Chapitre 4

Intégration sur un intervalle

4.0.1 Fonctions continues par morceaux, intégrale sur un segment

Exercice 4.1 ★

La fonction f définie sur $[-1,2]$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in[-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x\in]0,1[\\ 7 & \text{si} \quad x=1 \\ x^3 & \text{si} \quad x\in]1,2] \end{cases}$$

est-elle continue par morceaux sur $[-1,2]$?
Qu'en est-il si on remplace $1-x$ par $\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$?

Exercice 4.2 ★

On considère une fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=n$ si il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x=1/n$ et $g(x)=0$ sinon est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

Exercice 4.3 ★

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

est constante et calculer sa valeur.

Exercice 4.4 ★ **CCP MP**

On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $\mathrm{H}(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. *Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.*
2. *Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.*
3. *En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.*

4.0.2 Intégrales généralisées

Exercice 4.5 ★ **En revenant à la définition**

Étudier en revenant à la définition la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_\pi^{+\infty}\left(2i-\frac{1}{t^2}\right)e^{it^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$;
3. $\int_3^{+\infty}\frac{1}{t\ln t\ln(\ln t)}\,\mathrm{d}t$;
4. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.6 ★

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\int_0^{+\infty}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\int_0^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 4.7 ★

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$,
4. $\int_0^{+\infty}e^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty}e^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$,
6. $\int_0^{+\infty}\left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{argsh}(t)}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.8 ★

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha - t^\beta}$ avec $0 < \alpha < \beta$;
2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha + t^\beta}$ *avec* $\alpha \leqslant \beta$;
3. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$;
6. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.9 ★

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3} - t^{1/3}\right)^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_0^{+\infty} \left(\left(t^3+3at+3b\right)^{1/3}\right)+$ $t^2 \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)\mathrm{d}t$;
3. $\int_1^{+\infty} t^\alpha \sin^2 t\,\mathrm{d}t,\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.10 ★

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t \mapsto e^{-t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [0, +\infty[$,
2. $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, +\infty[$,
3. $f : t \mapsto \frac{\cos(mt)}{a^2+t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [0, +\infty[$ $(a \neq 0)$,
4. $f : t \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1]$,
5. $f : t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{t^2+1}$ *sur* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$,
6. $f : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1+t^3}{1+t^4}\right)$ *sur* $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$.

Exercice 4.11 ★

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ *sur* $\mathrm{I} =]1, +\infty[$,
2. $f : t \mapsto \frac{\ln^k t}{1+t^2}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, +\infty[$,
3. $f : t \mapsto \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}$ *sur* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$,
4. $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t(1-t^2)}$ *sur* $\mathrm{I} =]1, +\infty[$,
5. $f : t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$,
6. $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [0, +\infty]$

Exercice 4.12 ★

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
2. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ *sur* $\mathrm{I} = [2, +\infty[$;
3. $f(t) = -\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1]$;
4. $f(t) = t^2 e^{-t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
5. $f(t) = \dfrac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1[$;
6. $f(t) = \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\operatorname{sh}(t)}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

Exercice 4.13 ★

Déterminez l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, \pi/2]$;
2. $f(t) = \dfrac{\lfloor t \rfloor}{t^3}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
3. $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [0, +\infty[$;
4. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *sur* $\mathrm{I} =]-1, 1[$;
5. $f(t) = \sin(1/t^2)\arctan(t^2)$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
6. $f(t) = -\dfrac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1]$.

Exercice 4.14 ★

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ *sur* $[1, +\infty[$.
2. $f : t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{-t}$ *sur* $[0, +\infty[$ *où* P *est un polynôme.*
3. $f : t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ *sur* $\mathrm{I} =]-1, 1[$ *où* $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
4. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *sur* $\mathrm{I} =]-1, 1[$;
5. $f(t) = \sin(1/t^2)\arctan(t^2)$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
6. $f(t) = -\dfrac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1]$.

Exercice 4.15 ★

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t) = \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
2. $f(t) = \dfrac{1}{\tan t}$ *sur* $]0, \pi/2[$;
3. $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$;
4. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ *sur* $\mathrm{I} = [2, +\infty[$;
5. $f(t) = -\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ *sur* $\mathrm{I} =]0, 1]$;
6. $f(t) = t^2 e^{-t^2}$ *sur* $\mathrm{I} = [1, +\infty[$.

Exercice 4.16 ★ Intégrales de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que la fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ *est intégrable sur* $[2, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou alors* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.
2. *Montrer que la fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ *est intégrable sur* $[0, 1/2[$ *si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou alors* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Exercice 4.17 ★

1. *L'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *est-elle convergente ?*
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. *Comment expliquer ce résultat ?*

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{2x}\frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 4.18 ★

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 4.19 ★ **CCP MP**

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x\longmapsto\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x\longmapsto\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 4.20 ★ **Centrale PC 2011**

1. On considère la fonction

$$f:\begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x+\sin x}\end{cases}.$$

   La fonction f est-elle intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 4.21 ★★★ **X PC 2007**

Montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f:x\mapsto\frac{x}{1+x^9\sin^2(x)}$.

Exercice 4.22 ★★

1. a désigne un réel strictement supérieur à -1. En posant $x=\tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

2. Donner en fonction de $\alpha>0$, la nature de la série

$$\sum\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}$$

3. Même question pour

$$\sum\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}$$

4. Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}$$

Exercice 4.23 ★★

La fonction $x\mapsto\int_0^x\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$?

4.0.3 Calculs d'intégrales

Exercice 4.24 ★

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur convergence :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^n}\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty}te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
6. $\int_0^{+\infty}\frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour cette dernière intégrale, on pourra couper l'intégrale en deux intégrales sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ puis faire le changement de variable $t\to1/t$.

Exercice 4.25 ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$,
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$,
3. $\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$,
4. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4.26 ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^{\pi/2}\sin x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$,
3. $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$,
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$,
6. $\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$,

Exercice 4.27 ★

1. Établir

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 4.28 ★

1. À quelle condition sur $\alpha\in\mathbb{R}$ l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
2. Calculer $\mathrm{I}(3/2)$ en admettant que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 4.29 ★ **Intégrales d'Euler**

On pose

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t\text{ et }\mathrm{J}=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

2. Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4.30 ★ **CCP PC**

Montrer que l'intégrale suivante est convergente et la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 4.31 ★ **2**

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

Exercice 4.32 ★

Justifier l'existence et calculer l'intégrale généralisée :

$$\mathrm{I} = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4.33 ★ **Classique**

On considère l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme X^4+1.
3. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$.

d. En développant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$, calculer I.

