Chapitre 10

# Espaces euclidiens

### 10.0.1 Espaces préhilbertiens réels

***Exercice 10.1*** ★

*Soit l'espace* $E = \mathbb{R}_1[X]$ *muni du produit scalaire*

exo_prod_scal_matrices

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. *Montrer que* $(.\mid.)$ *définit un produit scalaire sur* $E$.
2. *Trouver une base orthonormale* $\varepsilon$ *de* $E$.
3. *Trouver les coordonnées du vecteur* $P = X+1$ *dans* $\varepsilon$.

***Exercice 10.2*** ★

*Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs* $v_1 = (0,3,1,-1)$ *et* $v_2 = (1,2,-1,1)$. *Soit* $F$ *le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Déterminer un système d'équations de* $F^\perp$ *puis une base orthonormale de* $F^\perp$.

***Exercice 10.3*** ★

*Soit* $E$ *un espace préhilbertien réel, et* $B = (e_1,\dots,e_n)$ *une famille de vecteurs de* $E$ *de norme* $1$ *tels que :*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k).e_k.$$

1. *Montrer que si* $i \neq j$, *alors* $\left(e_i \mid e_j\right) = 0$.
2. *Montrer que* $B$ *est une base orthonormale de* $E$.

***Exercice 10.4*** ★

*Soient* $E$ *un espace préhilbertien réel et une application* $f : E \mapsto E$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. *Montrer que* $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x)\| = \|x\|$ *et* $\left(f(x) \mid f(y)\right) = \left(x \mid y\right)$.
2. *Calculer* $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ *et en déduire que l'application* $f$ *est linéaire.*

***Exercice 10.5*** ★ **Un produit scalaire sur** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

*Pour deux matrices* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *on définit :*

$$(A \mid B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$$

1. *Montrer que* $(.\mid.)$ *est un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées* $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces orthogonaux pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer la projection orthogonale d'une matrice* $A$ *sur l'espace des matrices antisymétriques.*
4. *Montrer que si* $\|.\|$ *est la norme dérivant de ce produit scalaire alors*

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|.$$

***Exercice 10.6*** ★

*Soit* $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$\left(\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X = 0\right) \Longleftrightarrow \left(M^T = -M\right)$$

***Exercice 10.7*** ★

*Soit* $E$ *un espace euclidien et* $S = (e_1,\dots,e_n)$ *une famille de vecteurs unitaires tels que :*

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2 = \|x\|^2$$

*Montrer que* $S$ *est une base de* $E$.

### *Exercice 10.8* ★
*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace euclidien, et* $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathrm{E}$*. Montrer que*

1. $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$ ;
2. $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$ ;
3. $\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G} \Longleftrightarrow \mathrm{E} = \mathrm{F}^{\perp}\oplus\mathrm{G}^{\perp}$.

### *Exercice 10.9* ★
*Soit* $\varphi$ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer qu'il existe une matrice* $\mathrm{B}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall \mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$$

### *Exercice 10.10* ★★ *Égalité de la médiane*
*Soit* $\|\bullet\|$ *une norme euclidienne sur* $\mathrm{E}$.

1. *(Re)démontrer l'égalité de la médiane :*
   $\forall x, y\in\mathrm{E}, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.
2. *En déduire que* $\forall x, y, z\in\mathrm{E}, \|x+y+z\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2 = \|y+z\|^2+\|z+x\|^2+\|x+y\|^2$

### *Exercice 10.11* ★★ *Une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*
*Soit un espace préhilbertien réel* $\mathrm{E}$ *et deux vecteurs* $x, y\in\mathrm{E}$.

1. *Développer l'expression*
   $$\left\| \|y\|^2.x - (x\mid y).y \right\|^2.$$
2. *Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.*

### *Exercice 10.12* ★★
*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace préhilbertien réel et* $f, g : \mathrm{E}\mapsto\mathrm{E}$ *deux applications telles que :*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2 \quad \big(x\mid f(y)\big) = \big(g(x)\mid y\big).$$

*Montrer que* $f$ *et* $g$ *sont linéaires.*

### *Exercice 10.13* ★★

1. *Soit* $\mathrm{E}$ *un espace euclidien et* $f\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que*
   $$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2, \quad (x\mid y) = 0 \Longrightarrow \big(f(x)\mid f(y)\big) = 0.$$
   *Montrer qu'il existe* $\alpha>0$ *tel que*
   $$\forall x, y\in\mathrm{E}, \quad \big(f(x)\mid f(y)\big) = \alpha\big(x\mid y\big).$$
2. *Si* $f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *vérifie :*
   $$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2 \text{ non-nuls}, \quad \frac{\big(f(x)\mid f(y)\big)}{\|f(x)\|\,\|f(y)\|} = \frac{(x\mid y)}{\|x\|\,\|y\|},$$
   *montrer qu'il existe* $\alpha>0$ *tel que :*
   $$\forall x\in\mathrm{E}, \quad \|f(x)\| = \alpha\|x\|.$$

### *Exercice 10.14* ★★
*Sur l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2,* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$*, on définit*

$$(\mathrm{P}\mid\mathrm{Q}) = \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(-1)\mathrm{Q}(-1)$$

*Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et trouver une base orthogonale pour ce produit scalaire.*

### *Exercice 10.15* ★★
*Soit* $(.\mid.)$ *un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$*,* $e$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathrm{A}$ *la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique.*

1. *Lorsque* $n=2$*, montrer que* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})>0$ *et* $\det(\mathrm{A})>0$.
2. *Lorsque* $n\geqslant 3$*, montrer que* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})>0$ *et* $\det(\mathrm{A})>0$.
3. *Montrer que* $\forall p\geqslant 2$*,* $\mathrm{A}^p$ *est une matrice symétrique définie positive (et donc qu'elle définit également un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$*). On distinguera les cas* $p$ *pair et impair.*

### *Exercice 10.16* ★★
*Dans un espace euclidien de dimension* $n$*, on dit qu'une famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de vecteurs normés est* $\mu$*-presque orthogonale* $(\mu>0)$ *si et seulement si pour tous réels* $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|^2 \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2$$

1. *Montrer que la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une base orthonormale si et seulement si c'est une suite* $1$*-presque orthogonale.*
2. *Montrer qu'une famille* $\mu$*-presque orthogonale est libre.*

### *Exercice 10.17* ★★
*Dans un espace euclidien* $\mathrm{E}$*, montrez qu'il existe une base* $e = (e_1,\dots,e_n)$ *formée de vecteurs unitaires vérifiant :*

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, \quad i\neq j \Longrightarrow \|e_i - e_j\| = 1$$

### *Exercice 10.18* ★★
*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace euclidien, et* $x_1,\dots,x_n\in\mathrm{E}$*,* $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)$$

### *Exercice 10.19* ★★
*Soit* $\Phi$ *une injection de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$*. Démontrer que* $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

*En déduire que*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi(k)}{k^2} = +\infty.$$

**Exercice 10.20** ★★

*Soit $a_1,\dots,a_m$ $m$ nombres réels strictement positifs. Démontrer que*

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} n a_n^2}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^2} > \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

**Exercice 10.21** ★★★

*Soit $f$ une fonction $[0;1]\to\mathbb{R}$ continue, $n>0$ un entier naturel fixé tel que $\int_0^1 (1-x^n) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ Montrer que :*

$$(2n+2)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice 10.22** ★

1. *Soient $a_1,\dots,a_n$, $b_a,\dots,b_n$, $c_1,\dots,c_n$ des réels positifs. Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k\right).$$

2. *Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que $f(0)=0$. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a :*

$$f^2(x) \leqslant x\left(\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right).$$

3. *Soit $n$ réels strictement positifs $x_1,\dots,x_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$.*

   *Étudier le cas d'égalité.*

**Exercice 10.23** ★ **Oral CCP MP 2015**

*Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$.*

1. *Soit $h$ une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

   *Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h=0$ .*

2. *Soit $\mathrm{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

   *On pose, $\forall (f,g)\in\mathrm{E}^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.*

   *Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathrm{E}$.*

3. *Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

**Exercice 10.24** ★★★ **Polynômes de Legendre**

*On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par :*

$$(\mathrm{P}\mid\mathrm{Q}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Soit $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n)$ la base orthonormalisée par la méthode de Gram-Schmidt de la base canonique $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on pose :*

$$\mathrm{L}_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\mathrm{P}_k.$$

1. *Calculer les polynômes $\mathrm{L}_0$ à $\mathrm{L}_3$.*
2. *Démontrer que pour tout $n$, le polynôme $\mathrm{L}_n$ possède $n$ racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]-1,1[$.*

**Exercice 10.25** ★★★ **Centrale PC 2016**

*On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par :*

$$(\mathrm{P}\mid\mathrm{Q}) = \int_{-2}^{2} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

*On dispose des fonctions Python polynômes de* `numpy` *et* `integer`.

1. *Montrer que $(.\,|\,.)$ est bien un produit scalaire.*
2. *Écrire une fonction Python qui calcule le produit scalaire entre deux polynômes.*
3. *Montrer que les sous-espaces vectoriels formés des polynômes pairs et des polynômes impairs sont supplémentaires orthogonaux.*
4. *Déterminer une base orthonormée de $\mathrm{E}$.*
5. *On pose*

$$f : \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{X}\mathrm{P}' + (\mathrm{X}^2-4)\mathrm{P}'' \end{array}\right. .$$

   *Montrer que $f$ est une symétrie.*

6. *Écrire la matrice de $f$ dans la base canonique.*

**Exercice 10.26** ★ **CCP 2009**

*Soit $\mathrm{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Soit $\mathrm{V} = \{f\in\mathrm{E} : f''=f\}$ et $\mathrm{W} = \{f\in\mathrm{E} : f(0)=f(1)=0\}$.*

1. *Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathrm{E}$ en posant*

$$\forall (f,g)\in\mathrm{E}^2,\quad \langle f|g\rangle = \int_0^1 \left(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t.$$

2. *Montrer que $(\mathrm{sh},\mathrm{ch})$ forme une base de $\mathrm{V}$.*

3. (a) *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *Pour* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *on pose* $k = f - (\lambda\,\mathrm{ch} + \mu\,\mathrm{sh})$. *Montrer que :*

$$k \in \mathrm{W} \Longleftrightarrow \left[\lambda = f(0) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\right].$$

   (b) *Montrer que* V *et* W *sont supplémentaires dans* E.

