Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.0.1 Normes

Exercice 5.1 ★★ ***Une norme intégrale***

Sur $E = \mathbb{R}^2$, *montrer que l'application définie par*

$$\mathcal{N}\big((x,y)\big) = \int_0^1 |x + ty| \, dt$$

est une norme.

Exercice 5.2 ★ ***Norme sup sur l'espace des suites bornées d'un*** $\mathbb{K}$***-espace vectoriel normé***

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* $\mathscr{B} = \{(u_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\}$. *Pour tout* $(u_n) \in \mathscr{B}$, *on pose* $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$. *Montrer que* $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$ *est une* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

Exercice 5.3 ★ ***Normes sur*** $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On pose*

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|, \ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} |a_{i,j}|$$

Montrer que $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ *et* $\|\,.\,\|_\infty$ *définissent des normes sur* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 5.4 ★

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* $f \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme de* E. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* f *pour que l'application*

$$\mathcal{N}(.) : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x)\| \end{cases}$$

définisse une norme sur E.

Exercice 5.5 ★

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* d *la distance associée à cette norme. Montrer que :*

1. $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,y) = d(x+z, y+z)$;
2. $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$.

Exercice 5.6 ★ ***Norme euclidienne***

Si $(E, (.\mid.))$ *est un espace préhilbertien et* $\|.\|$ *la norme euclidienne, montrer que pour tout vecteur* $x \in E$, $\|x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \big|(x \mid y)\big|$

Exercice 5.7 ★ ***Critère d'égalité de deux normes***

Soient N_1, N_2 *deux normes sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E.

1. *On note* $B_1 = \{x \in E \mid N_1(x) \leqslant 1\}$ *et* $B_2 = \{x \in E \mid N_2(x) \leqslant 1\}$. *Montrer*
$$B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$$
2. *Même question avec les boules unitées ouvertes.*

Exercice 5.8 ★ ***Boules ouvertes disjointes***

Montrer que si $r + r' \leqslant d(a, a')$, *alors* $B(a,r) \cap B(a', r') = \varnothing$.

Exercice 5.9 ★ ***Boule unitée pour différentes normes***

Dessiner les boules ouvertes $B(0,1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *pour les trois normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$.

Exercice 5.10 ★

Sur l'espace $E = \mathscr{C}([0,1])$, *on considère les deux normes* $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_1$.

1. *Que représente la boule ouverte* $B_\infty = B(0_E, 1)$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$?
2. *Montrer que La boule ouverte* $B_1 = B(0_E, 1)$ *pour la norme* $\|.\|_1$ *contient* B_∞.
3. B_1 *est-elle bornée dans* $(E, \|.\|_\infty)$?

Exercice 5.11 ★

Montrer que dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|.\|)$:

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \mathrm{B}(y,r) = \mathrm{B}(x+y,r).$$

Exercice 5.12 ★ **Identité du parallélogramme**

1. *Soit $(\mathrm{E}, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien et soit $\|.\|$ sa norme associée. Prouver l'identité du parallélogramme :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

2. *Montrer que l'application $\mathcal{N}(.) : (x,y) \mapsto |x| + 2|y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Cette norme dérive-t-elle d'un produit scalaire ?*

Exercice 5.13 ★

Sur l'espace des polynômes à coefficients réels, $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on note $\|\mathrm{P}\| = \displaystyle\int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. *Vérifier que $\|.\|$ définit une norme sur E.*
2. *On considère la partie $\mathrm{A} = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{Q}(1) = 0\}$. Montrer que A est un hyperplan de E.*
3. *Calculer $d(\mathrm{P},\mathrm{A})$ pour $\mathrm{P} = 1_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$.*

Exercice 5.14 ★★★

Soit E une algèbre de dimension finie. On veut montrer qu'on peut construire sur E une norme d'algèbre.
Soit $\|.\|$ une norme sur E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}(x) = \sup_{a \in \mathrm{E}, \|a\|=1} \|ax\|.$$

1. *Justifier que N est bien définie.*
2. *Prouver que N est une norme d'algèbre.*

Exercice 5.15 ★

Sur $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on définit les normes :

$$\forall \mathrm{P} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{P}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|, \quad \|\mathrm{P}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad \|\mathrm{P}\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}\|_2 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1.$$
2. *Trouver une suite qui est bornée pour la norme $\|.\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|.\|_1$ ou la norme $\|.\|_2$.*

Exercice 5.16 ★

Sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{K})$, on définit les normes :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$
2. *Trouver une suite qui converge vers 0_E pour la norme $\|.\|_1$ ou la norme $\|.\|_2$ mais pas pour la norme $\|.\|_\infty$.*

Exercice 5.17 ★★★

Sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{K})$, on pose :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\| = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t))|^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

1. *Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur E.*
2. *Montrer que :*
$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|.$$
3. *On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$
   (a) *Calculer $\|f_n\|$.*
   (b) *Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$*
   (c) *Et que ce n'est pas le cas pour la norme $\|.\|$.*

5.0.2 Norme uniforme

Exercice 5.18 ★★★ **Centrale MP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\,\|$ la norme uniforme sur $[-1,1]$.

1. *Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :*
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
2. *Soit P unitaire de degré n. Montrer*
$$\|\mathrm{P}\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$
On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos(k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

3. *Cas d'égalité. Montrer*

exo_union_intersection_ouverts_fermes

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \iff P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Exercice 5.19 ★★★ **ENTPE**

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs à* N *convergeant simplement vers une fonction* f *sur* $\mathbb{R}$ *alors* f *est une fonction polynomiale et la convergence est uniforme sur tout segment de* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.20 ★★★ **Théorème de Weierstrass**

Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \{0, \dots, n\}$, *on pose*

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. *Calculer*

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x).$$

2. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $x \in [0,1]$. *On forme*

$$A = \{k \in [\![0,n]\!] : |k/n - x| \geqslant \alpha\} \quad \text{et} \quad B = \{k \in [\![0,n]\!] : |k/n - x| < \alpha\}.$$

Montrer que

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue. On pose*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Montrer que (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

5.0.3 Ouverts et fermés

Exercice 5.21 ★ **Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées sont fermées...**

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé.*

1. *Montrer qu'une boule ouverte de* E *est un ouvert de* E.
2. *Montrer qu'une boule fermée de* E *est un fermé de* E.
3. *Montrer qu'une sphère de* E *est un fermé de* E.

Exercice 5.22 ★ **Une partie d'un evn est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points**

Soit A *une partie d'un evn* $(E, \|.\|)$. *Montrer que* A *est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points.*

Exercice 5.23 ★ **Réunion et intersections d'ouverts, de fermés**

On considère un evn $(E, \|.\|)$.

1. (a) *Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte ;*
   (b) *Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte ;*
   (c) *En considérant la famille* $\left(B(0, \frac{n+1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *montrer qu'une intersection infinie d'ensembles ouverts n'est pas forcément ouverte ;*
2. (a) *Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est fermée ;*
   (b) *Montrer qu'une union finie de fermée est fermée ;*
   (c) *En considérant la famille* $\left(\overline{B}(0, \frac{n}{n+1})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *montrer qu'une union infinie d'ensembles fermés n'est pas forcément fermée.*

Exercice 5.24 ★

Soit A *une partie ouverte d'un evn* $(E, \|.\|)$ *et* $B \subset E$.

1. *Montrer que* $A + B$ *est ouverte.*
2. *Qu'en est-il si* A *est fermé ? Si* A *et* B *sont fermés ?*

Exercice 5.25 ★ **Tout fermé est une intersection décroissante d'ouverts**

Montrer que tout fermé peut s'écrire comme une intersection décroissante d'ouverts.

Exercice 5.26 ★

Chacune des parties suivantes est-elle fermée ? ouverte ?

1. $A = \mathbb{N}^*$;
2. $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$;
3. $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 5.27 ★★

Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ *des polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *dont le coefficient dominant est égal à* 1 *est une partie fermée de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.28 ★

Chacune des parties suivantes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *est-elle fermée ? bornée ?*

1. *L'ensemble* A *des matrices de trace* 2.
2. *L'ensemble* B *des matrices symétriques.*
3. *L'ensemble* C *des matrices orthogonales (c'est-à-dire des matrices* M *telles que* $M^T M = MM^T = I_n$*).*
4. *L'ensemble* D *des matrices diagonalisables.*

Exercice 5.29 ★★★ **Centrale MP**

On munit le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme*

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$, $C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$ *et* $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 5.30 ★★★ **Mines MP**

Soit E *l'ensemble des suites* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *de* $\mathbb{C}$ *telles que la série* $\sum |a_n|$ *converge. Si* $a=(a_n)_{n\geqslant 0}$ *appartient à* E, *on pose*

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

1. *Montrer que* $\|\|$ *est une norme sur* E.
2. *Soit*
$$F = \left\{ a\in E : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$
L'ensemble F *est-il ouvert ? fermé ? borné ?*

Exercice 5.31 ★★

Soit E *un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie* A *de* E *est un fermé de* E.