Exercice 4.34 ★

Existence et calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.35 ★

On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3\,|\sin t|}} \end{array} \right. .$$

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$;
2. En déduire la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.36 ★★★

Prouver la convergence de $\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x$ *puis calculer cette intégrale.*

Exercice 4.37 ★★★ **Centrale PC**

Soit $f[0,1[\to \mathbb{R}$ *définie à partir du développement décimal propre :*

$$f : 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \mapsto 0, a_1 a_0 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.38 ★★★ **Centrale PC 2016**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (ε) : $y'-ay=b$ sont bornées si et seulement si a et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.39 ★★★ **X PC 2011**

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

pour $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ après avoir justifié sa convergence.

Exercice 4.40 ★★★ **X MP**

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.

Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(a+x)-f(b+x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.41 ★★

Soit $f :]0,1]\to\mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, la suite (S_n) est convergente et que si tel est le cas

$$\int_{]0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

Exercice 4.42 ★★★

Pour $a>0$, calculer

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} (t-\lfloor t\rfloor)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.43 ★★★

Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On se donne deux réels $0<a<b$.

1. Établir que pour tout $x>0$

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire convergence et valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4.0.4 Comportement asymptotique et intégrabilité

Exercice 4.44 ★

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que f est intégrable. Montrer
$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 4.45 ★★

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4.46 ★★★ **CCP MP**

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0,+\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

1. *Montrer que :*
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
2. *Étudier les séries :*
$$\sum f(n) \quad \text{et} \quad \sum f'(n)$$

exo:2004:Sep:Fri:17:47:47

Exercice 4.47 ★★ **Centrale PC**

Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

1. *Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.*
2. *Montrer que $f.f'$ est intégrable.*

Exercice 4.48 ★★★ **ENS CACHAN PC**

Trouver un équivalent en $+\infty$ de
$$f(\lambda) = \int_0^1 \mathrm{e}^{i\lambda x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4.0.5 Suites d'intégrales (propres ou) impropres

Exercice 4.49 ★

Étudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n \arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.50 ★

Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$
$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 x^2\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.51 ★

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de la suite de terme général :
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.52 ★

Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par :
$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.53 ★

Existence et calcul pour $n \in \mathbb{N}^\star$ de $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.

Exercice 4.54 ★

On pose
$$\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n converge.*
2. *Calculer J_0.*
3. *Former une relation de récurrence engageant J_n et J_{n+1}.*
4. *Établir qu'il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que*
$$\mathrm{J}_n \sim \frac{\mathrm{A}}{\sqrt[3]{n}}$$

Exercice 4.55 ★ **CCP PC, calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$**

1. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x.$$
En déduire
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1-t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes*

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$$

puis établir

$$\mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{J}_n.$$

3. *On pose*

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Établir

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{W}_{2n+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_{n+1} = \mathrm{W}_{2n}.$$

4. *Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.*
En déduire la constance de la suite de terme général $u_n = (n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1}$.
5. *Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.*

Exercice 4.56 ★ **Calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$**

1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que la fonction $g : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

3. *Justifier que $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ est convergente puis montrer que (I_n) est constante.*
4. *En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 4.57 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.*
2. *Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit $\mathrm{A}_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \mathrm{I}_n < \mathrm{A}_n$.*
4. *Étudier la limite de (A_n) et en déduire celle de (I_n).*

Exercice 4.58 ★

On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que cette intégrale est convergente. On note I sa valeur.*
2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{2n} \ln x\,\mathrm{d}x$ est convergente et la calculer.*
3. *Justifier que l'on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

4. *Déduire des questions précédentes que $\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}$.*

Exercice 4.59 ★★ **TPE 2009**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que I_n est bien définie.*
2. *Étudier la convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}$.*
4. *En déduire par encadrement un équivalent de I_n.*

Exercice 4.60 ★★ **TPE 2011**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+x^2\right)^n}.$$

1. *Prouver que pour tout $(n;x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}_n(x)$ est bien définie.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.*
3. *En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^3}$.*

Exercice 4.61 ★ **CCP 2016**

Premier exercice :
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$.
On pose $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. *Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. En déduire l'existence de $\mathrm{I}(1)$ et le calculer.*
2. (a) *Soit k entier entre 0 et 5. Justifier que $\mathrm{I}(\mathrm{X}^k)$ converge absolument*
   (b) *Justifier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.*
3. *On suppose qu'il existe trois réels a,b,c tels que*

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}) = a\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\mathrm{P}(0) + c\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(a) *Calculer* $\mathrm{I}(\mathrm{X})$. *En déduire deux relations entre* a, b *et* c.

(b) *Montrer que* $\mathrm{I}(\mathrm{X}^2) = \frac{\pi}{2}$ *et déterminer* a, b *et* c.

4. *Soit* $n \in [\![2,5]\!]$. *Montrer que* $\mathrm{I}(\mathrm{X}^n) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}(\mathrm{X}^{n-2})$.

5. *Conclure.*

Exercice 4.62 ★★ **CCP MP**

On pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2.$$

1. *Déterminer une suite de fonctions* (f_n) *telle que*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que*

$$\mathrm{I}_n = a + \frac{b}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 4.63 ★★★ **Centrale MP**

1. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. *Déterminer les limites des suites*

$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. *Calculer, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

(on procédera par récurrence)

3. *En déduire*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. *Étudier la limite puis un équivalent de*

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

4.0.6 Intégration et structure euclidienne

Exercice 4.64 ★ **Convergence en moyenne quadratique**

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur* I. *On note* $(f \mid g) = \int_{\mathrm{I}} fg$ *le produit scalaire usuel sur* E *et* $\|.\|_2$ *la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'une suite* (f_n) *de fonctions de* E converge en moyenne quadratique *vers une fonction* f *de* E *si et seulement si* $\mathrm{N}_2(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. *Prouver les inégalités*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \left|(f \mid g)\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} \left|fg\right| \leqslant \mathrm{N}_2(f)\mathrm{N}_2(g)..$$

2. *En déduire que si* (f_n) *et* (g_n) *sont deux suites de fonctions de* E *convergeant en moyenne quadratique vers* f *et* g *alors* $((f_n \mid g_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (f \mid g)$.

Exercice 4.65 ★

On considère E *l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$. *On note* $(f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} fg$ *le produit scalaire usuel sur* E. *Montrer que le sous-espace* $\mathscr{P}$ *des fonctions paires de carré intégrables sur* $\mathbb{R}$ *et le sous-espace* $\mathscr{I}$ *des fonctions impaires de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$ *sont supplémentaires orthogonaux.*

Exercice 4.66 ★

On rappelle l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

1. *Montrer que l'intégrale* $\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ *converge.*
2. *Que vaut* I_{2p+1} ?
3. *Trouver une relation de récurrence entre* I_{2p+2} *et* I_{2p} *et finir le calcul des* I_p *en admettant que* $\mathrm{I}_0 = 1$.
4. *Soit*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

Montrer que φ *est un produit scalaire.*

5. *Construire une base orthonormée de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$*pour ce produit scalaire en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à* $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$.

Exercice 4.67 ★ **CCP MP**

Soit a *et* b *deux réels tels que* $a<b$.