4. *Soit* $f \in \mathrm{V}$ *et soit* $\|.\|$ *la norme associée au produit scalaire.*

   (a) *Montrer que* $\|f\|^2 = f(1)f'(1) - f(0)f'(0)$.

   (b) *Calculer* $\|\mathrm{sh}\|^2$ *et* $\|\mathrm{ch}\|^2$.

5. *Montrer que* $\mathrm{V}^{\perp} = \mathrm{W}$.

***Exercice 10.27*** ★

*On munit l'espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *du produit scalaire défini par*

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

*On pose* $\mathrm{H} = \{f \in \mathrm{E} : f(0) = 0\}$. *Soit* $g \in \mathrm{H}^{\perp}$. *En utilisant une fonction* $f : x \mapsto x g(x)$, *montrer que* $g = 0$. *Conclusion ?*

***Exercice 10.28*** ★★★ ***Mines 2011***

*Soit* E *un espace euclidien et* $f$ *un endomorphisme de* E. *On suppose que l'application* $f$ *est* 1*-lipschitzienne. Montrer que* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ *et* $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ *sont supplémentaires orthogonaux.*

### 10.0.2 Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel

***Exercice 10.29*** ★

*Soit* $(\mathrm{E}, (.\,|\,.))$ *un espace euclidien et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *telle que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad (u(x) \mid x) = 0$.

1. *Montrer que :* $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$.
2. *En déduire que :* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u$.

***Exercice 10.30*** ★

*Soit* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *muni de son produit scalaire canonique* $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$.

1. *Calculer l'orthogonal de* D *l'ensemble des matrices réelles diagonales de taille* 2.
2. *Calculer l'orthogonal de* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille* 2.

***Exercice 10.31*** ★ ***Oral CCP MP 2015***

*Soit* E *un espace euclidien.*

1. *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* E.
   *Démontrer que* $(\mathrm{A}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{A}$.
2. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

   (a) *Démontrer que* $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$.

   (b) *Démontrer que* $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.

***Exercice 10.32*** ★ ***Oral CCP MP 2015***

*Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère* $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre* $n$.
*On pose* $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}({}^t\!\mathrm{AB})$ *où tr désigne la trace et* ${}^t\!\mathrm{A}$ *désigne la transposée de la matrice* A.

1. *Prouver que* $\langle\,,\rangle$ *est un produit scalaire sur* E.
2. *On note* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble matrices symétriques de* E *et* $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de* E.

   (a) *Prouver que* $\mathrm{E} = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

   (b) *Prouver que* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. *Soit* F *l'ensemble des matrices diagonales de* E.
   *Déterminer* $\mathrm{F}^{\perp}$.

### 10.0.3 Projections orthogonales

***Exercice 10.33*** ★

*Soit* F *le sous-espace de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par* $(1,0,1)$ *et* $(1,2,-1)$.

1. *Donner une équation de* F.
2. *Déterminer une base de l'orthogonal de* F.
3. *Déterminer le projeté orthogonal de* $(1,1,1)$ *sur* F.

***Exercice 10.34*** ★

1. *Montrer que* $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$ *définit un produit scalaire sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. *Dans la suite, on considère* E *muni de ce produit scalaire.*
2. *Orthonormaliser la base canonique* $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
3. *Calculer la distance de* $\mathrm{X}^2$ *à* $\mathrm{F} = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

***Exercice 10.35*** ★

*Montrer que l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice relativement à la base canonique est*

$$\mathrm{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

*est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.*

***Exercice 10.36*** ★

*Soit* $(\mathrm{E}, (.\,|\,.))$ *un espace préhilbertien réel et soit* $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un projecteur. Montrer que* $p$ *est orthogonal si et seulement si*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

### Exercice 10.37 ★

*Soit* $(\mathrm{E},(.\mid .))$ *un espace euclidien de dimension* 3, $u \in \mathrm{E}$, $u \neq 0$ *et* $\mathscr{P} = (\mathrm{Vect}\, u)^{\perp}$. *Soit* $p$ *la projection orthogonale sur* $\mathscr{P}$ *et* $s$ *la réflexion d'axe* $\mathscr{P}$.

1. *Montrer que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad p(x) = x - \dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u.$
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad s(x) = x - 2\dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u.$
3. *On considère dans* $\mathbb{R}^3$ *le plan* $\mathscr{P}: \quad x - y + z = 0$. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion d'axe* $\mathscr{P}$.

### Exercice 10.38 ★

*Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la projection orthogonale sur le plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $x + 2y - 3z = 0$. *En déduire la matrice de la réflexion d'axe ce plan.*

### Exercice 10.39 ★

1. *Montrer que le système*

$$\begin{cases} x + y - z - t &= 0 \\ x + 3y + z - t &= 0 \end{cases}$$

   *définit un plan* $\mathscr{P}$ *de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Construire une base orthonormale* $(f_1, f_2)$ *de* $\mathscr{P}$.
3. *Former la matrice relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *de la projection orthogonale* $p$ *sur le plan* $\mathscr{P}$ *puis celle de la symétrie orthogonale* $s$ *d'axe* $\mathscr{P}$.
4. *Soit* $\mathrm{X} = (1, 1, 1, -1)$, *calculer* $d(\mathrm{X}, \mathrm{P})$.

### Exercice 10.40 ★

*Sur l'espace* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *on définit pour deux polynômes* $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$,

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_0^1 t\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\, \mathrm{d}t$$

1. *Vérifier que c'est un produit scalaire.*
2. *Déterminer une base orthonormale du sous-espace* $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal du polynôme* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3$ *sur le sous-espace* $\mathrm{F}$.

### Exercice 10.41 ★

*Soit* $(\mathrm{E}, n, (.\mid .))$ *un espace euclidien et un vecteur* $x \in \mathrm{E}$. *Soit un vecteur non-nul* $a \in \mathrm{E}$. *On définit la droite vectorielle* $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(a)$ *et son orthogonal* $\mathrm{H} = \mathrm{D}^{\perp}$. *Exprimer les distances* $d(x, \mathrm{H})$ *et* $d(x, \mathrm{D})$ *en fonction de la norme du vecteur* $x$ *et du produit scalaire* $(x \mid a)$.

### Exercice 10.42 ★

*Soit* E *un espace préhilbertien réel et* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormale. Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$$

### Exercice 10.43 ★★

*Soit* E *un espace euclidien et* $p$ *un projecteur. Montrer que* $p$ *est un projecteur orthogonal si et seulement si*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

### Exercice 10.44 ★ Oral CCP MP 2015

*Soit* E *l'espace vectoriel des applications continues et* $2\pi$*-périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que* $\left(f \mid g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ *définit un produit scalaire sur* E.
2. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par* $f : x \mapsto \cos x$ *et* $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   *Déterminer le projeté orthogonal sur* F *de la fonction* $u : x \mapsto \sin^2 x$.

### Exercice 10.45 ★ Oral CCP MP 2015

*On définit dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *l'application* $\varphi(\mathrm{A}, \mathrm{A}') = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}'\right)$, *où* $\mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}'\right)$ *désigne la trace du produit de la matrice* ${}^t\mathrm{A}$ *par la matrice* $\mathrm{A}'$.
*On note* $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

*On admet que* $\varphi$ *est un produit scalaire sur* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. *Démontrer que* $\mathscr{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Déterminer une base de* $\mathscr{F}^{\perp}$.
3. *Déterminer la projection orthogonale de* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sur* $\mathscr{F}^{\perp}$ .
4. *Calculer la distance de* J *à* $\mathscr{F}$.

### Exercice 10.46 ★

*Dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire usuel* $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\right)$, *on pose :*

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

*Soit aussi* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{U}^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

1. *Montrer que* $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left(\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\right)^k = \mathrm{U}^{n-k}$.
2. *Montrer que* $(\mathrm{U}^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ *est une base orthogonale de* F.
3. *Déterminer la projection orthogonale d'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *sur* F.

**Exercice 10.47** ★

*Soit* $(E, (.\,|\,.))$ *un espace préhilbertien réel, et* $p, q$ *deux projecteurs orthogonaux. Montrer les équivalences :*

*(i)* $p+q$ *est un projecteur orthogonal*

*(ii)* $\forall x \in E, \big(p(x) \mid q(x)\big) = 0$

*(iii)* $poq = qop = 0$

*(iv)* $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Im} q$

**Exercice 10.48** ★

*Dans l'espace* $E = \mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur* $n = (1,1,1)$ *et le sous-espace* $F = \{n\}^\perp$*. Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F *dans la base canonique. Si* $x = (3,2,1)$*, déterminer* $d(x, F)$.

**Exercice 10.49** ★★ **CCP 2007**

*On munit* $\mathbb{R}_3[X]$ *d'un produit scalaire en posant pour* $P = \sum_{n=0}^{3} a_n X^n$ *et* $Q = \sum_{n=0}^{3} b_n X^n$ *:*

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{n=0}^{3} a_n b_n.$$

.

*On considère l'ensemble* $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$.

1. *Montrer que* F *est un espace vectoriel et donner sa dimension.*
2. *Calculer* $p_F(1)$ *où* $p_F$ *est la projection orthogonale sur* F.

**Exercice 10.50** ★

*Dans l'espace* $E = \mathbb{R}[X]$ *muni du produit scalaire défini par :*

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$$

*déterminer la projection de* $P = X^2$ *sur le sous-espace vectoriel* $F = \mathrm{V}ect(1, X)$*. Calculer la distance de* $P = X^2$ *à* F.

**Exercice 10.51** ★ **Centrale 2003**

*On se place dans* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice, relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel*

$$F = \big\{(x,y,z,t) : x+y+z+t = 0 \quad \text{et} \quad x-y+z-t = 0\big\}.$$

**Exercice 10.52** ★ **CCP 2003**

*On considère le plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $x+y-2z = 0$ *relativement à la base orthonormée* $\mathscr{B} = (i,j,k)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Trouver une base orthonormée de* $\mathscr{P}$ *dont le premier vecteur est colinéaire à* $(1,1,1)$.
2. *Donner la matrice, relativement à* $\mathscr{B}$*, de la projection orthogonale sur* P.
3. *Calculer la distance de* $M(x,y,z)$ *à* $\mathscr{P}$.
4. *Donner la matrice, relativement à* $\mathscr{B}$*, de la symétrie orthogonale par rapport à* $\mathscr{P}$.