Exercice 5.32 ★★

Soit $n>0$ *et* $0\leqslant p\leqslant n$ *deux entiers. Montrer que l'ensemble* F_p *des éléments de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *de rang inférieur ou égal à* p *est un fermé de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.33 ★★

Soit $(E,\|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Montrer que les sous ensembles de* E *à la fois ouvert et fermé sont* E *et* $\varnothing$.

5.0.4 Intérieur, adhérence

Exercice 5.34 ★★

Montrer que $\overline{A} = E\setminus \overbrace{(E\setminus A)}^{\circ}$ *(ou autrement dit que* $\overline{A} = \left(\mathring{\overbrace{A^c}}\right)^c$ *).*

Exercice 5.35 ★ **Propriétés de l'intérieur**

Soient deux parties A *et* B *d'un evn* $(E,\|.\|)$. *Montrer que :*

1. $\mathring{A}\subset A$.
2. $\mathring{A}$ *est une partie ouverte.*
3. $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A.
4. $\mathring{A} = \bigcup_{O\subset A;\,O \text{ ouvert}} O$.
5. A *ouvert* $\Longleftrightarrow A=\mathring{A}$
6. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
7. $A\subset B \Longrightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$.
8. $\overbrace{A\cap B}^{\circ} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$.
9. $\mathring{A}\cup\mathring{B} \subset \overbrace{A\cup B}^{\circ}$ *(l'autre inclusion est fausse en général).*
10. $\mathring{A}^c = \overline{A}^c$.

Exercice 5.36 ★ **Propriétés de l'adhérence**

Soient deux parties A *et* B *d'un evn* $(E,\|.\|)$ *et un point* $a\in E$.

1. $A\subset\overline{A}$.
2. $\overline{A}$ *est un fermé.*
3. $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A.
4. $\overline{A} = \bigcap_{A\subset F;\,F \text{ fermé}} F$.
5. A *est fermé* $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$.
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
7. $A\subset B \Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.
8. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.
9. $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$ *(l'autre inclusion est fausse en général).*
10. $\overline{A^c} = \mathring{A}^{\,c}$.

Exercice 5.37 ★ **Adhérence d'un** Vect

Soit $(E,\|.\|)$ *un evn.*

1. *Montrer que pour toute partie* A *de* E *:*
$$\mathrm{Vect}(A)\subset\mathrm{Vect}(\overline{A})\subset\overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$
2. *En déduire que pour tout sev* F *de* E, $\overline{F}$ *est un sev de* E.

Exercice 5.38 ★ **Diamètre d'une partie bornée**

Si $A\subset E$ *est une partie non-vide et bornée d'un evn, on définit son* diamètre *par :*

$$\delta(A) = \sup\{\|x-y\|;\ (x,y)\in A^2\}$$

On considère deux parties bornées non-vides A *et* B *de* E.

1. *Vérifier que* $\delta(A)$ *est bien défini.*
2. *Si* $A\subset B$, *montrer que* $\delta(A)\leqslant\delta(B)$.
3. *Si* $A\cap B\neq\varnothing$, *montrer que* $\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+\delta(B)$.
4. *Montrer qu'il existe deux suites* $(a_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *telles que*
$$\|a_n-b_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta(A)$$
5. *Montrer que* $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

Exercice 5.39 ★

Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.

1. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$;
2. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1\}$;
3. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\leqslant 1\}$;
4. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\}$;
5. $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q}\}$;
6. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$.

Exercice 5.40 ★

On définit un sous-ensemble A *de* $\mathbb{R}^2$ *en posant*

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 2\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. *L'ensemble* A *est-il connexe ?*

Exercice 5.41 ★

Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < x^3+y^3\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

7:31 **Exercice 5.42** ★ ***Le graphe sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est fermé***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que l'ensemble* $G = \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}\}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^2$ *(muni d'une norme usuelle).*

5:41 **Exercice 5.43** ★

On considère l'evn $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur le segment* $[0,1]$ *et les deux normes*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

1. *On note* $A = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ *l'ensemble des fonctions de moyenne nulle. La partie* A *est-elle fermée pour* $\|.\|_1$ *? Pour* $\|.\|_\infty$ *?*
2. *La partie* $B = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ *est-elle fermée dans* $(E, \|.\|_\infty)$ *? Dans* $(E, \|.\|_1)$ *?*
3. *On note* $C = \{f \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(2^{-n}) \geqslant 0\}$. *la partie* C *est-elle fermée pour* $\|.\|_\infty$ *?*

Exercice 5.44 ★

Soit $(E, \|.\|$ *un evn.*

1. *Soit* F *un sev de* E *d'intérieur non vide. Montrer que* $F = E$.
2. *On prend* $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme infinie* $\|.\|_\infty$. *On prend pour* $F = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. *Montrer que* $\overset{\circ}{F} = \varnothing$.
3. *Reprendre la question précédente avec* F *l'ensemble des application polynomiales sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles, puis avec* F *l'ensemble des applications continues et monotones sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles.*

5.0.5 Limite et continuité en un point

7:02 **Exercice 5.45** ★

Existence de limite en $(0,0)$ *des fonctions*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$
4. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{ch}(xy) - \cos(xy)}{x^2y^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$
6. $f(x,y) = xy\sin\frac{1}{x}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$
8. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercice 5.46 ★

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ *des fonctions* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *données par :*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{xy}$
5. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y}$
6. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$.

Exercice 5.47 ★★

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

5.0.6 Continuité sur une partie

Exercice 5.48 ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.49 ★

Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.50 ★

Montrer que l'application

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 5.51 ★

Montrer que l'application

$$f:(x,y)\mapsto\left(\sqrt{x^2+y^2},2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_-\times\{0\})$.

Exercice 5.52 ★

Soit $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. Pour tout* $x\in\mathrm{E}$*, on pose*

$$g(x)=\frac{x}{1+\|x\|}.$$

1. *Montrer que* g *définit une bijection de* E *sur la boule ouverte* $\mathrm{B}(0,1)$ *de* E.
2. *Prouver que* g *et* g^{-1} *sont continues.*

Exercice 5.53 ★ **Oral ENSAM PT**

Soient $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et*

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{x}\int_x^{xy}f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right..$$

Montrer que g *est prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.54 ★

Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *continues vérifiant :*

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x^2)=f(x)$.
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x+1)=f(x)$.

Exercice 5.55 ★ **CCP 2007**

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ continues *vérifiant*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Exercice 5.56 ★

On note $\mathrm{E}=\{f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\mid\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ f\big(\frac{x+y}{2}\big)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\}$

1. *Vérifier que* E *est un sev de* $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *qui contient les fonctions affines.*
2. *Soit* $f\in\mathrm{E}$*. On définit la fonction affine* g *qui coïncide avec* f *en* 0 *et* 1 *et on pose* $h=f-g$*. Montrer que* $h=0$.
3. *Conclure.*

Exercice 5.57 ★

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *une fonction continue.*

1. *Montrer que* $\mathrm{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>f(x)\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* $\mathrm{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x)=f(y)\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.58 ★

Soit $f:\mathrm{E}\mapsto\mathrm{F}$ *une application continue. On définit son graphe :*

$$\mathrm{G}=\{(x,y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F}\mid y=f(x)\}$$

Montrer que G *est un fermé de* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$.

Exercice 5.59 ★

Dans l'evn $\mathrm{E}=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$*, montrer que les parties suivantes sont fermées.*

1. $\mathrm{A}=\{f\in\mathrm{E}\mid\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\}$
2. $\mathrm{B}=\{f\in\mathrm{E}\mid\forall n\in\mathbb{N},f(2^{-n})\geqslant 0\}$

Exercice 5.60 ★ **Caractérisation topologique de la continuité**

Soit $f:\mathrm{E}\mapsto\mathrm{E}'$

1. *Si l'image réciproque de tout ouvert de* E' *est ouvert dans* E*, montrer que* f *est continue sur* E.
2. *Soit* $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}'$*, vérifier que* $\mathrm{E}\setminus f^{-1}(\mathrm{A})=f^{-1}(\mathrm{E}'\setminus\mathrm{A})$.
3. *Montrer que si l'image réciproque de tout fermé de* E' *par* f *est un fermé de* E*, alors* f *est continue sur* E.

Exercice 5.61 ★ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

On considère l'espace des matrices $\mathrm{E}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, (*$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) muni de la norme* $\|\mathrm{A}\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$.

1. *Montrer que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de* E.
2. *Soit* $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer qu'il existe* $r>0$ *tel que :*

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad 0<|\lambda|<r\implies\mathrm{A}+\lambda\mathrm{I}_n\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

3. *En déduire que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* E.

Exercice 5.62 ★

Soient E *et* F *deux evn. Soient* E_1, E_2 *deux fermés de* E *tels que* $\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2=\mathrm{E}$ *et soit* $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ *une application telle que* $f_{|\mathrm{E}_1}$ *et* $f_{|\mathrm{E}_2}$ *sont continues. Montrer que* f *est continue.*

Exercice 5.63 ★

Soit $(\mathrm{E},\langle.|.\rangle)$ *un espace euclidien. Montrer que l'ensemble* $\mathrm{A}=\big\{(x,y)\in\mathrm{E}^2\mid(x,y)\text{ est libre}\big\}$ *est un ouvert de* E^2.