1. *Soit* h *une fonction continue et positive de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. *Soit* E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

   On pose, $\forall (f,g)\in \mathrm{E}^2$, $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. *Majorer* $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ *en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 4.68 ★ **CCP MP**

Soit E *l'espace vectoriel des applications continues et* 2π*-périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que* $\left(f \mid g\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *définit un produit scalaire sur* E.
2. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par* $f : x\mapsto \cos x$ *et* $g : x\mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F *de la fonction* $u : x\mapsto \sin^2 x$.

4.0.7 Intégrales fonction d'une borne, fonctions définies par une intégrale

Exercice 4.69 ★★ **Type Mines**

Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.70 ★★★ **Centrale 2009, Exponentielle intégrale**

On pose

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Quel est le domaine de définition de* f *?*
2. *Donner un équivalent de* $f(x)$ *aux bornes du domaine de définition.*
3. *Calculer* $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.71 ★★ **Type Mines**

On introduit

$$f : x\mapsto \int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.
2. *Montrer que* f *est prolongeable en une fonction (toujours notée* f*)* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
3. *Déterminer la position locale de la courbe de* f *par rapport à sa tangente en* 1.
4. *Déterminer les limites aux bornes de* f *et tracer sa courbe représentative.*
5. *Calculer* $\int_0^1 \dfrac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

4.0.8 Étude de fonctions définies par une intégrale à paramètre

Exercice 4.72 ★ **Transformée de Fourier, Mines 2007**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *une fonction continue et intégrable sur* $\mathbb{R}$. *On définit* sa transformée de Fourier *par*

$$\hat{f} : x\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* $\hat{f}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Dans cette question, on prend* $f : t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
   (a) *Montrer que* $\hat{f}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
   (b) *Calculer* $\hat{f}$ *(On rappelle que que* $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$*).*
3. *On suppose de plus que* $t\mapsto t f(t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\hat{f}$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.73 ★ **Transformée de Laplace**

On note E *l'ensemble des fonctions* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *telles que* $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-ty}f(t)=0$ *pour tout* $y>0$. *Pour* $f\in\mathrm{E}$, *on définit* sa transformée de Laplace *par*

$$\mathscr{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que pour tout* $a>0$ *et tout* $f\in\mathrm{E}$, *la fonction* $t\mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que pour tout* $f\in\mathrm{E}$, $\mathscr{L}(f)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
3. *Montrer que* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et que* L *est linéaire de* E *dans* $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$
4. *Calculer la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :*

   (a) $f_1 : t\mapsto 1$; (b) $f_2 : t\mapsto \mathrm{e}^{-at}$, $a>0$; (c) $f_3 : t\mapsto t^n$, $n\in\mathbb{N}$; (d) $f_4 : t\mapsto\cos(\omega t)$

5. *On suppose que* $f\in\mathrm{E}$ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *et que* f' *et* f'' *appartiennent à* E. *Trouver une relation entre* $\mathscr{L}(f)$ *et* $\mathscr{L}(f'')$.
6. *Retrouver la solution de l'équation différentielle* $y''+y=1$ *telle que* $y(0)=2$ *et* $y'(0)=0$. *On admettra que l'application* $\mathscr{L}$ *est injective.*

Exercice 4.74 ★

On considère $f : x\mapsto \int_0^1 \dfrac{t^2}{\sqrt{1+x^4t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *En déduire* $\lim_{x\to 0}\int_0^1 \dfrac{t^2}{\sqrt{1+x^4t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.75 ★★ **Mines 2005**

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t \, \mathrm{d}t.$$

1. *Déterminer le domaine de définition* I *de* f.
2. *La fonction* f *est elle continue sur* I.
3. *Donner un équivalent de* $f(x)$ *quand* $x \to 0$.
4. *Donner un équivalent de* $f(x)$ *quand* $x \to +\infty$.

Exercice 4.76 ★

Montrer que $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+itx)}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.77 ★

On considère $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \sin(t \sin x)\, \mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *En déduire* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^{\pi} \sin(t\sin x)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 4.78 ★

1. *Montrer que* $\int_0^1 \dfrac{t^x - 1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$ *est convergente pour tout* $x \in]-1, +\infty[$.
   Indication 4.0 : On pourra distinguer les cas $x < 0$, $x = 0$ *et* $x > 0$.
2. *Montrer que* $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{t^x - 1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]-1, +\infty[$ *et calculer* f'.
3. *En déduire une expression explicite de* f.

Exercice 4.79 ★

1. *Montrer que* $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *En déduire une expression explicite de* f.

Exercice 4.80 ★

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D *de* $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$;
2. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathrm{D} \setminus \{0\}$.

Exercice 4.81 ★

On se propose de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x > 0$:

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)^n}.$$

1. *Calculer* $f_1(x)$.
2. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* f_n *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a, +\infty[$.
3. *Calculer* $f_n'(x)$ *en fonction de* $f_{n+1}(x)$.
4. *En déduire* f_n.

Exercice 4.82 ★

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx)\, \mathrm{d}t$ *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.83 ★

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\, \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+$;
2. *À l'aide du changement de variable* $u = 1/t$, *calculer* $f(0)$;
3. *Montrer que* f *est continue et décroissante ;*
4. *Déterminer* $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 4.84 ★

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\, \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Grâce au changement de variable* $t = 1/u$, *calculer* $f(0)$.
3. *Étudier les variations de* f *sur son domaine de définition.*
4. *Étudier la limite de* f *en* $+\infty$.

Exercice 4.85 ★

Posons

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Étudier les variations de* f.
2. *Déterminer les limites de* f *aux bornes de son domaine de définition.*
3. *Déterminer un équivalent de* f *en* 0^+ *puis en* $+\infty$.

Exercice 4.86 ★

On introduit

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Montrer que* f *est continue sur son domaine de définition.*
3. *Calculer* $f(x) + f(x+1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. *Donner un équivalent de* f *en* 0^+ *et trouver la limite de* f *en* $+\infty$.

Exercice 4.87 ★

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

5:58 **Exercice 4.88** ★

On considère la fonction définie par :

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Vérifier que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x)=2x\mathrm{F}(x)$.
3. *En déduire que*
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$$

9:48 **Exercice 4.89** ★

On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t.$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $[0,+\infty[$.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0,+\infty[$ *et dresser son tableau de variations en calculant* $f(0)$ *et la limite de* f *en* $+\infty$.
3. *Trouver un équivalent simple de* f *en* $+\infty$.
4. *Étudier la dérivabilité de* f *en* 0.

Exercice 4.90 ★ **Oral CCP MP**

On pose : $\forall\, x\in]0;+\infty[$ *et* $\forall\, t\in]0;+\infty[$, $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$.