**Exercice 10.53** ★

*Soit* E *un espace euclidien et* $p$ *un projecteur de* E*. On note*

$$|||p||| = \sup_{\|x\|=1} \big\|p(x)\big\|$$

*où* $\|.\|$ *désigne la norme sur* E *associée au produit scalaire.*

1. *Montrer que* $|||p||| \geqslant 1$.
2. *Montrer que si* $p$ *n'est pas un projecteur orthogonal alors on peut trouver un vecteur* $z \in E$ *tel que* $\big\|p(z)\big\| > \|z\|$.
3. *Conclure que* $|||p||| = 1$ *si et seulement si* $p$ *est un projecteur orthogonal.*
4. *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{P}$ *des projecteur orthogonaux de* E *est une partie fermée et bornée de* $\mathfrak{L}(E)$.

### 10.0.4 Symétrie orthogonales

**Exercice 10.54** ★

*Soit* E *un espace préhilbertien réel, et* $s \in \mathfrak{L}(E)$ *une symétrie vectorielle. Montrer que* $s$ *est une symétrie orthogonale si et seulement si* $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$.

**Exercice 10.55** ★

*Soit* $E = \mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel et* F *le plan d'équations* $x+2y+z = 0$, $x-z+2t = 0$*. Déterminer une b.o.n. de* F*, puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F*, et de la symétrie orthogonale par rapport à* F *dans la base canonique.*

**Exercice 10.56** ★

*Soit* E *un espace préhilbertien réel. Soit* $f : E \mapsto E$ *une application.*

1. *Montrer l'équivalence :*

$$\big(\forall x,y \in E, \big(f(x) \mid y\big) = -\big(x \mid f(y)\big)\big) \Longleftrightarrow \big(f \text{ est linéaire et } \forall x \in E, \big(f(x) \mid x\big) = 0\big)$$

2. *Que peut-on dire de la matrice de* $f$ *dans une base* $e$ *orthonormale ?*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont orthogonaux.*
4. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f o f$.

**Exercice 10.57** ★

*Soit* $E = \mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel et* F *le plan d'équations* $x+2y+z = 0$, $x-z+2t = 0$*. Déterminer une b.o.n. de* F*, puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F*, et de la symétrie orthogonale par rapport à* F *dans la base canonique.*

**Exercice 10.58** ★ **Oral CCP MP 2015**

*Soit* E *un espace préhilbertien et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie* $n > 0$.

*On admet que pour tout* $x \in E$*, il existe un élément unique* $y_0$ *de* F *tel que* $x - y_0$ *soit orthogonal à* F *et que la distance de* $x$ *à* F *soit égale à* $\|x - y_0\|$.

*Pour* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, *on pose* $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. *Démontrer que* $(.|.)$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Calculez la distance de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *au sous-espace vectoriel* F *des matrices triangulaires supérieures.*

### 10.0.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Exercice 10.59** ★★★ **X 2001**

*Résoudre dans* $\mathbb{R}^n$ :
$$\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{x_i - i^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

**Exercice 10.60** ★★★ **ENS Ulm 1997**

*Soit* $(a_n)$ *une suite de réels positifs, non tous nuls, telle que la série de terme général* $a_n$ *converge.*

1. *Montrer que pour tout* $k > 1$, *la série* $\sum a_n^k$ *converge.*
2. *Montrer qu'en posant* $\alpha_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k$, *la suite* $\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

**Exercice 10.61** ★★★ **Centrale 2000**

*On considère la fonction donnée par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

1. *Rappeler le domaine de définition de* $\Gamma$.
2. *Montrer que* $\ln\Gamma$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0,+\infty[$ *et que* $(\ln\Gamma)'' \geqslant 0$.

### 10.0.6 Problèmes de minimisation

**Exercice 10.62** ★

*Trouver le réel* $a$ *qui minimise* $\int_1^2 (\ln x - ax)^2\,dx$.

**Exercice 10.63** ★

*Soit* $E = \mathcal{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. *Trouver* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tels que la quantité*
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t + c\cos t)\right)^2 dt$$
*soit minimale.*

**Exercice 10.64** ★

*Soit* $\alpha = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,dx$.

1. *Déterminer un espace euclidien* $(E,(.\,|\,.))$, *un sous-espace vectoriel* F *de* E *et* $f \in E$ *tel que* $\alpha = d(f,F)^2$.
2. *En déduire l'existence et le calcul de* $\alpha$.

**Exercice 10.65** ★ **Droite des moindres carrés**

*Soient* $X = (x_1,\dots,x_n), Y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. *Interpréter* $\Phi = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right)^{1/2}$ *comme la distance d'un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *à un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.
2. *En déduire qu'il existe un couple* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *en lequel cette borne inférieure est atteinte.*
3. *Calculer* $a$ *en fonction de* $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *et* $\overline{C}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

**Exercice 10.66** ★

1. *Montrer que* $\left(f \mid g\right) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(y)g'(t)\right)dt$ *définit un produit scalaire sur* $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
2. *Montrer que* $F = \left\{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\right\}$ *et* $G = \left\{f \in E \mid f'' = f\right\}$ *sont supplémentaires orthogonaux dans* E.
3. *Préciser le projeté orthogonal de* $h \in E$ *sur* G.
4. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *On pose* $E_{a,b} = \left\{f \in E \mid f(0) = a, f(1) = b\right\}$. *Justifier l'existence d'une borne inférieure pour l'ensemble* $\left\{\int_0^1 \left(h(t)^2 + h'(t)^2\right)dt \mid h \in E_{a,b}\right\}$.

**Exercice 10.67** ★ **Oral CCP MP 2015**

*Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté* $(\,|\,)$.
*On pose* $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
   (b) *Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.*
2. *Soit* $E = \left\{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$.
   *Prouver que l'ensemble* $\left\{\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt,\ f \in E\right\}$ *admet une borne inférieure* $m$ *et déterminer la valeur de* $m$.

### 10.0.7 Groupe orthogonal

**Exercice 10.68** ★

*Soit* F *un sev d'un espace euclidien* $(E,(.\,|\,.))$ *et soit* $f \in O(E)$. *Montrer que* $f(F^{\perp}) = \left(f(F)\right)^{\perp}$.

**Exercice 10.69** ★

*Soit* $f$ *une isométrie vectoriel d'un espace euclidien* $(E,(.\,|\,.))$. *Montrer que*
$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right)^{\perp}.$$

**Exercice 10.70** ★

*Montrer que l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à la matrice*
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
*est une réflexion dont on déterminera l'axe.*

### Exercice 10.71 ★ Similitudes d'un espace euclidien

*Un endomorphisme $f$ d'un espace euclidien $(\mathrm{E},(.\mid.))$ est une similitude vectorielle s'il existe une isométrie $u$ et un réel strictement positif $k$ tels que $f = ku$.*

1. *Montrer que si $f$ est une similitude vectorielle alors $f$ conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :*
$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\quad \big[(x\mid y)=0 \implies (f(x)\mid f(y))=0\big].$$
2. *Réciproquement, on suppose que $g$ est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.*
   (a) *Pour $a,b\in\mathrm{E}$ unitaires, calculer $(a+b\mid a-b)$.*
   (b) *Montrer que $\|g(a)\| = \|g(b)\|$. Peut-on avoir $\|g(a)\|=0$ ?*
   (c) *En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle $v$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $g=\lambda v$. Conclure.*

### Exercice 10.72 ★

*Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $f : \mathrm{E}\mapsto\mathrm{E}$ une application.*

1. *Montrer l'équivalence : $\forall x,y\in\mathrm{E},\ (f(x)\mid y) = -(x\mid f(y)) \iff f$ est linéaire et $\forall x\in\mathrm{E}$, $(f(x)\mid x)=0$*
2. *Que peut-on dire de la matrice de $f$ dans une base orthornormale $e$ ?*
3. *Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.*
4. *Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f o f$.*

### Exercice 10.73 ★

*Soit M la matrice d'un produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{M}^n$ définit également un produit scalaire.*

### Exercice 10.74 ★★

*Soit $\mathrm{A}=((a_{ij}))\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que*

1. $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$ ;
2. $\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\right| \leqslant n$. *Étudier de plus le cas d'égalité quand les coefficients de A sont tous positifs.*

### Exercice 10.75 ★ Oral CCP MP 2015

*Soit E un espace euclidien de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de E.*
*On note $(x|y)$ le produit scalaire de $x$ et de $y$ et $||.||$ la norme euclidienne associée.*

1. *Soit $u$ un endomorphisme de E, tel que : $\forall x\in\mathrm{E}, ||u(x)||=||x||$.*
   (a) *Démontrer que : $\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2\ (u(x)|u(y))=(x|y)$.*
   (b) *Démontrer que $u$ est bijectif.*
2. *Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$ , est un groupe.*
3. *Soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $e=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E.*
   *Prouver que : $u\in\mathscr{O}(\mathrm{E}) \iff (u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))$ est une base orthonormée de E.*

### Exercice 10.76 ★

*Soit E un espace vectoriel euclidien et $f$ une application de E dans E qui conserve les distances et vérifie $f(0)=0$. Montrer que $f\in\mathrm{O}(\mathrm{E})$.*

### Exercice 10.77 ★

1. *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté, donner la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.*
2. *Caractériser l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté donné par $\mathrm{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.*
3. *Caractériser l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et orienté donné par $\mathrm{B}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\3&2&6\end{pmatrix}$.*

### Exercice 10.78 ★ ENSEA 2001,Centrale 2009, Centrale 2016

*Soit E un espace euclidien de dimension $\mathrm{N}\geqslant 2$. Soit $f\in\mathrm{O}(\mathrm{E})$ un automorphisme orthogonal de E. On pose :*
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad p_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

1. *Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\operatorname{Im}(f-\mathrm{id}_\mathrm{E})$ sont orthogonaux.*
2. *Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\operatorname{Im}(f-\mathrm{id}_\mathrm{E})$ sont supplémentaires orthogonaux.*
3. *Soit $x\in\mathrm{E}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$. On note $p(x)$ cette limite. Montrer que $p$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_\mathrm{E})$.*

### Exercice 10.79 ★ CCP 2007

*On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel note $\langle .|.\rangle$. On introduit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par*
$$f(x)=x+2\alpha\langle x|e_1\rangle e_1$$
*où $\alpha\in\mathbb{R}$ est fixé.*