Exercice 5.64 ★

Soit $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn et soit* $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E.

1. *Montrer que* u *est continue si et seulement si* u *est bornée sur la sphère unité* $\mathrm{S}(0,1)=\{x\in\mathrm{E}\mid\|x\|=1\}$.
2. *En déduire que* u *est continue si et seulement si la partie*

$$\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{E}\mid\|u(x)\|=1\}$$

est fermée.

Exercice 5.65 ★★★ **X 1994**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f, g : [a, b] \to [a, b]$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On note f^n et g^n leurs n-ième itérées.

1. *Montrer que si $f > g$ alors $f^n > g^n$ et même qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(x) \geqslant n\mathrm{K} + g^n(x)$.*
2. *Que dire de l'équation $f(x) = g(x)$?*

5.0.7 Applications lipschitziennes

Exercice 5.66 ★

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.67 ★

Soient f, g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont bornées et lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ alors fg est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.68 ★ **Point fixe et application contractante**

Soient $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application k-lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $l \in \mathrm{E}$ tel que $f(l) = l$ et soit (u_n) une suite de vecteurs de E définie par $u_0 \in \mathrm{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - l\| \leqslant k^n \|u_0 - l\|$.*
2. *Que dire si f est contractante, c'est-à-dire si $k < 1$?*

Exercice 5.69 ★★★ **X PC 2012**

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa norme euclidienne canonique et on pose $\mathrm{K} = [a, b]^3$. Soit $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{K}^2, \qquad (x \neq y) \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 5.70 ★

1. *Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est une fonction telle que f' est bornée sur I, montrer que f est lipschitzienne sur I.*
2. *La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ est-elle lipschitzienne ?*
3. *La fonction $f : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$ est-elle lipschitzienne ?*

Exercice 5.71 ★

Soient deux evn E et F et une application lipschitzienne $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $\forall x \in \mathrm{E}$,

$$\|f(x)\| \leqslant a\|x\| + b$$

Exercice 5.72 ★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et soit

$$\mathrm{E} = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est lipschitzienne sur } [a, b] \quad \text{et} \quad f(a) = 0 \right\}.$$

On pose pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\|f\| = \inf\left\{ k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in [a, b], \quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant k\left|y - x\right| \right\}.$$

Montrer que $\|.\|$ définie une norme sur E.

Exercice 5.73 ★ **Oral CCP MP**

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. *Soient f une application de E dans F et a un point de E.*
   On considère les propositions suivantes :

   P1. *f est continue en a.*

   P2. *Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.*

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.*
   Démontrer que si, pour tout $x \in \mathrm{A}$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 5.74 ★★ **Distance d'un point à une partie**

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|.\|)$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose :

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a).$$

1. *Montrer que l'application $x \mapsto d(x, \mathrm{A})$ est bien définie et lipschitzienne sur E.*
2. *Montrer que $d(x, \mathrm{A}) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{\mathrm{A}}$.*

Exercice 5.75 ★★★ **Centrale PC 2010**

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues. On munit E de la norme donnée par

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la fonction φ sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application φ est une application continue de $(\mathrm{E}, \|.\|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.76 ★★★ **ENS MP 2007**

Soit E *l'ensemble des fonctions définies et continues sur* $[0,1]$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $f \in E$ *on définit la fonction* $T(f)$ *sur* $[0,1]$ *par*

$$\forall x \in [0,1], \qquad T(f)(x) = \inf_{y \in [0,1]} \left(f(y) + (x-y)^2\right).$$

1. *Justifier que* $T(f)$ *est bien définie. Montrer que si* $f \in E$ *alors* $T(f)$ *est lipschitzienne.*
2. *Trouver toutes les fonctions telles que* $T(f) = f$.
3. *Soit* $f \in E$. *Montrer que* $\left(T^n(f)\right)$ *converge pour* $\|.\|_\infty$.

Exercice 5.77 ★★★ **X PC 2005**

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et soit* A *une partie non vide de* E. *On se donne une fonction* $f : A \to \mathbb{R}$ k*-lipschitzienne. Montrer que la fonction*

$$\varphi : \begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \inf_{y \in A}\left(f(y) + k\|x-y\|\right) \end{aligned}$$

est un prolongement k*-lipschitzien de* f *sur* E.

Exercice 5.78 ★★★ **Centrale MP**

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé. On pose, pour tout* $x \in E$:

$$f(x) = \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

Montrer que f *est* 2*-lipschitzienne.*

Exercice 5.79 ★★★ **ENS PC 2014**

Soient $(E, \|\|)$ *un espace vectoriel normé et* Y *une partie non vide de* E. *Si* $x \in E$, *on pose* $d_Y(x) = \inf\{\|x-y\| \ ; \ y \in Y\}$.

1. *Montrer que* d_Y *est* 1*-lipschitzienne.*
2. *Soient* A *et* B *deux parties non vides de* E. *Donne une condition nécessaire et suffisante pour que* $d_A = d_B$.
3. *On note*

$$\rho(A,B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)| \ ; \ y \in E\},$$

valant éventuellement $+\infty$. *Montrer que*

$$\rho(A,B) = \max\left(\sup_{x \in A} d_B(x), \sup_{x \in B} d_A(x)\right).$$

5.0.8 Applications linéaires continues

Exercice 5.80 ★ **Norme subordonnée à une application linéaire**

Soient deux evn $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *et* $u \in \mathfrak{L}_c(E,F)$ *une application linéaire continue. On définit la norme de l'application linéaire* u :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F$$

1. *Montrer que* $|||.|||$ *est une norme sur l'espace* $\mathfrak{L}_c(E,F)$.
2. *Montrer que* $|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$.
3. *Montrer que* $|||u||| = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$.
4. *Montrer que :*
   (a) *Si* $k \geqslant 0$ *est une constante telle que* $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$, *alors* $|||u||| \leqslant k$;
   (b) $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant |||u||| \, \|x\|_E$;
   (c) $|||u||| = \min\{k \geqslant 0 \mid \forall x \in E, \ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$.
   En d'autres termes, $|||u|||$ *est* la plus petite constante k *vérifiant* $\|u(x)\| \leqslant k\|x\|$ *pour tout* $x \in E$.
5. *Soient trois evn* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *et* $(G, \|.\|_G)$ *et deux applications linéaires continues*

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Alors la composée $v \circ u$ *est également continue,* $v \circ u \in \mathfrak{L}_c(E,G)$ *et*

$$\boxed{|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \ |||u|||}$$

Exercice 5.81 ★

Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, *on considère les normes définies par* $\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{d} |a_n|$ *et* $\|P\|_\infty = \max_{0 \leqslant n \leqslant d} |a_n|$ où $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$. *On considère les applications linéaires :*

1. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$
2. $v : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right.$
3. $w : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array} \right.$

Étudier la continuité des applications u, v *et* w *pour chacune des normes et le cas échéant, calculer* $|||u|||$ $|||v|||$ *et* $|||w|||$.

Exercice 5.82 ★

On note $E = \mathscr{C}([0,1])$, *muni des normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$. *Étudier la continuité et calculer éventuellement la norme des applications linéaires :*

1. $\mathrm{I} : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$
2. $\delta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{cases}$

Exercice 5.83 ★

On considère les evn $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et* $F = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. *Soit* T *l'application définie par* $\forall f \in E,\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que* T *est continue et calculer sa norme subordonnée.*

Exercice 5.84 ★★★

Soit $(E, \|.\|)$ *un evn de dimension finie et soit* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Montrer que les sev $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ *sont supplémentaires.*

Exercice 5.85 ★★★

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et soient* p, q *deux projecteurs de* E. *On suppose que*

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0 \implies \left\|p(x) - q(x)\right\| < \|x\|.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(q)$.

Exercice 5.86 ★

On considère $E = \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *définie pour tout* $f \in E$ *par* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|f(t)\right|$. *On considère*

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 \dfrac{t f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

1. *Montrer que* φ *est bien définie et linéaire.*
2. *Montrer que* φ *est continue.*

Exercice 5.87 ★

1. *Montrer que la sphère unité* S *de* $\mathbb{R}^n$ *pour la norme* $\|.\|_2$ *est un fermé borné de* $\mathbb{R}^n$.
2. *On assimile tout vecteur* $x \in \mathbb{R}^n$ *au vecteur* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de ses coordonnées dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Pour* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on introduit*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & X^{\mathrm{T}}AX \end{cases}.$$

   (a) *Montrer que* φ *est continue.*

   (b) *En déduire qu'il existe deux réels* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall X \in S, \quad a \leqslant \varphi(X) \leqslant b \quad \text{et} \quad \exists (X_1, X_2) \in S^2 : \quad \varphi(X_1) = a \quad \text{et} \quad \varphi(X_2) = b.$$

Exercice 5.88 ★

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et soit* $u \in \mathfrak{L}(E)$.