1. *Démontrer que,* $\forall\, x\in]0,+\infty[$, *la fonction* $t\mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x\in]0;+\infty[$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\mathrm{d}t.$
2. *Démontrer que,* $\forall\, x\in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
3. *Démontrer que* Γ *est de classe* C^1 *sur* $]0;+\infty[$ *et exprimer* $\Gamma'(x)$ *sous forme d'intégrale.*

Exercice 4.91 ★ **Oral CCP MP**

1. *Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*
2. *Démontrer que la fonction* $f:x\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
3. (a) *Trouver une équation différentielle linéaire* (E) *d'ordre* 1 *dont* f *est solution.*
   (b) *Résoudre* (E) .

Exercice 4.92 ★★ **Mines PC 2016**

On considère $f(x)=\int_0^1\dfrac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$

1. *Donner le domaine de définition* D *de* f.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* D.
3. *Calculer* f.

Exercice 4.93 ★★★ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f *donnée là où elle est définie par :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^2$ *sur un intervalle à déterminer.*
2. *Trouver une équation différentielle satisfaite par* f.
3. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4.94 ★★★ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f *donnée là où elle est définie par :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^2$ *sur un intervalle à déterminer.*
2. *Trouver une équation différentielle satisfaite par* f.
3. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4.95 ★ **Mines 2016**

Trouver les fonction continues sur $\mathbb{R}$ *telles que :* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 4.96 ★ **CCP 2016**

On pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}.$

1. *Montrer que* f *est définie et décroissante sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Calculer la limite de* f *en* $+\infty$.

4.0.9 Exercices de synthèse

Exercice 4.97 ★★ **Centrale 2000**

Pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *et tout* $x\in\mathbb{R}$, *on pose*

$$[\mathrm{F}(\mathrm{P})](x)=\mathrm{e}^{4x}\int_{2x}^{+\infty}\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Vérifier l'existence de* $\mathrm{F}(\mathrm{P})(x)$.
2. *Calculer avec Python* $\mathrm{F}(\mathrm{X}^k)$ *pour* $k\in[\![0,5]\!]$.
3. *Montrer que* F *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. Trouver une équation différentielle vérifiée par $Y = F(P)$. En déduire que F est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
5. Quelles sont les valeurs propres de F.

Exercice 4.98 ★★★ **Centrale PC 2016**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (ε) : $y' - ay = b$ sont bornées si et seulement si a et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

4.1 Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 4.99 ★ **X ESPCI PC 2012 , X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : inégalité de Hardy

Soit $f \in \mathscr{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 4.100 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : inégalité de Hardy

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

1. On suppose $(f')^2$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de $\frac{f(t)^2}{t}$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 4.101 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty}(f'(t)^2 + t^2 f(t)^2)\mathrm{d}t$ existe. Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} f(t)^2\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\mathrm{d}t}$.

Exercice 4.102 ★ **ENS PC 2014**

Mots-clés : inégalité de Hölder, inégalité de Prékopa et Leindler

1. Soit $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer : $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
2. Soient u, v dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ à support compact. Soit $\theta \in [0,1]$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} u^\theta v^{1-\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant (\int_{-\infty}^{+\infty} u)^\theta (\int_{-\infty}^{+\infty} v)^{1-\theta}$.
3. Soient u, v, w dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$ intégrables. Soit $\theta \in [0,1]$. On suppose que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $w(\theta x + (1-\theta)y) \geqslant u(x)^\theta v(y)^{1-\theta}$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} w \geqslant (\int_{-\infty}^{+\infty} u)^\theta$Â§$(\int_{-\infty}^{+\infty} v)^{1-\theta}$.

Exercice 4.103 ★ **X ENS PSI 2015**

Mots-clés : fonctions convexes, inégalité de Jensen

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $I =]a,b[$. La fonction $\Phi : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y)$. Soit $\Phi : I \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que Φ est convexe si et seulement si pour tout $(s,t,u) \in I^3$ tel que $s < t < u$, $\frac{\Phi(t)-\Phi(s)}{t-s} \leqslant \frac{\Phi(u)-\Phi(t)}{u-t}$.
2. On suppose que Φ est dérivable sur I. Montrer que Φ est convexe si et seulement si Φ' est croissante sur I.
3. Montrer que si Φ est convexe alors Φ est continue sur I.
4. On suppose Φ convexe. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R} \to I$ continues telles que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ et les fonctions $(\Phi \circ g)f$ et fg soient intégrables. Montrer que $\Phi(\int_{\mathbb{R}} fg) \leqslant \int_{\mathbb{R}} (\Phi \circ g)f$.

Exercice 4.104 ★ **ENSAM PSI 2016**

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ On suppose f et f'' de carrés intégrables. Montrer que f' est de carré intégrable, et que $[\int_{\mathbb{R}}(f')^2]^2 \leqslant [\int_{\mathbb{R}} f^2][\int_{\mathbb{R}}(f'')^2]$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.105 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\mathrm{d}t$.

Exercice 4.106 ★ **CCP PC 2010**

Soient E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leqslant n$ et, pour $k \in \{0,\dots,n\}$, $\mu_k : t \mapsto t^k$.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Montrer que $\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\mathrm{d}t$ converge.
   Si $P \in E$, on pose $L(P) : P \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\mathrm{d}t$.
2. Si $k \in \{0,\dots,n-1\}$, montrer que $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$. En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\mu_j}{j!}$.
3. Déterminer les valeurs propres de L. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Exercice 4.107 ★ **ENS PC 2013**

Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que u et u' soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $u(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $(u(x))^2 \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2\right)^{1/2}$.

Exercice 4.108 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : fonction décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4.109 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $x_n \to +\infty$ et $x_n f(x_n) \to 0$.

Exercice 4.110 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : fonction décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ soit convergente.

1. Si $f(x)$ admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, que vaut ℓ ?
2. Donner un exemple où $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que si f est décroissante, alors $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.111 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante. Soit $\alpha > -1$. On suppose que la fonction $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\mathrm{d}t = -(\alpha+1)\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4.112 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *intégrable. On suppose qu'il existe* $\mathrm{M} > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_x^{x+1} f'^2 \leqslant \mathrm{M}$. *Montrer que* $f(x) \to 0$ *quand* $x \to +\infty$.

Exercice 4.113 ★ **X ESPCI PC 2013 , Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *intégrable sur* $\mathbb{R}_+$. *Montrer que* $\frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ *quand* $x \to +\infty$.

Exercice 4.114 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : continuité uniforme des fonctions $\mathscr{C}^1$ *à dérivée dans* L^2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$. *On suppose que* $\int_{\mathbb{R}} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t < +\infty$. *Montrer que* f *est uniformément continue.*

Exercice 4.115 ★ **ENSAM PSI 2014**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *et* F *sa primitive nulle en 0. Montrer que la convergence d'une des deux intégrales ci-dessous implique celle de l'autre, et comparer leurs valeurs :* $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.116 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux et intégrable.*

1. *Peut-on dire que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *?*
2. *Montrer que* $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x - \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$ *est intégrable et que* $\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 4.117 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : intégrale de Frullani

Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *intégrable et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $0 < a < b$. *Calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.118 ★ **ENS PC 2015**

Soit sgn *la fonction de* $[-1,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* x *associe 1 si* $x > 0$, -1 *si* $x < 0$ *et 0 si* $x = 0$. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R}_+)$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \quad f(x) > 0$. *Montrer l'équivalence entre :*

(i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{f} = +\infty$

(ii) il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *d'éléments de* $\mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ *telle que* (u_n) *converge simplement vers la fonction* sgn *et telle que* $\int_{-1}^1 f u_n'^2 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 4.119 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soient $k \in [0,1[$ *et* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ *continue par morceaux telle que* $\frac{f(x+1)}{f(x)} \to k$ *quand* $x \to +\infty$.