1. (a) *Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice A de $f$ dans la base $e$.*
   (b) *On considère $e_1'=ae_1+e_2$, $e_2'=be_1+e_2$ et $e_3'=e_3$. Donner les valeurs de $a$ et $b$ pour que $e'=(e_1',e_2',e_3')$ soit une base orthogonale directe et pour que $(f(e_1'),f(e_2'),f(e_3'))$ soit orthogonale.*
2. *On considère l'endomorphisme $g$ canonique associé à la matrice $\mathrm{A}^\mathrm{T}$.*
   (a) *Montrer que $g\circ f$ admet pour valeurs propres $1,\lambda$ et $\frac{1}{\lambda}$ où $\lambda\in\mathbb{R}^*$.*
   (b) *Donner les valeurs propres de $f\circ g$.*

### Exercice 10.80 ★ CCP 2014

*Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}^\mathrm{T}$. Montrer que $\mathrm{A}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*

### 10.0.8 Isométries vectorielles du plan euclidien

**Exercice 10.81** ★

*Identifier et préciser les éléments géométriques des endomorphismes $f$ et $g$ de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à :*

1. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ;
2. $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

**Exercice 10.82** ★

*Soit $\mathscr{P}$ un plan euclidien de base orthonormale $(i, j)$. Déterminer la matrice dans cette base de la réflexion $s$ d'axe $\mathrm{Vect}(2i - j)$.*

**Exercice 10.83** ★

*Démontrer que tout matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Que dire de la diagonalisabilité dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ?*

**Exercice 10.84** ★

*Soient $u$ et $v$ deux vecteurs non nuls de même norme d'un plan euclidien $\mathscr{P}$.*

1. *On note $(x, y)$ et $(x', y')$ les coordonnées respectives de $u$ et $v$ dans une base orthonormale $e$ de $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe une unique matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ telle que :*
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$
*Qu'a-t-on démontré ?*
2. (a) *Que peut-on dire des vecteurs $u + v$ et $u - v$ ?*
   (b) *Quelle est l'image de $u$ par la réflexion $s$ d'axe $\mathrm{Vect}(u + v)$ ?*
   (c) *Si $s'$ est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$, que dire de $r = s \circ s'$ et de $r(u)$ ?*
   (d) *Supposons que $r'$ soit une rotation vectorielle de $\mathscr{P}$ telle que $r'(u) = v$. Montrer, en considérant $r'' = r^{-1} \circ r'$ que $r = r'$. En quoi cela confirme-t-il le résultat de la première question ?*

### 10.0.9 Produit vectoriel

**Exercice 10.85** ★

*Soit $\mathrm{E}$ un espace euclidien de dimension $3$, et $(u, v)$ un système libre de $\mathrm{E}$. On définit l'application :*
$$f : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & (v \mid x).u + (u \mid x).v \end{cases}$$
*Montrer que $f$ est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.*

**Exercice 10.86** ★

*Soit $u, v, w$ trois vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension $3$. Démontrer :*

1. $(u \wedge v) \wedge w = (u \mid w)\, v - (v \mid w)\, u$. *(double produit vectoriel)*
2. $(w \wedge u) \wedge (u \wedge v) = [u, v, w]u$.
3. $[v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v] = [u, v, w]^2$.

**Exercice 10.87** ★

*Soit $u, v, w, t$ quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension $3$. Démontrer :*

1. $(u \wedge v \mid w \wedge t) = (u \mid w)(v \mid t) - (u \mid t)(v \mid w)$
2. $(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -[u, v, w]\, t + [u, v, t]\, w$
3. $[t, v, w]\, u + [u, t, w]\, v + [u, v, t]\, w = [u, v, w]\, t$.

**Exercice 10.88** ★★

*Soit $(x, y, z)$ une base d'un ev euclidien orienté $\mathrm{E}$ de dimension $3$. Déterminer $u, v, w \in \mathrm{E}$ tels que*
$$v \wedge w = x, \quad w \wedge u = y, \quad u \wedge v = z.$$

### 10.0.10 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

**Exercice 10.89** ★

*Montrer que*
$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
*est orthogonale et calculer $A^{-1}$.*

**Exercice 10.90** ★

*Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice*
$$A = I_n - 2u^{\mathrm{T}}.u$$

1. *Montrer que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Reconnaître $A$.*

**Exercice 10.91** ★

*Etudier l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrice $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.*

**Exercice 10.92** ★

*Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Quel endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ euclidien représente-t-elle ?*

*Montrer que $u$ est la composée d'une rotation et d'une réflexion.*

**Exercice 10.93** ★

*Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, $e = (i, j, k)$ la base canonique, on considère la rotation $r$ d'axe $\mathrm{Vect}(i + j + k)$ d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer la matrice de $r$ dans la base canonique.*

***Exercice 10.94*** ★★

*Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel, trouver une base $i, j$ telle que dans cette base, la transformation $u = xi + yj \mapsto (2x-y)i + (3x-y)j$ soit une rotation.*

***Exercice 10.95*** ★★

*On considère un espace euclidien $\mathrm{E}$ de dimension $n$ et $e$ une base de cet espace. On note $\mathrm{A}$ la matrice du produit scalaire dans cette base. Trouver une CNS sur la base $e$ pour que la matrice $\mathrm{A}$ soit orthogonale.*

***Exercice 10.96*** ★★

*Soit*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

*Trouver une CNS pour que $\mathrm{A}$ soit orthogonale. Caractériser alors l'endomorphisme associé à $\mathrm{A}$ dans la base canonique.*

***Exercice 10.97*** ★★

*Etudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel ayant pour matrice*

$$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$



*dans la base canonique.*

***Exercice 10.98*** ★★

*Etude dans $\mathbb{R}^3$ de l'endomorphisme ayant pour matrice $\mathrm{A}$ dans la base canonique, où*

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc+da) & 2(bd-ca) \\ 2(bc-da) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd+ba) \\ 2(bd+ca) & 2(cd-ba) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

***Exercice 10.99*** ★

*Montrer qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ possède 1 comme valeur propre en étudiant $\det(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)$.*

***Exercice 10.100*** ★ ***Oral CCP MP 2015***



*Soit $\mathrm{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté par la base orthonormée $(i, j, k)$.*

*Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathrm{E}$ dont la matrice dans la base $(i, j, k)$ est* $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.



1. (a) *Prouver que $f$ est un endomorphisme orthogonal.*
   (b) *Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $f$.*
2. *En déduire la nature de $f$ ainsi que ses éléments caractéristiques.*

***Exercice 10.101*** ★ ***Mines MP, X PC 2018***

*Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\mathrm{A}$.*

1. *Étudier la convergence de*
$$\frac{1}{p+1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \cdots + \mathrm{A}^p)$$
*lorsque $p \to +\infty$.*
2. *La suite $(\mathrm{A}^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?*

***Exercice 10.102*** ★ ***MINES MP***

*Soit $\mathrm{J}$ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.*
*Déterminer les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{J} + \mathrm{A}$ soit inversible ?*

***Exercice 10.103*** ★ ***Transformation de Cayley, Mines PC***

1. *Si $\mathrm{A}$ est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de $\mathrm{A}$ ?*
2. *Soit*
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{A} & \longmapsto & (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1} \end{array} \right. .$$
*Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sur*
$$\left\{\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\right\}.$$

### 10.0.11 Adjoint d'un endomorphisme

***Exercice 10.104*** ★

*Sur $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit pour $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{E}^2$,*

$$(\mathrm{M} \mid \mathrm{N}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{N})$$

*et pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, l'application*

$$\varphi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{A}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \end{array} \right.$$

a. *Vérifier que c'est un produit scalaire.*
b. *Déterminer l'adjoint de $\varphi_{\mathrm{A}}$.*

***Exercice 10.105*** ★

*Soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^\star$.*

a. *Vérifier que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.*
b. *Si $u$ est nilpotent, montrer que $u = 0$.*

***Exercice 10.106*** ★★

*On peut également définir la notion d'adjoint dans un espace préhilbertien de dimension infinie, mais l'adjoint n'existe pas toujours. On considère l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\left(f \mid g\right) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et l'endomorphisme*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & \mathrm{F} \end{array} \right. \quad \text{où } \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

*Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u^\star$ vérifiant $\forall (f,g)\in \mathrm{E}^2, \big(u(f)\mid g\big)=\big(f\mid u^\star(g)\big)$.*

9:25

**Exercice 10.107** ★

*Soit $\mathrm{E}$ un espace euclidien et $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On considère la norme subordonnée à la norme euclidienne :*

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

*Montrer que $|||u^\star||| = |||u|||$*

5:13

**Exercice 10.108** ★

*Soit $\mathrm{E}$ un espace euclidien et $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant*

$$\forall x\in \mathrm{E},\quad \|u(x)\|\leqslant\|x\|$$

a. *Montrer que $\forall x\in\mathrm{E}$, $\|u^\star(x)\|\leqslant\|x\|$ ;*
b. *Montrer que $\forall x\in\mathrm{E}$, $u(x)=x \Longleftrightarrow u^\star(x)=x$ ;*
c. *Montrer que $\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id_E})\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(u-\mathrm{id_E})$ ;*
d. *On définit pour $n\geqslant 0$,*

$$f_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u^k$$

*Montrer que la suite d'endomorphismes $f_n$ converge simplement vers un endomorphisme $f$ que l'on déterminera.*

## 10.0.12 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

**Exercice 10.109** ★

*Diagonaliser*

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

*dans une base orthonormale.*

**Exercice 10.110** ★

*Soit $(\mathrm{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension $n\geqslant 3$ et $a,b$ deux vecteurs unitaires de $\mathrm{E}$ formant une famille libre. On considère l'application :*

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E}&\longrightarrow&\mathrm{E}\\ x&\longmapsto&(a\mid x)\,a+(b\mid x)\,b\end{array}\right. .$$

1. *Montrer que $f$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathrm{E}$.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $f$ et diagonaliser $f$ dans une base orthonormée.*

**Exercice 10.111** ★

*Soient $(\mathrm{E},(.\mid.))$ un espace euclidien, $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a$ un vecteur unitaire de $\mathrm{E}$ et $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ donné pour tout $x\in\mathrm{E}$ par $u(x)=k\,(x\mid a)\,a+x$.*

1. *Montrer que $u$ est un endomorphisme autoadjoint.*
2. *En utilisant la matrice de $u$ dans une base bien choisie, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $k$ pour que $u$ soit un automorphisme orthogonal de $\mathrm{E}$. Dans chaque cas, identifier $u$.*

**Exercice 10.112** ★

*Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$\mathrm{A}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-4&4&-4\\-4&5&2&-2\\4&2&5&2\\-4&-2&2&5\end{pmatrix}$$