1. *Montrer que* $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ *est un fermé borné de* E.
2. *Montrer qu'il existe un vecteur* $x_0 \in E$ *unitaire tel que* $\|u(x_0)\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|u(x)\|\}$.

Exercice 5.89 ★★

Soient $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et soit* $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ *une application linéaire de* E *dans* F. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

1. (a) *u est continue sur* E ;

   (b) *u est continue au point* 0_E ;

   (c) *u est bornée sur la boule fermée* $\overline{B}(0_E, 1)$;

   (d) *il existe une constante* $k > 0$ *telle que* $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$;

   (e) *u est une application lipschitzienne.*
2. *Exemples :*

   (a) *L'application*

$$u : \begin{cases} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & u(\varphi) = \varphi(0) \end{cases}$$

   est-elle lipschitzienne quand $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *est successivement muni des normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$?

   (b) *Montrer que l'application*

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k & \longmapsto & a_n \end{cases}$$

   est lipschitzienne sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.90 ★

Soient $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés.*

1. *Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* F *est un espace vectoriel qu'on notera* $\mathscr{L}_c(E, F)$.
2. *Montrer que l'on définit une norme sur* $\mathscr{L}_c(E, F)$ *en posant :*

$$\forall f \in \mathscr{L}_c(E,F), \quad \left\|f\right\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

3. *Vérifier que l'on a :*

$$\forall f \in \mathscr{L}_c(E,F), \quad \left\|f\right\| = \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

4. *Montrer que si* $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ *alors* $\|.\|$ *est une norme d'algèbre, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall (f,g)\in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})^2,\quad \|f\circ g\|\leqslant \|f\|\,\|g\|.$$

5. *Déduire des questions précédentes des exemples de norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.91 ★ **CCP 2009**

Soit A *une matrice à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *vérifiant*

$$4\mathrm{A}^3+2\mathrm{A}^2+\mathrm{A}=0.$$

1. *Soit* $\mathrm{P}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que l'application :*

$$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{PMP}^{-1}\end{array}\right.$$

est continue.

2. *Montrer que :*

$$\forall \lambda\in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\quad |\lambda|\leqslant \frac{1}{2}.$$

3. *On admet dans la suite de l'exercice que* A *est diagonalisable.*
   (a) *Montrer que* $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite.*
   (b) *Montrer qu'une suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire.*
   (c) *Que peut-on en déduire ?*
   (d) *Conclusion pour* A *?*

Exercice 5.92 ★★

On note $\mathrm{E}=\ell^\infty(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme* N_∞. *Pour* $u=(u_n)\in \ell^\infty(\mathbb{R})$ *on pose* $\mathrm{T}(u)$ *et* $\Delta(u)$ *les suites définies par*

$$\mathrm{T}(u)_n=u_{n+1}\quad\text{et}\quad \Delta(u)_n=u_{n+1}-u_n.$$

Montrer que les applications T *et* Δ *sont des endomorphismes continus de* E.

5.0.9 Suites vectorielles

Exercice 5.93 ★★

Soient deux suites vectorielles $(u_n)\in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)\in\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. *Montrer que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies \|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\sim} \|v_n\|$$

Exercice 5.94 ★★

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn de dimension finie et* $(x_n)\in\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *qui converge vers* $a\in\mathrm{E}$. *Montrer que la suite* (u_n) *de terme général*

$$u_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$$

converge aussi vers a.

Exercice 5.95 ★

Étudier la suite $((a_n,b_n))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *définie par* $(a_0,b_0)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+b_n^2}\quad\text{et}\quad b_{n+1}=\frac{b_n}{a_n^2+b_n^2}.$$

Exercice 5.96 ★

On considère la suite $(\mathrm{Z}_n)=((x_n,y_n,z_n))$ *de* $\mathbb{R}^3$ *définie par* $\mathrm{Z}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ *et pour tout* n *par la relation de récurrence :*

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} & =\frac{1}{3}x_n-\frac{1}{6}z_n+\frac{1}{2}\\ y_{n+1} & =\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{3}z_n\\ z_{n+1} & =\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+\frac{1}{6}z_n-\frac{7}{6}\end{array}\right.$$

1. *Montrer que la suite* (Z_n) *vérifie une relation de récurrence de la forme* $\mathrm{Z}_{n+1}=\mathrm{AZ}_n+\mathrm{B}$.
2. *Montrer que pour tout vecteur* $\mathrm{X}\in\mathbb{R}^3$, *on a :* $\|\mathrm{AX}\|_\infty\leqslant k\|\mathrm{X}\|_\infty$ *où* $k\in\,]0,1[$.
3. *Montrer que l'équation* $\mathrm{X}=\mathrm{AX}+\mathrm{B}$ *admet une unique solution* L *dans* $\mathbb{R}^3$
4. *Déduire de ce qui précède et d'une récurrence une inégalité concernant* $\|\mathrm{Z}_n-\mathrm{L}\|_\infty$, $\|\mathrm{Z}_0-\mathrm{L}\|_\infty$, n *et* k. *Conclure quand à la convergence de* (Z_n).

Exercice 5.97 ★ **Oral CCP MP**

E *et* F *désignent deux espaces vectoriels normés.*

1. *Soient* f *une application de* E *dans* F *et* a *un point de* E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f *est continue en* a.

   P2. *Pour toute suite* (x_n) *d'éléments de* E *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit* A *une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé* E, *et soient* f *et* g *deux applications continues de* E *dans* F, F *désignant un espace vectoriel normé.*
   Démontrer que si, pour tout $x\in\mathrm{A}$, $f(x)=g(x)$, *alors* $f=g$.

Exercice 5.98 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. *Étudier la convergence de* $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.99 ★★ ***CCP 2000, CCP 2005***

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que* M *est trigonalisable.*
2. *Soit* $\mathrm{Sp}(M)$ *l'ensemble des valeurs propres de* M *et* $f(M) = \sup\left\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$. *Prouver l'équivalence suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = 0 \iff f(M) < 1.$$

Exercice 5.100 ★ ***Mines 2005***

Pour tout entiers naturels $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, *on pose :*

$$X_n = \begin{pmatrix} e_n(1) \\ \vdots \\ e_n(p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \forall j \in [\![1, n]\!], \quad e_{n+1}(j) = \frac{1}{p-1} \sum_{i\in[\![1,p]\!], i\neq j} e_n(i).$$

q:1-2

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite*

Exercice 5.101 ★ ***Centrale 2009***

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On définit alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$\begin{cases} X_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}.$$

1. *Calculer* $X_1, X_2, \dots, X_{10}, X_{20}$ *et* X_{50}. *Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*
2. *Montrer que* $I_4 - A$ *est inversible et calculer son inverse* M.
3. *Supposons que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et notons* L *sa limite. Calculer* L *et confronter à la question 1.*
4. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - L$. *Trouver une relation de récurrence entre* Y_{n+1} *et* Y_n. *Déterminer les valeurs propres de* A *et étudier sa diagonalisablilité.*
   Conclure quand à la convergence de (Y_n) *puis de* (X_n).

Exercice 5.102 ★★ ***ENS Lyon 2000***

Soit $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice nilpotente non nulle et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* λ *pour que la suite* $\left((N + \lambda I_n)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5.0.10 Exercice sur les normes matricielles

Exercice 5.103 ★

Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on pose* $\|A\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$.

1. *Montrer que* $\|.\|$ *est une norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Prouver que pour tout* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

Exercice 5.104 ★

On pose

$$N_\infty(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

1. *Calculer* $N_\infty(I_n)$ *et* $N_\infty(H)$.
2. *Montrer que* N_∞ *définit une norme sur* E.
3. *Montrer que* $\forall (A, B) \in E^2$, $N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$.

Exercice 5.105 ★

On définit de même,

$$N_1(A) = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

1. *Calculer* $N_1(I_n)$ *et* $N_1(H)$.
2. *Exprimer* $N_1(A)$ *à l'aide de* N_∞.
3. *En déduire que* N_1 *est une norme sur* E *qui vérifie*

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad N_1(AB) \leqslant N_1(A)N_1(B)$$

Exercice 5.106 ★★★ ***X MP***

Soit n $\mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$. *Existe-t-il une norme* $\|.\|$ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :*

$$\forall (A, P) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}),, \quad \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|.$$

5.0.11 Suites de matrices

Exercice 5.107 ★

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ *tels que* $(AB)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Montrer que* $(BA)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5.108 ★

Soient $A, B, P, Q \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ *telles que*

$$A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \quad \text{et} \quad B^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Q.$$

On suppose que A *et* B *commutent. Montrer qu'il en est de même de* P *et* Q.

Exercice 5.109 ★

Soit $(A_n) \in (GL_m(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ *une suite de matrices inversibles,* A, B $\in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$. *On suppose que* $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$ *et que* $A_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$. *Montrer que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

Exercice 5.110 ★ Les matrices antisymétriques forment une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ *une matrice antisymétrique. On suppose que* $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. *Que dire de* B.