1. *Montrer que* f *est intégrable.*
2. *Peut-on généraliser le résultat ?*

Exercice 4.120 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : somme de Riemann d'une fonction intégrable monotone

Soit $f : \,]0,1[\to \mathbb{R}$ *continue, monotone et intégrable. Montrer que* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$.

Exercice 4.121 ★ **ENSAM PSI 2015**

Mots-clés : produit de convolution

Soient f *et* g *deux fonctions continues de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* $f * g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.
2. *Montrer que* $f * g$ *est continue sur son ensemble de définition.*
3. *Étudier les limites de* $f * g$ *aux bornes de son domaine de définition.*

Exercice 4.122 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*)$. *On suppose que* f^2 *est intégrable sur* $]0,1]$.

1. *Montrer que* f *est intégrable sur* $]0,1]$.
2. *On suppose que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\int_0^x f^2 = 2\int_0^x f$. *On pose* $g : x \mapsto \int_0^x f$ *et* $h : x \mapsto \int_0^x f^2$.
   (a) *Trouver une équation différentielle vérifiée par* g.
   (b) *En déduire* g *puis* f.

Exercice 4.123 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T*-périodique et non identiquement nulle. On pose* $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f, \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{n\mathrm{T}}^{(n+1)\mathrm{T}} \frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}t$.

1. *Étudier la convergence de la série de terme général* u_n. *La fonction* $t \mapsto \frac{|f(t)|}{t}$ *est-elle intégrable sur* $[\mathrm{T},+\infty[$ *?*
2. *On suppose* $\mathrm{M} \neq 0$. *Montrer que* $\mathrm{F}(x) \sim \mathrm{M}x$ *quand* $x \to +\infty$. *L'intégrale* $\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ *est-elle convergente ?*
3. *On suppose que* $\mathrm{M} = 0$. *Montrer que l'intégrale* $\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ *est convergente.*

4.1.1 Intégrales de fonctions numériques positives particulières

Exercice 4.124 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2014**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t$.

1. *Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n+1}.
2. *Déterminer un équivalent de* I_n. *Nature de* $\sum \mathrm{I}_n$ *?*

Exercice 4.125 ★ **CCP PC 2006**

Soit, pour $n \geqslant 1$: $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$.

1. *Démontrer l'existence de* I_n *et trouver sa limite quand* $n \to \infty$.
2. *En posant* $u = \frac{1}{x}$, *montrer que* $\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$. *Puis, en posant* $v = u - \frac{1}{u}$, *calculer* I_1.
3. *Calculer* I_n.

Exercice 4.126 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *existence et calcul de* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.127 ★ **X ESPCI PC 2014**

Étudier l'intégrabilité sur sur $]0,1[$ *et sur* $]2,+\infty[$ *de* $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$.

Exercice 4.128 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f : t \mapsto |\ln t|^{\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Étudier l'intégrabilité de* f *sur* $]0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1[$, $]1,2]$ *et* $[2,+\infty[$.

Exercice 4.129 ★ **Centrale PC 2009 , Mines Ponts PSI 2014**

Existence et calcul de $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.130 ★ **RMS 2010 1003 Télécom Sud Paris PSI**

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)\frac{e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.131 ★ **Petites Mines PSI 2010**

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 4.132 ★ **TPE PC 2006**

Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$.

Exercice 4.133 ★ **TPE PC 2011**

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

Exercice 4.134 ★ **RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC**

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.135 ★ **CCP PSI 2015**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.136 ★ **Centrale PC 2013**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}^2\, t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.137 ★ **CCP PC 2013**

Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(1/\sqrt{t})}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.138 ★ **TPE EIVP PC 2013**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 4.139 ★ **CCP PC 2007**

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$, *étudier l'intégrabilité de* $x \mapsto x^\beta e^{-\alpha x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.140 ★ **CCP PC 2014**

Nature de $\int_0^1 |\ln t|^b (1-t)^a\,\mathrm{d}t$ *pour* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 4.141 ★ **RMS 2014 1251 Écoles des Mines PSI**

Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

1. *Justifier l'existence de* I.
2. *Montrer que* $\mathrm{I} = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$. *Calculer* I.

Exercice 4.142 ★ **RMS 2014 1252 Écoles des Mines PSI**

Existence et calcul de $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 4.143 ★ **ICNA PSI 2014**

Trouver une condition nécessaire et suffisante de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.144 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Convergence et calcul de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}} \arcsin\frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.145 ★ **Mines Ponts PSI 2014 , Centrale PC 2015**

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.146 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Nature et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Exercice 4.147 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
3. *Montrer que* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.148 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $]0,1[$. *Déterminer les limites de* f *quand* $x \to 0^+$ *et quand* $x \to 1^-$.
2. *Calculer* $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.149 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer un développement asymptotique à deux termes de* f *en zéro.*
2. *Étudier la concavité de* f. *Tracer le graphe de* f.

Exercice 4.150 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Établir la convergence, puis déterminer la valeur, de $\mathrm{I}(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\sin(2t)} - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.151 ★ **Centrale PC 2014**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. *Donner un équivalent de* $f(x)$ *quand* $x \to +\infty$.
2. *Donner un équivalent de* $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-k^2}$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 4.152 ★ **CCP PSI 2014**

Pour $x \in]0,\pi[$, *on pose* $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$. *Prolonger* g *par continuité sur* $[0,\pi[$. *La fonction* g^2 *est-elle intégrable sur* $[0,\pi[$?

Exercice 4.153 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f : t \in]0,1] \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$.

1. *Montrer que* f *est intégrable sur* $]0,1]$.
2. *Déterminer un équivalent de* $x \mapsto \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\arctan t)^2}\,\mathrm{d}t$ *quand* $x \to 0^+$.

Exercice 4.154 ★ **Centrale PC 2015**

Pour $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *et* $\mathrm{G}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$. *Calculer la valeur de leur dérivée en zéro.*
2. *Montrer que* F *admet une limite finie en* $+\infty$ *(on admet dans la suite que cette limite vaut* $\frac{\pi}{2}$*).*
3. *Montrer que* G *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$.
4. (a) *Montrer l'existence et l'unicité d'une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}(a_n) = \frac{1}{1+n}$.
   (b) *Étudier la monotonie de* (a_n), *et sa convergence.*

(c) *Trouver un équivalent de a_n en $+\infty$.*

5. (a) *Montrer l'existence et l'unicité d'une suite positive (b_n) telle que $b_0 = 0$ et $\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+n}$.*

   (b) *Étudier la monotonie de (b_n) et sa limite.*

   (c) *Convergence de la série de terme général $c_n = b_n(n+1)$?*

6. *Étudier l'intégrale $\mathrm{H}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)e^{-xt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 4.155 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|}$?