1. *Sans calcul, dite pourquoi $\mathbb{R}^4$ admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de $\mathrm{A}$.*
2. *Montrer que $f$ est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres réelles possibles pour $f$.*
3. *Sans calculer le polynôme caractéristique de $f$, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de $f$. En déduire le polynôme caractéristique de $f$.*
4. *Déterminer le sous-espace propre $\mathrm{E}(1)$. En donner une base, puis une base orthonormale.*
5. *Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{E}(-1)$ vérifie $\mathrm{E}(-1)=(\mathrm{E}(1))^\perp$. En déduire un vecteur générateur de $\mathrm{E}(-1)$.*
6. *Donner une base orthonormale dans laquelle la matrice $f$ est diagonale. Identifier $f$.*

**Exercice 10.113** ★

*Soit $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=1$. Montrer que $\mathrm{A}$ est diagonalisable et déterminer sans calcul son spectre ainsi que ses sous-espaces propres.*

**Exercice 10.114** ★

*Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Que dire de la diagonalisabilité des matrices $\mathrm{AA^T}$ et $\mathrm{A^TA}$ ?*
   (a) *Montrer que les produits $\mathrm{MN}$ et $\mathrm{NM}$ de deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ont les mêmes valeurs propres.*
   (b) *Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de $\mathrm{MN}$ (et donc $\mathrm{NM}$). Montrer que les sous-espaces propres $\mathrm{E_{MN}}(\lambda)$ et $\mathrm{E_{NM}}(\lambda)$ ont la même dimension.*
2. *Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{AA^T}$ et $\mathrm{A^TA}$ ont le même ordre de multiplicité.*
3. *En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $\mathrm{U}$ telle que $\mathrm{AA^T}=\mathrm{U^TA^TAU}$.*

**Exercice 10.115** ★ exo:2004:Dec:Mon:13:54:52

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives.
2. Démontrer l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.
3. Soit $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Existe-t-il une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$ ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur $S$ pour que $A$ soit inversible.

exo:2004:Dec:Sat:18:26:33

**Exercice 10.116** ★ **Ensi**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant :

exo:2004:Dec:Sat:18:35:53

1. $A$ et $A^T$ commutent ;
2. $A$ est nilpotente.

Montrer que $A = 0$.

exo:2004:Dec:Sat:19:37:07

**Exercice 10.117** ★

Déterminer les couples de matrices $(X, Y) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant

$$\begin{cases} X^T Y X & = I_n \\ Y^T X Y & = I_n \end{cases}$$

**Exercice 10.118** ★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$ où $\alpha$ est la plus petite et $\beta$ la plus grande valeur propre de $S$.

**Exercice 10.119** ★

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathfrak{L}(E)$. On définit l'ensemble

$$E_u = \{x \in E \mid \|u(x)\| = |||u||| \ \|x\|\}$$

1. Montrer que $E_u$ est un sous-espace vectoriel de $E$ différent de $\{0_E\}$.
2. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $E_u = E$.

**Exercice 10.120** ★★★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^T A = A^2.$$

Montrer que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.121** ★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$\begin{cases} A^T A = A A^T \\ A^2 = -I_n \end{cases}$$

Montrer que $A$ est une matrice orthogonale.

**Exercice 10.122** ★★ **Oral Mines 2000**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^3 = A^T A$.

1. On suppose $A$ inversible. Montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Donner un contre-exemple qui montre que $A$ n'est pas forcément diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si on ne suppose plus $A$ inversible, montrer que $A$ est encore diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exercice 10.123** ★ **Racine carrée d'une matrice symétrique positive**

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $R^2 = A$.

**Exercice 10.124** ★ **Décomposition polaire d'une matrice réelle**

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une unique matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telles que $M = \Omega S$.

**Exercice 10.125** ★

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathfrak{L}(E)$. On définit l'ensemble

$$E_u = \{x \in E \mid \|u(x)\| = |||u||| \ \|x\|\}$$

1. Montrer que $E_u$ est un sous-espace vectoriel de $E$ différent de $\{0_E\}$.
2. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $E_u = E$.

**Exercice 10.126** ★ **Oral CCP MP 2015**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où $I_3$ est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant $A^2$.
2. On suppose que $A$ est la matrice d'un endomorphisme $u$ d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

**Exercice 10.127** ★★★ **Type X**

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ (respectivement $\mu_1 \leqslant \mu_2$) les deux valeurs propres de $A$ (respectivement de $B$). Montrer que :

$$\mathrm{Tr}\,(AB) \leqslant \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2.$$

**Exercice 10.128** ★★ **Écrit CCP PC 2008 - Extrait**

*Dans cette partie,* $\mathrm{S}$ *désigne une matrice de* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *une matrice diagonale semblable à* $\mathrm{S}$*. On pose* $\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$*.*

1. (a) *Montrer que pour tout* $\mathrm{Y}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(\mathrm{DY}|\mathrm{Y})_n \leqslant \alpha\|\mathrm{Y}\|_n^2$.

   (b) *En déduire que pour tout* $\mathrm{X}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{(\mathrm{SX}|\mathrm{X})_n}{\|\mathrm{X}\|_n^2}\leqslant\alpha$

   (c) *En utilisant une décomposition du vecteur* $\mathrm{X}$ *sur une base orthonormée de vecteurs propres de* $\mathrm{S}$*, montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si* $\mathrm{X}$ *est un vecteur propre de* $\mathrm{S}$ *associé à la valeur propre* $\alpha$*.*

2. *Soit* $\mathrm{X}\in\mathfrak{M}(,\mathbb{1})\mathbb{R}$*. On note* $\mathrm{X}\geqslant 0$ *si tous les coefficients de* $\mathrm{X}$ *sont positifs.* $\mathrm{E}=\left\{\mathrm{X}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid \mathrm{X}\geqslant 0\right\}$, $\Sigma=\left\{\mathrm{X}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \|\mathrm{X}\|_n=1\right\}$*, et* $\mathrm{C}=\mathrm{E}\cap\Sigma$*.*

   (a) *Montrer que* $\mathrm{E}$ *est un fermé de* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*

   (b) *Montrer que* $\mathrm{C}$ *est un fermé borné de* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*

   (c) *Soit* $\varphi:\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},\ \mathrm{X}\longmapsto(\mathrm{SX}|\mathrm{X})_n$*. Donner l'expression de* $\varphi(\mathrm{X})$ *en fonction des coefficients de* $\mathrm{S}$ *et de ceux de* $\mathrm{X}$ *; en déduire que* $\varphi$ *est continue sur* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*

   (d) *On pose* $\mu=\sup_{\mathrm{X}\in\mathrm{C}}\varphi(\mathrm{X})$*. Justifier l'existence de* $\mu$ *et montrer qu'il existe* $\mathrm{X}_0$ *appartenant à* $\mathrm{C}$ *tel que* $\varphi(\mathrm{X}_0)=\mu$*.*

   (e) *Montrer que* $\mu\leqslant\alpha$*.*

3. *On suppose dans cette question que* $\mathrm{S}\geqslant 0$ *(ce qui signifie qu'on suppose tous les coefficients de* $\mathrm{S}$ *positifs ou nuls).*

   (a) *Si* $\mathrm{X}=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est un vecteur propre unitaire de* $\mathrm{S}$ *associé à la valeur propre* $\alpha$*, on pose* $\mathrm{W}=(|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$*.*

      i. *Montrer que* $\mathrm{W}$ *est élément de* $\mathrm{C}$*.*

      ii. *Montrer que* $|\varphi(\mathrm{X})|\leqslant\varphi(\mathrm{W})$*.*

      iii. *Montrer que* $|\alpha|\leqslant\mu$*.*

   (b) *En déduire* $\alpha\geqslant 0$*, puis que la matrice* $\mathrm{S}$ *admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre* $\alpha$*.*

   (c) *Montrer que pour tout* $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $|\lambda_i|\leqslant\alpha$*.*

**Exercice 10.129** ★ **Centrale 2007**

1. *Montrer que l'application*

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\times\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})\end{array}\right.$$

   *est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

2. *Soit* $\mathrm{B}$ *une matrice symétrique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que*

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{BMB}\end{array}\right.$$

   *est un endomorphisme symétrique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire précédemment défini.*

3. *Déterminer les éléments propres de* $f$ *dans le cas où* $n=2$ *et* $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$*.*

**Exercice 10.130** ★

*Soit* $\mathrm{A}\in$ *une matrice symétrique réelle d'ordre* $n$ *telle que* $\mathrm{A}^m=\mathrm{I}_n$ *pour un entier* $m\in\mathbb{N}^*$*. Montrer que* $\mathrm{A}^2=\mathrm{I}_n$*.*

**Exercice 10.131** ★★ **Mines 2011**

*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace euclidien et* $f$ *un endomorphisme symétrique de* $\mathrm{E}$*. Déterminer les endomorphismes symétriques* $g$ *de* $\mathrm{E}$ *tels que* $g^3=f$*.*

**Exercice 10.132** ★ **Centrale 2005**

*On définit*

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \left((x,y,z),(x',y',z')\right) & \longmapsto & xx'+yy'+zz'-\dfrac{1}{2}\left(xy'+yx'+zy'+yz'\right)\end{array}\right..$$

1. *Montrer que* $\varphi$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^3$*.*

2. *Soit* $e$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $f\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\mathrm{Mat}_e(f)=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$*. Montrer que* $f$ *est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien* $(\mathbb{R}^3,\varphi)$*. Conséquences ?*

**Exercice 10.133** ★

*On note* $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *(respectivement* $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*) l'ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres (respectivement strictement) positives.*

1. *Soit* $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que :*

$$\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\Longleftrightarrow\left[\forall\mathrm{X}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}\geqslant 0\right]$$

$$\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})\Longleftrightarrow\left[\forall\mathrm{X}\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}>0\right]$$

2. *Soit* $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

   (a) *Montrer que :*

$$\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\Longleftrightarrow\left[\exists\mathrm{M}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}):\quad \mathrm{A}=\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right]$$

   *Comparer* $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{Ker}\,\mathrm{M}$*.*

   (b) *Montrer que* $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+$ *si et seulement si* $\mathrm{A}$ *est une matrice de Gram, c'est-à-dire* $\mathrm{A}=\left(\langle v_i|v_j\rangle\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ *où* $v_1,\dots,v_n$ *sont des vecteurs d'un espace euclidien convenable.*

**Exercice 10.134** ★ 



*On note* $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices* $\mathrm{M}$ *symétriques réelles d'ordre* $n$ *vérifiant* $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AX} \geqslant 0$. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. *Montrer que :*
$$\left[\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right] \Longleftrightarrow \left[\exists \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ : \quad \mathrm{A} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}\right].$$
2. *Comparer* $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}\right)$, $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{AA}^\mathrm{T}\right)$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)$.
3. *Comparer* $\mathrm{Im}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}\right)$, $\mathrm{Im}\left(\mathrm{AA}^\mathrm{T}\right)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{Im}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)$.
4. *Comparer* $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}\right)$, $\mathrm{rg}\left(\mathrm{AA}^\mathrm{T}\right)$, $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)$.