Exercice 5.111 ★

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *A quelle condition sur* A *existe-t-il* $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$?

Exercice 5.112 ★

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après avoir diagonalisé A, *déterminer la limite de* (A^n).

Exercice 5.113 ★ **X 2005**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On pose*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

1. *Donner des exemples de normes sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Majorer* $\|A^k\|_\infty$.
2. *Justifier l'existence de* e^A.
3. *Montrer que* $e^{A^T} = \left(e^A\right)^T$.
4. *Montrer que* $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
5. *Montrer qu'en général* $e^A.e^B \neq e^{A+B}$.
6. *À quelle condition suffisante a-t-on l'égalité ?*

Exercice 5.114 ★★★

Soit (A_n) *une suite convergente d'éléments de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et de limite* A_∞.
Montrer que pour n *assez grand*

$$\mathrm{rg}(A_n) \geqslant \mathrm{rg}(A_\infty).$$

Exercice 5.115 ★★★ **ENS Lyon**

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. *On note* E_q *l'ensemble des* $A \in GL_n(\mathbb{C})$ *telles que*

$$A^q = I_n.$$

1. *Que dire de* $A \in E_q$ *telle que 1 est seule valeur propre de* A ?
2. *Montrer que* I_n *est un point isolé de* E_q.

Exercice 5.116 ★★★ **X PSI**

Soient $n \geqslant 2$ *et* $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice à coefficients strictement positifs vérifiant*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

On note α *le plus petit coefficient de la matrice* A *et, étant donné* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *on note* $\min(X)$ *et* $\max(X)$ *le plus petit et le plus grand coefficient de la colonne* X.

1. *On suppose que les coefficients de* $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *sont tous positifs, établir* $\min(AY) \geqslant \alpha \max(Y)$.
2. *Soit* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $Y = X - \min(X)U$ *avec* U *la colonne de hauteur* n *dont tous les coefficients valent* 1. *Montrer*
$$\min(AX) \geqslant d\max(X) + (1-d)\min(X) \quad \text{puis} \quad \max(AX) \leqslant d\min(X) + (1-d)\max(X).$$
En déduire que les suites $\left(\min(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\max(A^pX)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*
3. *Établir que la suite* $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer le rang de sa limite.*

Exercice 5.117 ★★★ **ENTPE**

Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$. *On suppose que la suite* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* B.
Montrer que B *est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.*

Exercice 5.118 ★★★ **X PC 2014**

Soit

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ *tel que la suite de terme général* $a^n M^n$ *ait une limite non nulle.*

5.0.12 Topologie dans les espaces matriciels

Exercice 5.119 ★

On considère $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}_n[X]$ *munis d'une de leur norme ainsi que l'application*

$$\chi : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{cases}.$$

Montrer que φ *est continue.*

Exercice 5.120 ★

Prouver que $GL_n(\mathbb{R})$ *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.121 ★

On munit le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *d'une norme* $\|.\|$.

1. *Montrer que toute matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est limite d'une suite de matrices inversibles.*

2. *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On admet que si* A *est inversible alors* $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. *Montrer que ce résultat reste vrai si* A *est quelconque.*

Exercice 5.122 ★ ***Théorème de Cayley-Hamilton, preuve topologique***

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que toute matrice triangulaire supérieure de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
2. *En déduire que toute matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
3. *Montrer que si* $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *alors son polynôme caractéristique annule* A.
4. *En déduire que* $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 5.123 ★★

1. *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{N}$ *des matrices nilpotentes de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est un fermé de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *Est-il compact ?*
2. *Montrer que* $\mathcal{N}$ *est d'intérieur vide.*

Exercice 5.124 ★ ***CCP MP***

On munit $E = \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$ *de la norme*

$$\|M\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \left|m_{i,j}\right|.$$

1. *Soient* X *fixé dans* $\mathbb{C}^p$ *et* P *fixé dans* $GL_p(\mathbb{C})$; *montrer que*

$$\varphi(M) = MX \quad \text{et} \quad \psi(M) = P^{-1}MP$$

définissent des applications continues.

2. *Montrer que*

$$f(M, N) = MN$$

définit une application continue.

3. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$ *telle que la suite* $\left(\|A^n\|\right)$ *soit bornée ; montrer que les valeurs propres de* A *sont de module inférieur à 1.*
4. *Soit* $B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$ *telle que la suite* (B^n) *tende vers une matrice* C. *Montrer que* $C^2 = C$; *que conclure à propos du spectre de* C *?*
Montrer que les valeurs propres de B *sont de module au plus égal à 1*

Exercice 5.125 ★★★ ***Centrale MP***

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice à coefficients strictement positifs.*
Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *choisis dans* $\mathbb{R}^n$, *on écrit* $x \leqslant y$ *si* $x_i \leqslant y_i$ *pour tout indice* i.

1. *Écrire un programme* ***Python*** *qui renvoie la valeur propre de module maximal d'une matrice passée en argument.*
2. *Tester ce programme pour dix matrices carrées à coefficients pris aléatoirement dans* $[1, 2[$.

Soit

$$S = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leqslant x \quad \text{et} \quad \lambda x \leqslant Ax\right\}.$$

3. *Soit* $\lambda \in S$. *Montrer qu'il existe* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$0 \leqslant x, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x \leqslant Ax.$$

4. *Soit* λ *une valeur propre complexe. Montrer que* $|\lambda| \in S$.
5. *Montrer que la partie* S *est majorée et expliciter un majorant.*
6. *Montrer que* S *est une partie compacte.*
7. *Soit* $\alpha = \max S$. *Montrer que* α *est une valeur propre de* A *strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.*

5.0.13 Compacts

Exercice 5.126 ★

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie et soit* K *un compact de* E.
Montrez qu'il existe $r > 0$ *tel que* $K \subset \overline{B}(0, r)$.

Exercice 5.127 ★ ***Théorème de Riesz dans un espace préhilbertien***

Soit E *un espace préhilbertien réel de dimension infinie et* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une famille orthonormale :* $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\left(e_i \mid e_j\right) = \delta_{ij}$.

1. *Calculer pour* $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\|e_i - e_j\|$.
2. *En déduire qu'il n'existe aucune suite extraite de* (e_n) *convergente.*
3. *Montrer que la sphère unité d'un espace préhilbertien réel est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.*

Exercice 5.128 ★ ***Le groupe orthogonal est compact***

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) = \left\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^T M = I_n\right\}$ *est compact dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.129 ★★★ ***X 2009***

Montrer qu'on ne peut recouvrir le plan par des cercles de rayon non nul disjoints entre eux.

Exercice 5.130 ★★

Soit E *un espace vectoriel normé de dimension finie.*

1. *Soit* A *une partie non vide de* E. *Montrer que l'application* $d_A : x \mapsto d(x, A)$ *est continue sur* E.
2. *Soit* K *un compact non vide inclus dans un ouvert* U.
Montrer qu'il existe $r > 0$ *tel que*

$$\forall x \in K, B(x, r) \subset U.$$

5.0.14 Convexes

Exercice 5.131 ★ ***Les simplexes sont des convexes***

Montrer que le simplexe de $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_n = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

est un convexe.

Exercice 5.132 ★ ***Les applications linéaires préservent la convexité***

1. *Prouver que l'image directe d'un convexe par une application linéaire est convexe.*
2. *Montrer qu'il en est de même pour l'image réciproque.*

Exercice 5.133 ★ ***Les normes sont des application convexes***

Soit $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Montrer que* $\|.\|$ *est un application convexe, c'est-à-dire que*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left\| tx + (1-t)y \right\| \leqslant t\,\|x\| + (1-t)\,\left\|y\right\|.$$

Exercice 5.134 ★ ***Une intersection quelconque de convexes est convexe***

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn et* $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties convexes de* E*. Montrer que* $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}_i$ *est encore convexe.*

Exercice 5.135 ★★ ***L'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes***

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn et* C *une partie convexe de* E*. Montrer que* $\mathring{\mathrm{C}}$ *et* $\overline{\mathrm{C}}$ *sont convexes.*

Exercice 5.136 ★

Soit A *un convexe d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et soit* $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$*. Montrer que si* $x_1,\dots,x_n \in \mathrm{A}$ *et si* $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ *sont tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *alors* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{A}$.

