 = J$, *où* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Résoudre dans* $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: $X^2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$.

Exercice 3.464 ★ **X ESPCI PC 2010**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice nilpotente

Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.465 ★ **ENSAM PSI 2013**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice nilpotente

Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 3.466 ★ **ENSEA PSI 2013** sRMS 2014 1329 CCP PC

Mots-clés : racine carrée de l'identité plus une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A^3 = 0$.

1. *Donner le développement en série entière de* $x \mapsto \sqrt{1+x}$. sRMS 2009 697 Mines Ponts PC
2. *Existe-t-il* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $B^2 = A + I_n$?

Exercice 3.467 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : racine carrée de l'identité plus une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotente. Montrer l'existence de* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $B^2 = I_n + A$.

Exercice 3.468 ★ **RMS 2009 1094 Télécom Sud Paris PSI**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice non diagonalisable

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. sRMS 2009 341 X ESPCI PC

Exercice 3.469 ★ **Mines Ponts PC 2015 , CCP PC 2016**

Trouver les $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = \operatorname{Diag}(1, 2, -1, -1)$.

Exercice 3.470 ★ **CCP PSI 2014**

Mots-clés : racines carrées d'une matrice non diagonalisable

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *dont la matrice dans la base canonique est* sRMS 2009 362 X ESPCI PC

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\varphi^2) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id})$.
2. *Déterminer une base dans laquelle la matrice de* φ *est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

sRMS 2015 405 X ESPCI PC

sRMS 2013 317 X ESPCI PC

3. *Soit* $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $g^2 = \varphi$. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(\varphi^2)$ *est stable par* g. *En déduire qu'un tel* g *n'existe pas.*

Exercice 3.471 ★ **CCEM PSI 2016** sRMS 2015 825 Centrale PSI

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

sRMS 2013 581 Mines Ponts PSI

Exercice 3.472 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $\varepsilon > 0$. *Existe-t-il* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{20} = \operatorname{Diag}(-1, -1, -\varepsilon)$?

Exercice 3.473 ★ **CCP PC 2014**

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *pour laquelle il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $M^m = I_2$. *Montrer que* $M^{12} = I_2$.

Ind. Montrer que M *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *et étudier ses valeurs propres.*

Exercice 3.474 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2014**

Soit $p \geqslant 2$. *Existe-t-il une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que*

$$M^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 3.475 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Résoudre dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.476 ★ **X ESPCI PC 2009**

1. *Montrer qu'une matrice* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *non diagonalisable est de la forme* $aI_2 + N$ *où* $a \in \mathbb{C}$ *et* N *est nilpotente et non nulle.*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Déterminer les matrices* $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$X^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.477 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. *Déterminer les* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.478 ★ **X ESPCI PC 2013**

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{2012} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

Exercice 3.479 ★ **Centrale PSI 2015**

Soient n *et* p *deux entiers plus grands que 2. Déterminer l'espace engendré par l'ensemble des matrices* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A^p = I_n$.

Exercice 3.480 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $T : P \in E \mapsto (1 + X^2)P'' - 2XP'$.

1. *Déterminer les valeurs propres de* T.
2. *Existe-t-il* $U \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $U^2 = T$?

3.14.16 Autres équations matricielles

Exercice 3.481 ★ ***CCP PC 2006***

Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *vérifiant* $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.482 ★ ***Centrale PSI 2015***

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *l'équation* $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.483 ★ ***X ESPCI PC 2010***

Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que* $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.484 ★ ***Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2015***

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\Delta(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad M + M^T = \mathrm{Tr}(M)A\}$. *Montrer que* $\Delta(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Déterminer* $\Delta(A)$.

Exercice 3.485 ★ ***Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2014 , CCP PC 2015***

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 + M^T = I_3$.

Exercice 3.486 ★ ***TPE PSI 2008 , Mines Ponts PC 2015***

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Résoudre dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *l'équation* $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$.

Exercice 3.487 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $A + (\mathrm{Tr}\,A)A^T = \frac{2}{n} I_n$.

Exercice 3.488 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.489 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer les* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^{n+2} + M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.490 ★ ***CCP PSI 2014***

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ *inversible, telle que* $\mathrm{Tr}(A) = 6$ *et* $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$. *Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de* A.

Exercice 3.491 ★ ***CCP PSI 2015***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* A *et trouver une matrice diagonale* D *semblable à* A.
2. *Montrer que toute matrice commutant avec* D *est nécessairement diagonale.*
3. *Soit* $P = X^7 + X + 1$. *Déterminer les matrices* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $P(M) = A$.

Exercice 3.492 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Trouver les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ *tels que* $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.493 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *l'équation* $A^3 + A = 0$.