**Exercice 10.135** ★★

*Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On note* $\|.\|$ *la norme euclidienne usuelle sur* $\mathbb{R}^n$.

1. *On pose* $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{AX}\|}{\|\mathrm{X}\|}$. *Vérifier que cette définition a un sens.*
2. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|\mathrm{X}_0\| = 1$ *et* $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \|\mathrm{AX}_0\|$.
3. *Montrer que* $(\mathrm{N}(\mathrm{A}))^2 = \max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})$.

**Exercice 10.136** ★ **CCP 2009**

*Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{AA}^\mathrm{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

1. *Montrer que* $\mathrm{A}$ *est inversible.*
2. *Montrer que* $\mathrm{A}$ *est symétrique.*
3. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

**Exercice 10.137** ★ **X 2007, Théorème du minimax de Courant-Fischer**

*Soit* $\mathrm{A}$ *une matrice symétrique réelle d'ordre* $n$. *Soient* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ *ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Soient* $r \in [\![1, n]\!]$ *et* $\mathscr{V}_r$ *l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension* $r$ *de* $\mathbb{R}^n$. *On pose*



$$\mu_r = \min_{\mathrm{V}\in\mathscr{V}_r}\left(\max_{\mathrm{X}\in\mathrm{V}, \|\mathrm{X}\|=1} \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AX}\right)$$

*où* $\|.\|$ *désigne la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que* $\lambda_r = \mu_r$.
2. *On considère* $\sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n, \|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|$. *Qu'est ce que cet objet ? Montrer le.*
3. *On note* $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n, \|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|$. *Soit* $\mathrm{A}'$ *une deuxième matrice symétrique réelle d'ordre* $n$ *et* $\lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$ *ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On note* $\mu'_r = \min_{\mathrm{V}\in\mathscr{V}_r}\left(\max_{\mathrm{X}\in\mathrm{V}, \|\mathrm{X}\|=1} \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}'\mathrm{X}\right)$. *Montrer que*
$$\mu'_r - \mu_r \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A} - \mathrm{A}').$$



**Exercice 10.138** ★★ **X 1992**

*Résoudre l'équation* $\mathrm{XX}^\mathrm{T}\mathrm{X} = \mathrm{I}_n$ *d'inconnue* $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.139** ★★ **Centrale 2005**

*Soit* $(\mathrm{E}, \langle .|. \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n > 1$. *Soit* $u$ *un endomorphisme de* $\mathrm{E}$ *vérifiant*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle x | u(x) \rangle = 0.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle x | u(y) \rangle = -\langle u(x) | y \rangle.$$
2. *Montrer que* $u^2$ *est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.*
3. *Montrer que* $\mathrm{Ker}\, u$ *et* $\mathrm{Im}\, u$ *sont supplémentaires orthogonaux.*
4. *Montrer que le rang de* $u$ *est pair (on utilisera la restriction de* $u$ *à* $\mathrm{Im}\, u$*).*
5. *On suppose que* $n = 3$. *Montrer qu'il existe une base* $e$ *de* $\mathrm{E}$ *telle que :*
$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

**Exercice 10.140** ★★ **CCP 2008**

1. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que :*
$$\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{AX} \geqslant 0.$$
*Comparer* $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})$.
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une et une seule matrice* $\mathrm{C} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A} = \mathrm{C}^2$.
3. *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) \geqslant 0$

**Exercice 10.141** ★★★ **ENS PC 2015**

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique. Si* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *on pose* $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{\langle \mathrm{A}x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 1\}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ *est fermé et borné. Montrer que* $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ *est un intervalle.*
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $\mathrm{A}$ *pour que* $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{0\}$.
3. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Déterminer les* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{a\}$.

### 10.0.13 Endomorphismes antisymétriques, matrices antisymétriques

**Exercice 10.142** ★

*Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique réelle. Que peut-on dire de son spectre complexe ?*

**Exercice 10.143** ★

*Déterminer les matrices* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A} + \mathrm{A}^\mathrm{T}$ *soit nilpotente.*

**Exercice 10.144** ★★★ **Centrale 2003**

*Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures et qu'elle est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exercice 10.145** ★ **Mines 2004**

*Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^T = -A$. *Montrer que* $A - I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.146** ★ **X PC 2015**

*Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $A$ *est antisymétrique si et seulement si pour tout* $P \in O_n(\mathbb{R})$, *la matrice* $P^{-1}AP$ *est a diagonale nulle.*

**Exercice 10.147** ★ **ENTPE**

*Soit* $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $M + M^T$ *soit nilpotente.*
*Montrer que* $M$ *est antisymétrique.*

**Exercice 10.148** ★ **Centrale PC**

*Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif.*

**Exercice 10.149** ★

*Un endomorphisme* $u$ *d'un espace euclidien* $E$ *est dit antisymétrique si*

$$\forall x \in E, \langle u(x)|x\rangle = 0.$$

*Soit* $u$ *un endomorphisme antisymétrique.*

1. *Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour* $u$ *?*
   *À quelle condition un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable ?*
2. *Établir que, pour tout* $x, y \in E$,

   $$\langle u(x)|y\rangle = -\langle x|u(y)\rangle.$$

   *En déduire que la matrice* $A$ *dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique est elle-même antisymétrique.*
3. *Soient* $A$ *une matrice antisymétrique réelle,* $\lambda$ *une valeur propre complexe de la matrice* $A$ *et* $X$ *un vecteur propre associé.*
   *En étudiant* $\overline{X}^T AX$, *établir que* $\lambda \in i\mathbb{R}$.

**Exercice 10.150** ★ **Mines MP**

*Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^T = -A$.

1. *Montrer que si* $n$ *est impair alors* $A$ *n'est pas inversible.*
2. *Montrer que si* $n$ *est pair,* $\det A \geqslant 0$. *Sous quelle condition l'inégalité est-elle stricte ?*

**Exercice 10.151** ★ **Mines MP**

*Montrer que* $A$ *antisymétrique réelle d'ordre* $n$ *est semblable à*

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*où* $C$ *est une matrice inversible d'ordre pair.*

### 10.0.14 Applications

**Exercice 10.152** ★

*Soit* $E$ *euclidien de dimension* $n$. *Soit* $f$ *une isométrie symétrique et* $g$ *un endomorphisme antisymétrique de* $E$ *vérifiant* $f o g = g o f$. *Calculer* $\big(f(x) \mid g(x)\big)$ *et montrer que* $f+g$ *et* $f-g$ *sont des isomorphismes.*

**Exercice 10.153** ★★★ **Déterminant de Gram**

*Soit* $(E, \langle.|.\rangle)$ *un espace préhilbertien réel.*
*On fixe un entier naturel non nul* $p$ *et des vecteurs* $x_1, \dots, x_p$ *de* $E$. *On introduit le* déterminant de Gram *de ces* $p$ *vecteurs :*

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det\left[\left(\langle x_i|x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right].$$

1. *Montrer que si la famille* $(x_1, \dots, x_p)$ *est liée alors* $G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. *On suppose que la famille* $(x_1, \dots, x_p)$ *est libre. Montrer qu'il existe une matrice* $P \in GL_p(\mathbb{R})$ *telle que (décomposition de Cholesky)*

   $$G(x_1, \dots, x_p) = \det\left(P^T.P\right).$$

   *Montrer que* $P$ *peut être triangulaire en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*
3. *En déduire que* $G(x_1, \dots, x_p)$ *est un réel positif et qu'il est nul si et seulement si* $(x_1, \dots, x_p)$ *est liée.*
4. *Déduire de la question 2. une démonstration de l'inégalité d'Hadamard :*

   $$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\det(M)| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)}$$

**Exercice 10.154** ★★★ **Déterminant de Gram et distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel**

*Soit* $(E, \langle.|.\rangle)$ *un espace préhilbertien réel.*
*Pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *et des vecteurs* $x_1, \dots, x_p$ *de* $E$, *on introduit le* déterminant de Gram *de ces* $p$ *vecteurs :*

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det\left[\left(\langle x_i|x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right].$$

*Soit* $V$ *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $E$. *Soit* $(e_1, \dots, e_p)$ *une base de* $V$. *Montrer que*

$$\forall x \in E, \quad d(x, V) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}.$$

**Exercice 10.155** ★

*Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. *Écrire* $A^{-1}$ *sans calcul.*

***Exercice 10.156*** ★★ ***Inégalité d'Hadamard et déccomposition d'Iwasawa, X 2013***

sRMS 2015 1031 CCP PC

*Soit* $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer qu'il existe une matrice* T *triangulaire supérieure et une matrice* $\Omega$ *orthogonale telles que*
$$\mathrm{M} = \Omega \mathrm{T} \text{ (décomposition d'Iwasawa de la matrice M).}$$
2. *En déduire l'inégalité d'Hadamard :*

sRMS 2012 305 X ESPCI PC

$$\det(\mathrm{M}^2) \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right).$$

***Exercice 10.157*** ★★

*On considère la matrice* $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*

sRMS 2012 306 X ESPCI PC

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j-2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*Montrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.*

***Exercice 10.158*** ★ ***CCP 2001***

sRMS 2013 891 Centrale PC

*Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= x-2y \end{cases}$.

***Exercice 10.159*** ★ ***Centrale 2013***

sRMS 2014 1006 TPE EIVP PSI

*Soient* A, B, C, D *des matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On pose* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0\end{pmatrix}$. *On considère aussi* $\mathrm{E} = \left\{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}) : \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\right\}$.

1. *Vérifier que si* $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ *alors* M *est inversible et calculer* $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{E}$.
2. *Montrer que si* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathrm{E}^2$ *alors* $\mathrm{M}\mathrm{M}' \in \mathrm{E}$.
3. *Déterminer* $\mathrm{E} \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$.

***Exercice 10.160*** ★ ***X 2013***

sRMS 2015 884 Centrale PC

*Soient* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique et* $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique et semblable à* A. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$.