5.0.15 Normes équivalentes

Exercice 5.137 ★★

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *(où* $n \in \mathbb{N}^*$*) et soit* F *l'ensemble des polynômes de* E *donc le terme de plus haut degré est égal à* 1*. Montrer qu'il existe un réel* $a > 0$ *tel que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{F}, \quad \int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant a.$$

Exercice 5.138 ★ ***Équivalence des*** 3 ***normes principales sur*** $\mathbb{K}^n$

Montrer que sur $\mathbb{K}^n$*, on a*

$$\|.\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|.\|_2 \leqslant n\|.\|_{+\infty} \leqslant n\|.\|_1.$$

Exercice 5.139 ★

1. *On note* $\mathscr{P}_n$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *normalisés (de coefficient dominant qui vaut* 1*). Montrer qu'il existe* $\alpha_n > 0$ *tel que*
$$\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P}_n, \quad \sup_{x\in[0,1]} |\mathrm{P}(x)| \geqslant \alpha_n$$
2. *On note* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *normalisés. Existe-t-il une constante* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P}, \ \sup_{x\in[0,1]} |\mathrm{P}(x)| \geqslant \alpha$ *?*

Exercice 5.140 ★ ***Oral CCP MP***

Soient E,F *deux espaces vectoriels normés sur le corps* $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que si* f *est une application linéaire de* E *dans* F*, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :*
   - **P1.** f *est continue sur* E.
   - **P2.** f *est continue en* 0_{E}.
   - **P3.** $\exists k > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{E}, \left\|f(x)\right\| \leqslant k\,\|x\|$.
2. *Soit* E *l'espace vectoriel des applications continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme définie par :* $\|f\| = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ *. On considère l'application* φ *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ *est linéaire et continue.*

Exercice 5.141 ★ ***Oral CCP MP***

On note E *l'espace vectoriel des applications continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ *et* $\mathrm{N}_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

1. (a) *Démontrer que* N_∞ *et* N_1 *sont deux normes sur* E.
   (b) *Démontrer qu'il existe* $k > 0$ *tel que, pour tout* f *de* E, $\mathrm{N}_1(f) \leqslant k\mathrm{N}_\infty(f)$.
   (c) *Démontrer que tout ouvert pour la norme* N_1 *est un ouvert pour la norme* N_∞.
2. *Démontrer que les normes* N_1 *et* N_∞ *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 5.142 ★ ***Oral CCP MP***

On note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.*

$\forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{E}$*, on pose* $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ *et* $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$ *avec* $n \geqslant \deg \mathrm{P}$.

1. (a) *Démontrer que* N_1 *et* N_∞ *sont des normes sur* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   (b) *Démontrer que tout ouvert pour la norme* N_∞ *est un ouvert pour la norme* N_1.
   (c) *Démontrer que les normes* N_1 *et* N_∞ *ne sont pas équivalentes.*
2. *On note* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à* k*. On note* N'_1 *la restriction de* N_1 *à* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ *et* N'_∞ *la restriction de* N_∞ *à* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$.

   Les normes N'_1 *et* N'_∞ *sont-elles équivalentes ?*

5.0.16 Espaces vectoriels normés

Exercice 5.143 ★ **RMS 2009 976 Centrale PSI (Maple)**

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{N}(x,y)=\int_0^1|x+ty|\mathrm{d}t$. Cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, représenter sa boule unité avec Maple.

Exercice 5.144 ★ **RMS 2013 903 Centrale PC (Maple)**

Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ définies par : $x_0=y_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=\sqrt{7+y_n}$, $y_{n+1}=\sqrt{7-x_n}$.

1. *Montrer que ces suites sont bien définies.*
2. *Montrer que les suites convergent et déterminer leur limite.*

5.0.17 Suites numériques

Exercice 5.145 ★ **RMS 2009 984 Centrale PSI (Maple)**

Pour $(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, on pose $f_k(n)=n+\lfloor\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}\rfloor$. Déterminer $\{f_k(n),\quad n\in\mathbb{N}\}$.

Exercice 5.146 ★ **RMS 2012 1062 Centrale PC (Maple)**

Soient $f\colon x\mapsto x^2-8+\frac{12}{x}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0=a>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

1. *Calculer les premiers termes de cette suite pour quelques valeurs de a. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite ?*
2. *Tracer les graphes de f et de $x\mapsto x$.*
3. *On suppose que $a\in[\sqrt{7}-1,2[$, et on pose $v_n=u_n-2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
   (a) *Trouver g telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=g(v_n)$.*
   (b) *Déterminer le limite de $x\mapsto\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{x}$ quand x tend vers zéro. En déduire un équivalent de v_n.*
   (c) *Quelle est la nature de la série de terme général v_n^2 ?*

Exercice 5.147 ★ **RMS 2015 896 Centrale PC (Maple)**

Mots-clés : ensemble de Mandelbrot
Si $c\in\mathbb{C}$, on considère la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $z_0=0$ et, pour $n\in\mathbb{N},\quad z_{n+1}=z_n^2+c$. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des c pour lesquels la suite (z_n) est bornée.

1. *Montrer que si $c\in\mathscr{M}$ alors $\bar{c}\in\mathscr{M}$.*
2. *Écrire un algorithme calculant les 40 premiers termes.*
3. *Si (z_n) converge, quelles sont les limites possibles ?*
4. *Que dire si (z_{2n}) converge mais (z_n) ne converge pas ?*

5.0.18 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 5.148 ★ **RMS 2009 985 Centrale PSI (Maple)**

Soit $c\colon x\mapsto x^2$ et $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. *Calculer à l'aide du logiciel de calcul formel le développement limité d'ordre 4 en zéro de $f\circ c$.*
2. *Déterminer le développement limité d'ordre n en zéro de $f\circ c$.*

Exercice 5.149 ★ **RMS 2012 1055 Centrale PC (Maple)**

Pour $n\geqslant 3$, soit (E_n) l'équation $e^x=x^n$.

1. *Montrer qu'il existe un unique $x_n\in[0,n]$ solution de (E_n). Donner des valeurs approchées de x_n pour $n\in\{3,\dots,10\}$.*
2. *Déterminer la limite ℓ de (x_n), puis un développement asymptotique à l'ordre 5 de x_n.*
3. *Montrer qu'il existe un unique $y_n>n$ solution de (E_n). Déterminer un équivalent de y_n.*

Exercice 5.150 ★ **RMS 2014 949 Centrale PSI (Maple)**

Mots-clés : fonction sinus lemniscatique
Soit $\mathrm{F}\colon x\mapsto\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$.

1. (a) *Déterminer le domaine de définition de F.*
   (b) *Dessiner le graphe de F avec Maple sur un intervalle qui convient.*
   (c) *Montrer que F est un $\mathscr{C}^1$–difféomorphisme d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer.*
2. (a) *Montrer qu'il existe une fonction G définie sur un intervalle J' à déterminer telle que $2\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(\mathrm{G}(x))$.*
   (b) *Montrer que G est solution d'une équation différentielle non linéaire.*

Exercice 5.151 ★ **RMS 2014 1013 Centrale PC (Maple)**

À l'aide d'une procédure, calculer $\mathrm{S}_n(f)=\int_0^1(\int_0^1(\cdots(\int_0^1 f(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n})\mathrm{d}x_1)\cdots)\mathrm{d}x_{n-1})\mathrm{d}x_n$ pour f valant $x\mapsto x$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^3$ et $n=100$. Conjecture ?

5.0.19 Espaces de fonctions

Exercice 5.152 ★ **Centrale PC 2009**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ unitaires de degré n. Montrer que $\inf_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}_n}\int_0^1|\mathrm{P}(t)|\mathrm{d}$ 0.

Exercice 5.153 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Montrer que $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet pour $\|\ \|_1$.

5.0.20 Normes, équivalence des normes

Exercice 5.154 ★ ***Mines Ponts PSI 2007***

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}), \quad f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. *Montrer que* $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ *définit une norme sur* E.
2. *Montrer qu'il existe* $C > 0$ *tel que* $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ *pour toute* $f \in E$.
3. *Les normes* $\|\ \|$ *et* $\|\ \|_\infty$ *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 5.155 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Soient $E = \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ *et* $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'|$. *Montrer que* N *est une norme. Comparer* N *et* $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.156 ★ ***Centrale PC 2011***

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}[X]$. *Si* $P \in E$, *on pose* $N_a(P) = |P(a)| + \max_{[-1,1]} |P'|$.

1. *Montrer que* N_a *est une norme.*
2. *Si* $(a,b) \in [-1,1]^2$, *montrer que* N_a *et* N_b *sont équivalentes.*
3. *Que dire si* $a \in [-1,1]$ *et* $b > 1$ *?*

Exercice 5.157 ★ ***Centrale PC 2009***

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Pour* g *et* f *dans* E, *on pose* $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* g *pour que* N_g *soit une norme.*
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* g *pour que* N_g *soit équivalente à la norme infinie.*

Exercice 5.158 ★ ***CCP PC 2011***

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Si* $f \in E$, *on pose* $N(f) = \int_0^1 |f(t)|e^t \mathrm{d}t$. *Montrer que* N *est une norme sur* E. *Est-elle équivalente à* $\|\ \|_\infty$ *?*

Exercice 5.159 ★ ***ENSEA PSI 2010***

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Pour* $f \in E$, *on pose* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ *et* $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* F *un sous-espace de* E *tel que* $(*) \quad \forall f \in F, \quad \|f\|_\infty \leqslant n\|f\|_2$.

1. *Montrer que* $F \neq E$.
2. *Montrer que* F *est de dimension finie* $\leqslant n^2$.
3. *Donner un exemple de sous-espace* F *de dimension* n *vérifiant* $(*)$.