Exercice 4.156 ★ ***Centrale PSI 2015***

Soit $f\colon x \in]1,+\infty[\mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1. *Montrer que $g\colon x \in]1,+\infty[\mapsto \sqrt{x^2-1}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est bien définie et la calculer.*
3. *Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{n}{m\sqrt{m^2-n^2}}$. Montrer que la suite (S_n) est bien définie et déterminer sa limite.*

Exercice 4.157 ★ ***Centrale PC 2015***

1. *Déterminer, suivant $\alpha > 0$, la nature de $\int_0^{+\infty} \ln(1+x^{-\alpha})\mathrm{d}x$.*
2. *Calculer cette intégrale pour $\alpha = 2$.*

Exercice 4.158 ★ ***Centrale PC 2015***

Soit $f\colon t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$.

1. *Étudier la convergence de $\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et de $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.*
2. *Soit $\mathrm{F}\colon x \mapsto \int_{1/x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$. Quel est le domaine de définition de F ?*
3. *Calculer les limites de F aux bornes de son domaine de définition.*
4. *Calculer les variations de F. On montrera que F ne s'annule qu'en une unique valeur que l'on déterminera.*
5. *Tracer le graphe de F .*

4.1.2 Intégrales de fonctions numériques complexes particulières

Exercice 4.159 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.160 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\mathrm{d}x$?

Exercice 4.161 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x^b}\mathrm{d}x$ si $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.162 ★ ***Mines Ponts PC 2010***

La fonction $f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4.163 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : intégrale de Fresnel

Nature de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$?

Exercice 4.164 ★ ***Centrale PSI 2010***

Mots-clés : intégrale de Fresnel

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin(x^2)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 4.165 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : intégrale de Fresnel

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^3)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Exercice 4.166 ★ ***Centrale PSI 2014***

Nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin(\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.167 ★ ***CCP PSI 2014***

La fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(e^t)\mathrm{d}t$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 4.168 ★ ***TPE PC 2010***

Mots-clés : intégrale de Frullani

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

1. *Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.*
2. *Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$ converge.*
3. *Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x$.*

Exercice 4.169 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

1. *Soit $a > 0$. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\mathrm{d}t$?*
2. *Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(a_i t)}{t}\mathrm{d}t$. À quelle condition l'intégrale I est-elle définie ? Calculer I lorsque cette condition est réalisée.*

Exercice 4.170 ★ ***CCP PC 2013***

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.171 ★ ***RMS 2014 1284 Écoles des Mines PSI***

Soit $\mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

1. *Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.*

Exercice 4.172 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Soit $f\colon x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.173 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Calculer I au moyen de $\mathrm{J}(u) = \int_0^u (\int_0^u e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$.

Exercice 4.174 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.175 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Nature, suivant α, de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)\ln|1-x|}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$.

4.1.3 Intégrales à paramètre

Exercice 4.176 ★ ***CCP PSI 2010***

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $g\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.*
2. *Exprimer g'' en fonction de g et de f.*

Exercice 4.177 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Soit E l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π–périodiques. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\|f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(f)\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que G est un endomorphisme continu. Est-ce un automorphisme ?*
2. *Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de G.*

Exercice 4.178 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{E}$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe $f \in \mathrm{E}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(f(xt))}{4+t^2}\mathrm{d}t$.

1. *Si $f \in \mathrm{E}$, montrer que $\mathrm{T}(f)\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(f(xt))}{4+t^2}\mathrm{d}t$ est dans E.*
2. *Soit (f_n) définie par $f_0\colon x \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = g + \mathrm{T}(f_n)$. Étudier cette suite de fonctions et conclure.*

3. *Montrer que f est unique (cette question ne figurait pas dans l'énoncé publié).*

Exercice 4.179 ★ ***Centrale PSI 2014***

Soient f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\pi x t)\mathrm{d}t$.

1. *Donner le domaine de définition D de F. La fonction F est elle continue sur D ?*
2. *Hypothèses sur f pour que F soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D ?*
3. *On suppose que f est identiquement nulle sauf sur le segment $[0,\mathrm{A}]$ avec $\mathrm{A} > 0$. Montrer que F est développable en série entière.*

Exercice 4.180 ★ ***ENS PC 2015***

Soit $s \in]0,1[$. Pour $(a,x,y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{P}(a,x,y,t) = \frac{ay^{2s}}{((x-t)^2+y^2)^{s+1/2}}\cdot$

1. *Montrer, pour $(a,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \mathrm{P}(a,x,y,t)$.*
2. *Montrer l'existence d'un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(c,x,y,t)\mathrm{d}t = 1$.*
3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{y\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} \mathrm{P}(c,x,y,t)\mathrm{d}t = 0$.*
4. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(c,x,y,t) f(t)\mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $y \mapsto u(x,y)$ a, quand $y \to 0^+$, une limite dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.*

4.1.4 Intégrales classiques, transformées de Laplace et de Fourier

Exercice 4.181 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : fonction Γ d'Euler
Soit s un nombre complexe de partie réelle > 0.

1. *Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Montrer que $\mathrm{I}_n(s) = \int_0^n t^{s-1}(1-\frac{t}{n})^n\mathrm{d}t$ converge. Quelle est la limite de $\mathrm{I}_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$?*
3. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \Gamma(s)$.*

Exercice 4.182 ★ ***Centrale PC 2014***

Mots-clés : fonction Γ d'Euler
Soient $\mathrm{G}\colon x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F}\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

1. *Montrer que G est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer une relation entre $\mathrm{G}(x+1)$ et $\mathrm{G}(x)$.*
2. *Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$. Déterminer une relation entre $\mathrm{F}(x+1)$ et $\mathrm{F}(x)$.*
3. *Soit $\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma = \mathrm{F}+\mathrm{G}$.*

Exercice 4.183 ★ ***CCP PC 2015***

Mots-clés : fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann
Soit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que I existe.*
2. *On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
3. *On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et on donne $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Préciser le domaine de définition de ζ.*
4. *Pour quels $t \in \mathbb{R}$ a-t-on la relation $\frac{t^3}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t}$?*
5. *Calculer I.*
6. *On pose $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de F. Exprimer F à l'aide de ζ et de I. Étudier la continuité de F.*

Exercice 4.184 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : intégrale de Gauss
Soient $f\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $g\colon x \mapsto \int_0^{\pi/4} e^{-x^2/\cos^2 u}\mathrm{d}u$.