***Exercice 10.161*** ★ ***CCP 2013***

*Soient* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ *est nilpotente. Montrer que* A *est une matrice antisymétrique. Le résultat reste-t-il valable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

***Exercice 10.162*** ★★★ ***Inégalité d'Hadamard***

*Prouver l'inégalité d'Hadamard :*

sRMS 2013 647 Mines Ponts PC

$$\forall \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\det(\mathrm{M})| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)}.$$

*Préciser le cas d'égalité et interpréter géométriquement cette inégalité.*

### 10.0.15 Algèbre bilinéaire

***Exercice 10.163*** ★ ***CCP PC 2015***

*Mots-clés : caractérisation des produits scalaires parmi les formes quadratiques dans le plan*

*Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ *de base canonique* $(e_1, e_2)$. *Pour* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{E}$, *on pose* $\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y}$. *Calculer* $\varphi(e_i, e_j)$ *pour* $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur* A *pour que* $\varphi$ *soit un produit scalaire.*

***Exercice 10.164*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

*Mots-clés : identité du parallélogramme, caractérisation du caractère euclidien d'une norme*

*Soient* (E, N) *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la norme* N *euclidienne si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \mathrm{N}(x+y)^2 + \mathrm{N}(x-y)^2 = 2\mathrm{N}(x)^2 + 2\mathrm{N}(y)^2.$$

***Exercice 10.165*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

*Mots-clés : famille obtusangle*

*Soit* $k \in \mathbb{R}$ *avec* $k > 1$, $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $n \geqslant 2$ *et* $v_1, \dots, v_n$ *des vecteurs de* E *tels que* $\forall i, \quad \|v_i\| = 1$ *et* $\forall i \neq j, \langle v_i, v_j\rangle \leqslant -\frac{1}{k}$. *Montrer que* $k+1 \geqslant n$.

***Exercice 10.166*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : famille équiangulaire*

*Soit* $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n$. *Montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathrm{E}$ *unitaires et distincts tels que* $\forall i \neq j, \quad \langle x_i, x_j\rangle = \alpha$.

***Exercice 10.167*** ★ ***TPE EIVP PSI 2014***

*Mots-clés : caractérisation des bases orthonormées*

*Soit* E *un espace pré-hilbertien. Soient* $e_1, \dots, e_n$ *des vecteurs de* E *tels que* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$.

1. *On suppose* E *de dimension* $n$. *Montrer que* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E.
2. *On suppose* $(e_1, \dots, e_n)$ *libre. Montrer que* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E.

***Exercice 10.168*** ★ ***Centrale PC 2015***

*Mots-clés : caractérisation des bases orthonormées*

*Soient* E *un espace euclidien et* $e = (e_1, \dots, e_p)$ *une famille de* $p$ *vecteurs de* E *telle que* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2$.

1. *Montrer que* $e$ *est génératrice.*
2. *Montrer que* $\|e_i\| \leqslant 1$ *pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$.
3. *Montrer que* $e$ *est une base orthonormée si et seulement si les* $e_i$ *sont unitaires.*

***Exercice 10.169*** ★ ***Mines Ponts PC 2013***

*Soit* $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien. Si* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *et* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *sont deux bases orthonormées directes de* E, *on pose* $\mathrm{A}(e,f) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \langle e_i, f_j\rangle^2$. *Montrer que* $\mathrm{A}(e,f)$ *ne dépend pas des bases orthonormées directes* $e$ *et* $f$.

***Exercice 10.170*** ★ ***ENS PC 2014***

*Mots-clés : fonction orthogonalement additive, caractérisation des endomorphismes comme orthogonalement additifs*

*On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer les $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ continues, impaires et telles que, pour tous $a, b$ de $\mathbb{R}^3$, $\langle a, b\rangle = 0$ implique $\psi(a+b) = \psi(a)+\psi(b)$.*

***Exercice 10.171*** ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

*Mots-clés : matrice de Gram, déterminant de Gram, distance à un sous-espace vectoriel*

*Soit $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Pour $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p) \in \mathrm{E}^p$, on pose $\mathrm{G}(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p) = (\langle \mathrm{U}_i, \mathrm{U}_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.*

1. *Montrer que si la famille $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p)$ est liée, alors $\det \mathrm{G}(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p) = 0$. Démontrer la réciproque.*
2. *Soit $\mathrm{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}$ de base $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p)$. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$ on a $d(x, \mathrm{F}) = \sqrt{\frac{\det \mathrm{G}(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p, x)}{\det \mathrm{G}(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_p)}}$, où $d(x, \mathrm{F})$ désigne la distance de $x$ à $\mathrm{F}$.*



***Exercice 10.172*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

*Mots-clés : matrice de Gram, rang d'une matrice de Gram*

*Soient $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de $\mathrm{E}$. Montrer que le rang de la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est égal au rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.*



***Exercice 10.173*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

*Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $\mathrm{A}$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles comptées avec multiplicités de $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$.*

***Exercice 10.174*** ★ ***ENS PC 2015***

*Mots-clés : image numérique*

*On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{\langle \mathrm{A}x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 1\}$.*

1. *Montrer que $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ est fermé et borné. Montrer que $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ est un intervalle.*
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{A}$ pour que $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{0\}$.*
3. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{W}(\mathrm{A}) = \{a\}$.*



***Exercice 10.175*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

*On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Déterminer $\{\langle \mathrm{A}x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n\}$.*

***Exercice 10.176*** ★ ***Centrale PC 2013***



*Mots-clés : endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien*

*Soient $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Tr}(f) = 0$.*

1. *Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\langle f(x), x\rangle = 0$.*
2. *Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathrm{E}$ dans laquelle la matrice de $f$ est à diagonale nulle.*

***Exercice 10.177*** ★ ***Centrale PC 2015***



*Mots-clés : endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien*

*Soient $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de trace nulle.*

1. *On suppose $u$ symétrique.*
   - (a) *Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.*
   - (b) *Montrer, par récurrence, qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ a une diagonale nulle.*
2. *On ne suppose plus $u$ symétrique. Montrer que le résultat de a) ii) est encore vrai.*

***Exercice 10.178*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

*Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^n, \quad \overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{X} = 0$. Montrer que $\mathrm{A} = 0$.*

### 10.0.16 Produits scalaires particuliers

***Exercice 10.179*** ★ ***CCP PC 2011***

*On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit*

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x+2y+z = 0 \quad \text{et} \quad x+y+z+t = 0\}.$$

*Déterminer une base de $\mathrm{F}$ et une base de $\mathrm{F}^\perp$.*

***Exercice 10.180*** ★ ***ENS PC 2013***

*Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les $a_{i,j}$ sont tous $> 0$. Soient $\mathrm{B} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ où $d_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ et $\mathrm{L} = \mathrm{A} - \mathrm{B}$.*

1. *Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) = (\mathrm{Im}\,\mathrm{M})^\perp$.*
2. *Déterminer $\mathrm{Ker}\,\mathrm{L}$.*
3. *Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathrm{L}^{\mathrm{T}}) = 1$.*
4. *Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ à coefficients non tous de même signe. Montrer qu'il existe $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$ à coefficients strictement positifs tel que $\mathrm{Y}$ soit orthogonal à $\mathrm{X}$.*

***Exercice 10.181*** ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

1. *Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{Tr}\,\mathrm{A})^2 \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\}$.*
2. *Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \det \mathrm{A} \leqslant \lambda \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\}$.*
3. *Peut-on généraliser à $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les résultats (a) et (b) ?*

***Exercice 10.182*** ★ ***Centrale PSI 2014***

*Mots-clés : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien*

1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.*
2. *Indiquer comment calculer $\mathrm{Q}$ dans le cas $n = 2$.*

***Exercice 10.183*** ★ ***Centrale PC 2014***

*Mots-clés : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien*

*Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$, on pose $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=-n}^n \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$.*

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
2. Si $p\in[\![-n,n]\!]$, montrer qu'il existe un unique $A_p\in E$ tel que $\forall k\in[\![-n,n]\!],\quad A_p(k)=\delta_{k,p}$. Montrer que $(A_{-n},\dots,A_n)$ est une base orthonormée de $E$.
3. Soit $\Phi\colon P\in E\mapsto\int_{-1}^1 P(t)\,dt$. Montrer que $H=\{P\in E,\quad \Phi(P)=0\}$ est un hyperplan de $E$. Montrer qu'il existe $N\in E$ unitaire tel que $H=\{P\in E,\quad \langle P,N\rangle=0\}$. Exprimer $N$ dans la base $(A_{-n},\dots,A_n)$.



**Exercice 10.184** ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : base duale dans un espace euclidien

Soient $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $E^*=\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$. Si $(P,Q)\in E^2$, on pose $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.



1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
2. Soit $\varphi_k\colon P\in E\mapsto\langle X^k,P\rangle$. Montrer que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est une base de $E^*$.
3. Soient $(e_0^*,\dots,e_n^*)$ dans $E^*$ tels que $\forall(i,j)\in\{0,\dots,n\}^2,\quad e_i^*(X^j)=\delta_{i,j}$. Montrer que $(e_0^*,\dots,e_n^*)$ est une base de $E^*$.
4. Soient $H_n$ la matrice de passage de $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ à $(e_i^*)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\Delta_n=\det(H_n)$. Exprimer $\Delta_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 10.185** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : matrice de Gram, déterminant de Gram

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$, $f_1,\dots,f_n\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $A=(\int_a^b f_if_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\det A=0$ si et seulement si la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est liée.

**Exercice 10.186** ★ **Mines Ponts PSI 2014**



Mots-clés : matrice de Gram

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $i\in[\![1,n]\!],\quad \int_I f_i^2$ existe. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}=\int_I f_if_j$.

1. Montrer que $A$ est bien définie et que $(X,Y)\mapsto X^TAY$ est une forme bilinéaire positive sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $A\in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.



**Exercice 10.187** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Mots-clés : matrice de Gram

Soient $p\in\mathbb{R}_+^*$, $\alpha=(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ et $S=\left(\frac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence de $S$ et montrer que $S$ est symétrique.
2. Montrer que, pour $(s,p)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\int_0^{+\infty}e^{-st^{1/p}}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}u^{p-1}e^{-u}\,du$ sont convergentes; établir une relation entre les deux intégrales.
3. À l'aide de (b), montrer que $S$ a ses valeurs propres positives et donner une condition sur $\alpha$ pour que $S$ soit inversible.