Exercice 5.160 ★ ***RMS 2006 1121 Télécom Sud Paris PC***

Soient $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *et, pour* $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$.

1. *Montrer que* N *est une norme sur* E.
2. *La norme* N *et la norme préhilbertienne canonique sont-elles équivalentes sur* E *?*

Exercice 5.161 ★ ***X ENS PSI 2014***

Mots-clés : inégalité de ? ?

Pour $(X,Y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ *on note* $(X,Y) = \overline{X}^T Y$ *et* $\|X\| = \sqrt{(X,X)}$. *Soit* $\omega = e^{2i\pi/n}$ *et* $A = (n^{-1/2}\omega^{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que* $\overline{A}^T A = A\overline{A}^T = I_n$.
2. *Soit* $X \in \mathbb{C}^n$. *Montrer que* $\|AX\| = \|X\|$.
3. *Soient* $(c_0,\dots,c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et* $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}$. *On pose* $\|f\|_1 = \sum_{k=0}^n |c_k|$ *et* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. *Montrer que* $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \leqslant \sqrt{n+1}\,\|f\|_\infty$.
4. *Soit* $Z = (z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ *avec* $z_k = c_k e^{ikt}$ *si* $k < n$ *et* $z_n = c_0 + c_n e^{int}$. *Calculer* AZ *en fonction des* $f(t + \frac{2k\pi}{n})$.
5. *Montrer que* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |f(t + \frac{2k\pi}{n})|^2 = |c_0 + c_n e^{int}|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} |c_k|^2$.
6. *Montrer que* $\|f\|_\infty^2 \geqslant (|c_0| + |c_n|)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} |c_k|^2$.
7. *Montrer que* $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|f\|_\infty$.

Exercice 5.162 ★ ***Centrale PC 2014***

Si $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, *on pose* $N_1(P) = \sum |a_k|$, $N_2(P) = \max_{k\geqslant 0} |a_k|$, $N_3(P) = \max_{[0,1]} |P|$.

1. *Montrer que* N_1, N_2, N_3 *sont des normes.*
2. *Soit* $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0)$. *L'application* Φ *est-elle continue pour ces normes ?*
3. *Les normes* N_1, N_2 *et* N_3 *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 5.163 ★ ***Centrale PC 2015***

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *et* E_+ *l'ensemble des* f *de* E *positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si* $f \in E$ *et* $\varphi \in E_+$, *on pose* $\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f|\varphi$.

1. *Soit* $\varphi \in E_+$. *Montrer que l'application* $f \mapsto \|f\|_\varphi$ *définit une norme sur* E.
2. *Soient* φ_1 *et* φ_2 *dans* E_+. *On suppose* $\varphi_1 > 0$ *et* $\varphi_2 > 0$. *Montrer que* $\|\ \|_{\varphi_1}$ *et* $\|\ \|_{\varphi_2}$ *sont équivalentes.*
3. *Les normes* $\|\ \|_{x\mapsto x}$ *et* $\|\ \|_{x\mapsto x^2}$ *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 5.164 ★ ***Centrale PC 2015***

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \quad f(0) = 0\}$. *On munit* E *de la norme infinie* $\|\ \|$. *Si* $f \in E$, *on pose* $N(f) = \|f' + f\|_\infty$.

1. *Montrer que* N *est une norme.*
2. *Existe-t-il* $a > 0$ *tel que* $\forall f \in E, \quad N(f) \leqslant a\|f\|_\infty$ *?*
3. *Existe-t-il* $b > 0$ *tel que* $\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant bN(f)$ *?*
4. *Soit* $\Phi : f \in E \mapsto f'(0) \in \mathbb{R}$. *Existe-t-il* $C > 0$ *tel que* $\forall f \in E, \quad |\Phi(f)| \leqslant C\|f\|_\infty$ *? Existe-t-il* $D > 0$ *tel que* $\forall f \in E, \quad |\Phi(f)| \leqslant DN(f)$ *?*

Exercice 5.165 ★ ***CCP PSI 2015***

Soit E *l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que* $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ *et* $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ *sont deux normes sur* E. *Sont-elles équivalentes ?*

5.0.21 Continuité des applications linéaires, norme subordonnée

sRMS 2013 590 TPE EIVP PSI

Exercice 5.166 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : norme subordonnée, norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien. Si* $u \in \mathscr{L}(E)$*, on pose* $N(u) = \sup\{\|u(x)\|,\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\}$.

sRMS 2013 116 ENS PC

1. *Montrer que* N *définit une norme sur* $\mathscr{L}(E)$.
2. *Soient* u *et* v *dans* $\mathscr{L}(E)$*. Comparer* $N(v \circ u)$ *à* $N(u)N(v)$.
3. *Soit* $u \in \mathscr{S}(E)$*. Montrer que* $u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \inf\{\langle x, u(x)\rangle,\quad x \in E \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\} > 0$.

sRMS 2011 948 Centrale PC

Exercice 5.167 ★ **Centrale PC 2009**

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$*. Si* $f \in E$*, on pose* $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ *et* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

1. *Montrer que* $\|\ \|_2$ *est une norme sur* E*. Soit* $\alpha \in [0,1]$ *et* $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$*. L'application* Φ *est-elle continue pour la norme* $\|\ \|_2$ *?*
2. *Existe-t-il* $C > 0$ *tel que* $\forall f \in E,\quad \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$ *?*
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Existe-t-il* $C > 0$ *tel que* $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\quad \|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$ *?*

Exercice 5.168 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : espaces ℓ^1 *et* ℓ^∞

On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ *l'ensemble des suites réelles bornées et* $\ell^1(\mathbb{R})$ *l'ensemble des suites réelles dont la série est absolument convergente. Pour* $a \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ *et* $u \in \ell^1(\mathbb{R})$*, on note* $(a,u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$.

sRMS 2014 661 Mines Ponts PSI

1. *Justifier l'existence de* (a,u).
2. *On fixe* $u \in \ell^1(\mathbb{R})$ *et on pose* $\varphi_u\colon a \in \ell^\infty(\mathbb{R}) \mapsto (a,u)$*. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue pour* $\|\ \|_\infty$ *; calculer la norme subordonnée de* φ_u.
3. *On fixe* $a \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ *et on pose* $\psi_a\colon u \in \ell^1(\mathbb{R}) \mapsto (a,u)$*. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue pour* $\|\ \|_1$ *; calculer la norme subordonnée de* ψ_a.

Exercice 5.169 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : espace ℓ^2

Soit E *l'ensemble des* $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que la série de terme général* x_n^2 *converge.*

1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. *Montrer que l'application qui à* $(x_n) \in E$ *associe* $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ *définit une norme.*
3. *Soit* $F\colon (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$*. L'application* F *est-elle continue ?*
4. *Si* $(x_n) \in E$*, montrer que la suite de terme général* $x_n + x_{n+1}$ *est dans* E*. L'application* $G\colon (x_n)_{n\geqslant 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\geqslant 0} \in E$ *est-elle continue ?*

Exercice 5.170 ★ **TPE EIVP PSI 2013**

Mots-clés : espace ℓ^∞*, norme de l'opérateur différence sur* ℓ^∞

Soit ℓ^∞ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *formé des suites bornées. On munit* ℓ^∞ *de la norme infinie* $\|\ \|_\infty$*. Si* $u = (u_n) \in \ell^\infty$*, on note* $\Delta(u)$ *la suite de terme général* $u_{n+1} - u_n$*. Montrer que* Δ *est un endomorphisme continu de* ℓ^∞.

Calculer $|||\Delta|||$.

Exercice 5.171 ★ **ENS PC 2013 , ENS PC 2014**

Mots-clés : opérateur positif

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *de la norme infinie* $\forall f \in E,\quad \|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$*. Soit* $T \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$*. On suppose que* $\forall f \in E,\quad f \geqslant 0 \Rightarrow T(f) \geqslant 0$*. Montrer que* T *est lipschitzien.*

Exercice 5.172 ★ **Centrale PC 2011**

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *de la norme donnée par* $\forall f \in E,\quad \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$*. Soit* $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|$*. Montrer que* Φ *est une application continue de* $(E, \|\ \|_2)$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.173 ★ **ENS PC 2014**

Mots-clés : opérateur d'interpolation de Lagrange

Soient $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*,* E_n *l'ensemble des fonctions polynomiales sur* $[a,b]$ *de degré* $\leqslant n$*,* $(x_0,\dots,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ *avec* $x_0 < x_1 < \dots < x_n$*. Si* $f \in E$*, on note* P_f *l'unique élément de* E_n *tel que* $\forall i \in \{0,1,\dots,n\},\quad P_f(x_i) = f(x_i)$*. Soit* $\Phi\colon f \in E \mapsto P_f \in E_n$.