1. *Montrer que f^2+g est constante.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Exercice 4.185 ★ ***CCP PSI 2014***

Mots-clés : intégrale de Gauss

1. *Montrer que $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.*

2. Soit $\mathrm{F}\colon x \in \mathbb{R}_+ \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{F}+\mathrm{G}^2$ est constante. Déterminer la limite en $+\infty$ de F. En déduire la valeur de I.

Exercice 4.186 ★ **IIE PC 2006**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

On considère la fonction $\varphi\colon t \mapsto \int_0^\pi e^{-t\sin\theta}\cos(t\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour $t>0$: $\varphi'(t) = -2\frac{\sin t}{t}$.
3. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

Exercice 4.187 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Montrer que $u_n - v_n \to 0$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4.188 ★ **Centrale PSI 2010 , TPE PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace, intégrale de Dirichlet

Soit $f\colon x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur D ?
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par f.
3. Soit $g\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$. Montrer que $g=f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.189 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Trouver une équation différentielle dont f est solution.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en 0. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 4.190 ★ **CCP PSI 2010 , CCP PSI 2011 , TPE EIVP PSI 2013**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $f\colon y\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ty}\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(y)$ pour $y\in\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 4.191 ★ **CCP PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$.

Exercice 4.192 ★ **ENSAM PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $\mathrm{F}\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$. Étudier F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.193 ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Existence, domaine de définition, continuité. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$? Calculer f' et f.
2. Soit $g\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de g. Exprimer g en fonction de f. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.194 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Soit $\mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xt}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que F est définie sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer $\mathrm{F}'(t)$. En déduire une expression de $\mathrm{F}(t)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que F est continue en 0. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.195 ★ **CCP PC 2014**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet, transformée de Laplace

Soit $f\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ et de $f'(x)$ quand $x\to+\infty$.
3. Montrer que $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.
4. Exprimer $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ en fonction de $f(0)$. En déduire la valeur de I.

Exercice 4.196 ★ **Navale PSI 2010**

Montrer que $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.197 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : transformée de Laplace

Soit $f\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x+t}\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.198 ★ **CCP PC 2016**

Soit $\mathrm{F}\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que F est positive et décroissante.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{x}$. En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
5. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{F}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer que $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 4.199 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Donner un équivalent de f aux bornes.

Exercice 4.200 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 \leqslant 1 - xf(x) \leqslant \frac{2}{x}$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4.201 ★ **RMS 2014 1290 Écoles des Mines PSI**

Mots-clés : constante d'Euler, transformée de Laplace

On pose $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-xt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est solution de $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$.
3. Exprimer f à l'aide de $\mathrm{C} = \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.202 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : transformée de Fourier, fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

On note E l'ensemble des applications f de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-\mathrm{M},\mathrm{M}]$. On pose pour $f \in \mathrm{E}$ et $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\mathrm{F}(f)$ est définie et dérivable. Calculer $\mathrm{F}(f)'$.
2. Montrer que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{C_N} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |\mathrm{F}(f)(t)| \leqslant \mathrm{C_N}|t|^{-\mathrm{N}}$ (on exprimera $\mathrm{C_N}$ en fonction de f et N).
   On pose pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\mathrm{F}(f)(z)e^{ixz}\mathrm{d}z$.

3. Montrer que $\mathrm{D}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $g \in \mathrm{E}$; montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}(f)(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\mathrm{F}(f)(z)\overline{\mathrm{F}}(g)(z)\mathrm{d}z$.

4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}(f)(x)xf'(x)\mathrm{d}x = 0$.
5. Montrer que la condition $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) + \mathrm{D}(\varphi)(\cos x)\sin x = 0$ entraîne que φ est constante.

Exercice 4.203 ★ **TPE PSI 2014**

Mots-clés : transformée de Fourier

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{zt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Si $z = x + iy$, montrer que $f(z) = e^{x^2/4}e^{ixy/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{iyu}\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{iyu}\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, solution d'une équation différentielle d'ordre 1. Résoudre cette équation et en déduire une expression de $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.204 ★ **X ENS PSI 2015**

Soit $\gamma\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2/2}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\gamma(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\mathrm{F}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\gamma(t)\mathrm{d}t$.
2. Donner un développement en série entière de F en 0 et préciser le rayon de convergence.
3. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{F}(ix)\gamma(x)$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
4. Donner alors une expression de F .

Exercice 4.205 ★ **ENS PC 2015**

Mots-clés : transformée de Fourier

Soient $\alpha > 0$ et $f\colon x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-\frac{(x-k)^2}{2\alpha})$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
3. Soit $\Phi\colon y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{u^2}{2\alpha})e^{-iuy}\mathrm{d}u$. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par Φ. En déduire une expression de $\Phi(u)$.

4.1.5 Autres intégrales à paramètre de fonctions particulières

Exercice 4.206 ★ **X ESPCI PC 2012**

Soit $f\colon x \mapsto \int_0^1 xe^{-xt\ln t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier sa régularité.
2. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de zéro.

Exercice 4.207 ★ **X ESPCI PC 2012**

Déterminer la limite de $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.208 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soient $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $\mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ pour $a > 0$. Calculer I, puis calculer K à l'aide de $\mathrm{J}(a)$.

Exercice 4.209 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $\mathrm{F}\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* F *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* F *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

PSI

Exercice 4.210 ★ **CCP PSI 2014**

sRMS 2015 927 Centrale PC

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$.
3. *Montrer que* f *admet un développement en série entière de* f *en* 0 *; le déterminer.*

PSI

Exercice 4.211 ★ **RMS 2014 1288 Écoles des Mines PSI**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et expliciter* f'. *En déduire* $f(x)$.

PSI

Exercice 4.212 ★ **CCP PSI 2015**

Soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

sRMS 2015 1004 TPE PSI

1. *Justifier la définition de* I_n. *Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n+1}. *En déduire la valeur de* I_n .

sRMS 2012 1334 CCP PC

2. *Donner une expression simplifiée de* $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

PC

Exercice 4.213 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit $\mathrm{G} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que* G *est bien définie et que* G *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$.

PC

Exercice 4.214 ★ **CCP PC 2011**

Pour $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

1. *Montrer que* F *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(-x) = 1$. *Calculer* $\mathrm{F}(k)$ *pour* $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

sRMS 2012 1335 CCP PC

2. *Déterminer les limites de* F *en* $-\infty$ *et* $+\infty$. *Donner un équivalent de* $\mathrm{F}(x) - 1$ *quand* x *tend vers* $+\infty$.
3. *Montrer que* F *est convexe sur* $\mathbb{R}_-$ *et concave sur* $\mathbb{R}_+$.

PSI

Exercice 4.215 ★ **ENSAM PSI 2011 , CCP PC 2006 , Mines Ponts PC 2014**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition* D *de* F.

sRMS 2011 1154 CCP PC

2. *Montrer que* F *est* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Exprimer* F *sur* D.
4. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

PC

Exercice 4.216 ★ **CCP PC 2006 , TPE EIVP PC 2013 , ENSAM PSI 2014**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* F.
2. *Étudier la dérivabilité de* F. *Donner une expression de* F'.
3. *Donner une expression simple de* F.