1. *Montrer que* Φ *est linéaire et que c'est un projecteur.*
2. *Montrer qu'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall f \in E,\quad \|\Phi(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$.
3. *Si* $f \in E$*, montrer qu'il existe* $Q \in E_n$ *tel que* $\|f - Q\|_\infty = d(f, E_n)$*, où* $d(f,E_n) = \inf\{\|f - P\|_\infty,\quad P \in E_n\}$.
4. *Si* $f \in E$*, montrer que* $\|f - \Phi(f)\|_\infty \leqslant (C+1)d(f,E_n)$.

Exercice 5.174 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|\ \|_\infty$*. Soient* $e \in E$ *et* $T_e\colon f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$*. Montrer que* T_e *est une forme linéaire continue et calculer* $|||T_e|||$*, la norme de* T_e *subordonnée à* $\|\ \|_\infty$.

Ind. Considérer $f_\varepsilon\colon t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$*, où* $\varepsilon > 0$.

Exercice 5.175 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$*. Pour* $f \in E$*, on note* $\varphi(f) = \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$.

1. *Montrer que* φ *est linéaire.*
2. *Trouver* $k \in \mathbb{R}_+$ *minimal tel que* $\forall f \in E,\quad |\varphi(f)| \leqslant k\|f\|_\infty$.
3. *Existe-t-il* $a \in E$ *non nul tel que* $|\varphi(a)| = k\|a\|_\infty$ *?*

Exercice 5.176 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : norme subordonnée d'un opérateur intégral

On note L_c^1 *l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur* $\mathbb{R}$*. Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\Phi\colon L_c^1 \to L_c^1$ *telle que* $\Phi(f)\colon x \mapsto \int_{a+x}^{b+x} f(t)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* L_c^1.
2. *Calculer* $\int_{\mathbb{R}} \Phi(f)(x)\mathrm{d}x$ *en fonction de* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

3. Soit $\|\ \|: f \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f|$. Déterminer $\sup_{\|f\|=1} \|\Phi(f)\|$.

sRMS 2012 321 X ESPCI PC

Exercice 5.177 ★ **ENS PC 2015**

Mots-clés : norme subordonnée euclidienne d'une matrice stochastique symétrique, d'une matrice bistochastique

sRMS 2015 438 X ESPCI PC

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,1}+\cdots+a_{i,n}=1$.*
   (a) *Montrer que les valeurs propres de A sont dans $[-1,1]$.*
   (b) *Montrer, si $X \in \mathbb{R}^n$, que $\|AX\| \leqslant \|X\|$.*

sRMS 2015 440 X ESPCI PC

2. *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,1}+\cdots+a_{i,n}=1$ et $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{1,j}+\cdots+a_{n,j}=1$. Montrer que $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \leqslant \|X\|$.*

Exercice 5.178 ★ **ENS PC 2015**

Mots-clés : opérateur de primitive dans L^2

sRMS 2010 1062 CCP PC

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $T(f): x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f$. On munit E du produit scalaire défini par $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$, et on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

1. *Montrer que, si $f \in E$, on a $\|T(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.*
3. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une famille orthonormale.*
   (a) *Si $x \in [0,1]$, montrer que $T(f_n)(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
   Ind. Montrer, si $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, que $\sum_{n=0}^{N} (\int_0^x f_n)^2 \leqslant x^2$.
   (b) *En déduire que $\|T(f_n)\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

sRMS 2015 369 X ENS PSI

5.0.22 Espaces de matrices

Exercice 5.179 ★ **Centrale PSI 2009**

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $SL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.180 ★ **Centrale PC 2013**

Montrer $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.181 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : densité des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Donner un exemple de matrice réelle non diagonalisable. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5.182 ★ **X ESPCI PC 2012**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5.183 ★ **X ESPCI PC 2012 , Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : norme invariante par similitude matricielle

Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.

Exercice 5.184 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : norme invariante par produit matriciel

Existe-t-il une norme multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 5.185 ★ **Centrale PSI 2009**

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des deux normes définies par $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m$ et $N(M) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$. Soient $u : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + M^T$ et $v : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - M^T$. Calculer les normes d'opérateurs de u et v pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N.

Exercice 5.186 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : suite géométrique matricielle

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\geqslant 1}$ converge vers B. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 5.187 ★ **X ESPCI PC 2009 ,Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : rayon spectral, série géométrique matricielle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure possédant une unique valeur propre a. Montrer l'équivalence entre : (i) $|a| < 1$; (ii) $M^p \to 0$ quand $p \to +\infty$; (iii) $\sum M^p$ converge.

Exercice 5.188 ★ **CCP PC 2010**

Mots-clés : rayon spectral, série géométrique matricielle

On munit $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\ \|$ définie par : $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $\|M\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$

1. *Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.*
2. *Montrer que l'application $(M,N) \mapsto MN$ est continue.*
3. *Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant 1$.*
4. *Soit $B \in E$. On suppose que $(B^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $C \in E$. Montrer que $C^2 = C$ et que le spectre de C est inclus dans $\{0,1\}$. Montrer que les valeurs propres de B sont de module $\leqslant 1$; si λ est une valeur propre de B de module 1, montrer que $\lambda = 1$.*

Exercice 5.189 ★ **X ENS PSI 2015**

Mots-clés : rayon spectral, série géométrique matricielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\ \|$ désigne la norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\|A\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(A)\}$.

1. *Montrer que $\|\ \|_{op}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ax\|_{op} \leqslant \|A\|_{op}\|x\|$.*
2. *On suppose que A est diagonalisable et que $\rho(A) < 1$. Montrer que $\|A^k\|_{op} \to 0$ quand $k \to +\infty$.*
   On admettra dans la suite que le résultat s'étend au cas où A n'est pas diagonalisable.
3. *Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A) \leqslant \|A^k\|_{op}^{1/k}$.*
4. *On suppose que $\rho(A) < 1$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que la série de terme général A^k converge vers $(I_n - A)^{-1}$.*
5. *Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A^k\|_{op}^{1/k} \to \rho(A)$.*

Exercice 5.190 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : matrices à puissances bornées

Déterminer les $A \in GL_2(\mathbb{C})$ *telles que les suites* (A^n) *et* (A^{-n}) *soient bornées.*

Exercice 5.191 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : matrices à puissances bornées

Déterminer les matrices $A \in GL_n(\mathbb{C})$ *telles que* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(A^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *soient bornées.*

Exercice 5.192 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. *On suppose que* $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est bornée. Montrer que* $A = I_n$.

Exercice 5.193 ★ **Centrale PSI 2009**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$. *Montrer que la suite* $(A^k)_{k\geqslant 0}$ *converge. Déterminer sa limite en fonction de* A.

Exercice 5.194 ★ **CCP PC 2011**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *telle que* $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

1. *Montrer que pour tout* $P \in GL_n(\mathbb{C})$, *l'application* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ *est continue.*
2. *Montrer que les valeurs propres de* A *sont de module* $\leqslant \frac{1}{2}$. *En déduire que* $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.
3. *Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.*
4. *Montrer que* A *est nilpotente. Que peut-on alors dire de* A *?*

Exercice 5.195 ★ **ENSAM PSI 2014**

1. *Soit* $P \in GL_n(\mathbb{C})$. *L'application* $\varphi_P : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est-elle continue ?*
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *telle que* $4A^3 + 2A^2 + A = 0$. *Montrer que la suite* (A^k) *converge. En déduire que* $A = 0$.

Exercice 5.196 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^T = 3A^2 - A - I_n$. *Montrer que la suite* $(A^p)_{p\geqslant 0}$ *converge.*

Exercice 5.197 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer les* $a \in \mathbb{R}$ *tels que la suite de terme général* $a^n M^n$ *ait une limite non nulle.*

Exercice 5.198 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soient $z_1, \dots, z_p$ *des complexes distincts de module 1,* $a_1, \dots, a_p$ *des complexes. On pose, pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_1 z_1^n + \cdots + a_p z_p^n$. *On suppose que* $u_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Montrer que* $(a_1, \dots, a_p) = (0, \dots, 0)$.

Exercice 5.199 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : exponentielle d'une matrice, injectivité de l'exponentielle, surjectivité de l'exponentielle

Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* N *la norme sur* E *telle que, pour tout* $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $N(M) = \max|m_{i,j}|$.

1. *Montrer qu'il existe* $C \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $\forall (A,B) \in E^2, \quad N(AB) \leqslant CN(A)N(B)$.
2. *Montrer que la série de terme général* $\frac{A^k}{k!}$ *est convergente. On note* $\exp(A)$ *sa somme.*
3. *Calculer* $\exp(A)$ *pour* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}$.
4. *On pourrait montrer que que si* A *et* B *commutent, alors* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. *Soit* $f : A \in E \mapsto \exp(A) \in GL_2(\mathbb{R})$ *est-elle bien définie ? Injective ? Surjective ?*

Exercice 5.200 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : exponentielle d'une matrice triangulaire d'ordre 2

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Exprimer* T^k *pour* $k \in \mathbb{N}$. *Déterminer la limite de la suite de matrices de terme général* $M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}$ *quand* $n \to +\infty$.