Exercice 4.217 ★ **Centrale PC 2015**

Soient $\varphi : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \int_0^n \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* φ *se prolonge en une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f_n *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *et solution d'une équation différentielle du deuxième ordre. En déduire une expression de* f_n.
3. *Soient* $h \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $a < b$, *et* $\mathrm{I} : c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_a^{+\infty} h(t)\sin(ct)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que* $\mathrm{I}(c) \to 0$ *quand* $c \to +\infty$.
4. *Montrer que* $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *a une limite* ℓ *quand* $x \to +\infty$.
5. *En déduire une expression de* $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.218 ★ **TPE PSI 2015**

Montrer après avoir justifié l'existence des intégrales que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\arctan\frac{x}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.219 ★ **CCP PC 2012**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $]-1, +\infty[$.
2. *Calculer* $f(1)$. *Montrer que* $\forall x > -1, \quad (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$. *En déduire un équivalent de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* $(-1)^+$.
3. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]-1, +\infty[$.
4. *Justifier que* $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$. *En déduire* $f'(0)$.

Exercice 4.220 ★ **CCP PC 2012**

Mots-clés : fonction de Bessel

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$. *Calculer* $f(0)$.
2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* f *est solution de* $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 4.221 ★ **CCP PC 2011**

Pour $x \in]-1, 1[$, *soit* $f_x : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

1. *Soit* $x \in]-1, 1[$. *Montrer que* f_x *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$. *Calculer* $f_x(0)$ *et* $f_x(\pi)$.
2. *Montrer que* f_x *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f_x'(\theta) = \frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$. *En déduire la valeur de* $f_x(\theta)$ *pour* $x \in]-1, 1[$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$.
3. *Soit* $x \in]-1, 1[$. *Calculer* $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,\mathrm{d}\theta$.
4. *En déduire, pour* $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, *la valeur de* $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 4.222 ★ **ENSEA PSI 2010**

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$, puis comparer $f(x)$ à $\ln(x)$ quand x tend vers l'infini.

sRMS 2014 779 Mines Ponts PC

Exercice 4.223 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

sRMS 2014 684 Mines Ponts PSI

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Sur quels intervalles f est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 4.224 ★ **IIE PSI 2010**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathrm{I}_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$.

1. Quel est le domaine de définition de I_n ? Calculer I_1.
2. Montrer que I_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\mathrm{I}_n'(x)$.
3. Trouver une relation entre $\mathrm{I}_n'(x)$ et $\mathrm{I}_{n+1}(x)$. En déduire une expression simple de I_n.

sRMS 2014 1278 CCP PSI

Exercice 4.225 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $\alpha > 1$ et $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Étudier l'intégrabilité de f sur son domaine de définition.

Exercice 4.226 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3+x^3}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

sRMS 2014 1022 Centrale PC

Exercice 4.227 ★ **TPE PC 2006**

On pose $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. La fonction F est-elle continue ? Dérivable ?
3. Montrer que la limite de F en 0^+ vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

sRMS 2015 754 Mines Ponts PC

Exercice 4.228 ★ **TPE PC 2006**

Existence et continuité de F définie par $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.229 ★ **X ESPCI PC 2013**

Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^x (1+\sin(2t))^{1/t}\,\mathrm{d}t\right)$.

sRMS 2014 759 Mines Ponts PC

Exercice 4.230 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \exp(-x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier et représenter f.
2. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4.231 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F. En déduire une expression de F.

Exercice 4.232 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la régularité de f.
3. Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.
4. Représenter le graphe de f.

Exercice 4.233 ★ **CCP PSI 2014**

1. Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de φ.
   (b) Montrer que φ est l'unique fonction vérifiant $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
2. Soit $\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
   (a) Justifier l'existence de S.
   (b) Calculer $\varphi(\frac{1}{2})$.
   (c) En calculant $\varphi(n+\frac{1}{2})$, déterminer S.

Exercice 4.234 ★ **Centrale PC 2014**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue .
3. Si $x \in \mathrm{D}$, montrer que $1-x \in \mathrm{D}$ et que $f(1-x) = f(x)$.
4. Donner un équivalent de f aux bornes du domaine de définition.

Exercice 4.235 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F .
2. Exprimer $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \mathrm{D}$.

Exercice 4.236 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $\mathrm{A} : (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x\sin^2\theta + y\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1. Justifier la définition de A.
2. Montrer, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\quad \mathrm{A}(x,y) = \mathrm{A}((\frac{x+y}{2})^2, xy)$.

Exercice 4.237 ★ **RMS Mines Ponts PC 2013 , 2014 778 Mines Ponts PC**

Existence et calcul de $\mathrm{F}(t)=\int_0^{+\infty}\exp(-(x^2+\frac{t^2}{x^2}))\mathrm{d}x$.

Exercice 4.238 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* F*. La fonction* F *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur son domaine de définition ?*
2. *En déduire la valeur de* $\mathrm{F}(x)$*, sachant que* $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.239 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $\mathrm{F}\colon x\mapsto\int_0^{\pi}\sqrt{x+\cos t}\,\mathrm{d}t$*. Déterminer le domaine de définition de* F*. Étudier la continuité et la dérivabilité de* F.

Exercice 4.240 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $\mathrm{F}\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* F *est définie et de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Déterminer un équivalent de* F *en* 0^+ *et en* $+\infty$.

Exercice 4.241 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{sh}(x\sqrt{t})e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par* f.
3. *Donner une expression de* f.

Exercice 4.242 ★ **Mines Ponts PC 2015 , Centrale PSI 2015**

Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition* D *de* f.
2. *Montrer, pour* $x\in\mathrm{D}$*, que* $f(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.243 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n\colon x\mapsto\int_0^1 t^{nx}|\ln t|^n\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer les* $x\in\mathbb{R}$ *tels que* $\mathrm{I}_n(x)$ *existe pour tout* n.
2. *Étudier la continuité de* I_n *sur son domaine de définition.*

Exercice 4.244 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $h\colon(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,y-\cos x}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* h.
2. *Soit* $x\in\mathbb{R}$*. Domaine de définition et calcul de* $g\colon y\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)\mathrm{d}y$ *?*
   Il faut ôter le « Soit $x\in\mathbb{R}$ *», et étudier* $g\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)\mathrm{d}y$.
3. *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$*. On suppose que* $t\mapsto e^{-t}f(t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$*. Montrer que* $t\mapsto h(x,t)f(t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.245 ★ **Centrale PC 2015**

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *avec* $0<a<b$ *et* $\mathrm{F}\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* F *est définie et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Vérifier qu'il existe* $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$ *tel que* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\ln(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2})+\mathrm{C}$.
3. *Prouver que* $\mathrm{F}(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}h(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$ *où* h *est une fonction à préciser. En déduire* C.