**Exercice 10.188** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $2\,\mathrm{Tr}(AB)\leqslant\mathrm{Tr}(A^2)+\mathrm{Tr}(B^2)$.

**Exercice 10.189** ★ **ENS PC 2013**

Mots-clés : image numérique

Soient $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D\colon(u_n)\in E\mapsto(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que $D$ est un endomorphisme. Est-il surjectif ? Injectif ?
2. Déterminer les vecteurs propres de $D$.
3. Soit $F$ l'ensemble des suites de $E$ de carré sommable. Montrer que $F$ est stable par $D$. On munit $F$ du produit scalaire donné par $\forall((u_n),(v_n))\in F^2,\quad \langle(u_n),(v_n)\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$
4. Déterminer $H=\{\frac{\langle u,D(u)\rangle}{\langle u,u\rangle},\quad u\in F\setminus\{0\}\}$.

**Exercice 10.190** ★ **X ENS PSI 2014**

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ et $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\quad P(1)=0\}$.

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension. Soit pour $k\in[\![1,n]\!],\quad U_k=\frac{1}{k!}(X-1)^k$. Montrer que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$.
2. Soit $P\in E$. Donner les coefficients de $P$ dans la base $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Définir alors un produit scalaire sur $E$ pour que la base $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée.
3. Soit $\varphi\colon P\in E\mapsto(X-1)P'$. Vérifier que $\varphi$ est bien définie et est un endomorphisme. Calculer $\varphi(U_k)$ et en déduire que $\varphi$ est diagonalisable. Préciser les valeurs propres de $\varphi$.
4. Montrer que $\varphi$ est inversible et déterminer $\psi=\varphi^{-1}$.
5. Déterminer la norme subordonnée au produit scalaire défini en (b) de $\varphi$ et $\psi$.

**Exercice 10.191** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Mots-clés : dualité dans un espace euclidien

Soient $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de $E$. Montrer que, pour toute $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $E$ telle que, pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\quad m_{i,j}=\int_0^1 f_i(t)g_j(t)\,dt$. Étudier la réciproque.

**Exercice 10.192** ★ **Centrale PC 2015**

Soient $E=\mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$, $F=\{u\in E,\quad u_{/[-1,0]}=0\}$, $G=\{u\in E,\quad u_{/[0,1]}=0\}$. Si $(u,v)\in E^2$, on pose $\langle u,v\rangle=\int_{-1}^1 uv$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
2. Montrer que $F^\perp=G$.
3. Les sous-espaces $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?

### 10.0.17 Optimisation, calculs de distances

**Exercice 10.193** ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : image de $f\mapsto(\int_a^b f)(\int_a^b\frac{1}{f})$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, avec $a<b$ et $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Soit $\Phi\colon f\in E\mapsto\int_a^b f\int_a^b\frac{1}{f}$. L'application $\Phi$ est-elle majorée ? Minorée ? Déterminer les extrema éventuels de $\Phi$ et les fonctions en lesquels ils sont atteints.

**Exercice 10.194** ★ **Centrale PC 2015**

*On se place sur* $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}_+^*)$*. Justifier l'existence de* $\inf_{f\in E}(\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f})$*. Calculer cette borne inférieure. Est-elle atteinte ? Si oui, pour quelles fonctions ?*

**Exercice 10.195** ★ **X ESPCI PC 2012**

*Déterminer* $\inf\{\int_0^1 f^2, \quad f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 1\}$.

**Exercice 10.196** ★ **X ESPCI PC 2012**

*Soient* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \quad f(0) = \alpha \quad \text{et} \quad f(1) = \beta\}$*. Déterminer* $\inf\{\int_0^1 f'(t)^2 dt, \quad f \in E\}$.

**Exercice 10.197** ★ **CCP PC 2012**

*Soit* $E = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$*. On définit un produit scalaire sur* $E$ *en posant* $\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$ *; on note* $\|\ \|$ *la norme euclidienne associée. On pose* $\mathscr{V} = \{f \in E, f'' = f\}$, $\mathscr{W} = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ *et* $H = \{f \in E, \quad f(0) = \operatorname{ch} 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$.

1. *Montrer que* $(\operatorname{ch},\operatorname{sh})$ *est une base de* $\mathscr{V}$.
2. *Si* $f \in \mathscr{V}$ *et* $g \in E$*, montrer que* $\langle f,g\rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$*. Calculer* $\langle \operatorname{sh},\operatorname{ch}\rangle$, $\|\operatorname{sh}\|^2$ *et* $\|\operatorname{ch}\|^2$.
3. *Si* $f \in \mathscr{V}$ *et* $g \in \mathscr{W}$*, montrer que* $\langle f,g\rangle = 0$.
4. *Soit* $f \in H$*. Calculer* $\langle f,\operatorname{ch}\rangle$ *et* $\langle f,\operatorname{sh}\rangle$*. En déduire les coordonnées dans la base* $(\operatorname{ch},\operatorname{sh})$ *de la projection orthogonale* $\pi_{\mathscr{V}}(f)$ *de* $f$ *sur* $\mathscr{V}$.
5. *Déterminer* $\inf\left\{\int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)dt, \quad f \in H\right\}$.
6. *Montrer que* $\mathscr{W}$ *est l'orthogonal de* $\mathscr{V}$.

**Exercice 10.198** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

*Soit* $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$*. Pour* $(f,g) \in E^2$*, on pose* $\varphi(f,g) = \int_0^1 (fg + f'g')$.

1. *Montrer que* $\varphi$ *est un produit scalaire sur* $E$.
2. *Soient* $V = \{f \in E, \quad f(0) = f(1) = 0\}$ *et* $W = \{f \in E, \quad f = f''\}$.
   (a) *Montrer que* $V$ *et* $W$ *sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux.*
   (b) *Soit* $f \in E$*. Déterminer la projection orthogonale de* $f$ *sur* $V$.

**Exercice 10.199** ★ **Centrale PC 2014**

1. *Soit* $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$*. Si* $x = (x_1,\dots,x_n)$ *et* $y = (y_1,\dots,y_n)$ *sont dans* $\mathbb{R}^n$*, on pose* $\langle x,y\rangle = a_1x_1y_1 + \dots + a_nx_ny_n$*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $(a_1,\dots,a_n)$ *pour que cette application soit un produit scalaire.*
2. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, soit* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 4x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$*. Montrer que l'application* $\psi : (x,y,z) \in U \mapsto |x+y+z|$ *atteint son maximum sur* $U$*. Déterminer les points en lesquels ce maximum est atteint ainsi que la valeur de ce maximum.*

### 10.0.18 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

**Exercice 10.200** ★ **Mines Ponts PC 2009**

*Mots-clés : endomorphisme 1-lipschitzien d'un espace euclidien*

*Soient* $E$ *un espace euclidien et* $u \in \mathscr{L}(E)$*. On suppose que* $u$ *est* $1$*–lipschitzienne. Montrer que* $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

**Exercice 10.201** ★ **CCP PC 2011 , Mines Ponts PC 2014**

*Mots-clés : inégalité de Bessel, caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs*

*Soit* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien et* $p \in \mathscr{L}(E)$ *un projecteur. Montrer que* $p$ *est un projecteur orthogonal si et seulement si* $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

**Exercice 10.202** ★ **CCP PC 2006 , RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC**

*Soient* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n$*,* $p$ *un projecteur orthogonal de rang* $r$ *et* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base orthonormale de* $E$.

1. *Montrer :* $\forall x \in E, \quad \|p(x)\|^2 = \langle p(x),x\rangle$.
2. *Montrer que* $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

**Exercice 10.203** ★ **CCP PC 2013**

*Mots-clés : inégalité de Bessel, caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs*

*Soient* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien et* $H$ *un sous-espace de* $E$.

1. *Soit* $v \in E$ *de norme 1. Montrer que* $\varphi : x \mapsto \langle x,v\rangle v$ *est le projecteur orthogonal sur* $\mathrm{Vect}(v)$*. Montrer que* $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$ *pour tout* $x \in E$.
2. *Soient* $p_H$ *le projecteur orthogonal sur* $H$ *et* $x \in E$*. Montrer que* $p_H(x)$ *et* $x - p_H(x)$ *sont orthogonaux, puis que* $\|p_H(x)\| \leqslant \|x\|$.
3. *Soit* $p$ *un projecteur tel que, pour tout* $x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$*. En considérant un vecteur* $x$ *orthogonal à* $\operatorname{Ker} p$*, vérifier que* $x$ *et* $x - p(x)$ *sont orthogonaux. En déduire que* $p$ *est un projecteur orthogonal.*
4. *Soient* $p$ *et* $q$ *deux projecteurs. Montrer que* $p\circ q$ *est un projecteur si* $p$ *et* $q$ *commutent. La réciproque est-elle vraie ?*

**Exercice 10.204** ★ **TPE PSI 2010**

*Mots-clés : inégalité de Hadamard*

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de son produit scalaire canonique* $\langle\ ,\ \rangle$*, de norme associée* $\|\ \|$.

1. *Soit* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *de colonnes* $C_1,\dots,C_n$*. Montrer que* $|\det M| \leqslant \prod_{i=1}^n \|C_i\|$.
2. *En déduire que le volume d'un parallélépipède de côtés donnés est maximal s'il est droit.*

**Exercice 10.205** ★ **Mines Ponts PC 2015**

*Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. On suppose que* $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad |X^T AX| \leqslant \|X\|^2$*. Montrer que* $|\det A| \leqslant 1$*. Pour quelles* $A$ *a-t-on égalité ?*

***Exercice 10.206*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

sRMS 2015 652 Mines Ponts PSI

*Mots-clés : composée de deux projecteurs orthogonaux, diagonalisabilité d'une composée de projecteurs orthogonaux*

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle$ *un espace euclidien,* $F$ *et* $G$ *deux sous-espaces vectoriels de* $E$*, et* $p$ *et* $q$ *les projecteurs orthogonaux sur* $F$ *et* $G$*.*

sRMS 2015 882 Centrale PC

1. *Montrer que* $p \circ q \circ p$ *est symétrique.*
2. *Montrer que* $E$ *est somme directe orthogonale de* $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ *et de* $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.
3. *Montrer que* $p \circ q$ *est diagonalisable.*

***Exercice 10.207*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : composée de deux projecteurs orthogonaux*

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $p$ *et* $q$ *deux projecteurs orthogonaux de* $E$*,* $H = \operatorname{Im} p$ *et* $G = \operatorname{Im} q$*.*

1. *On suppose que* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *est valeur propre de* $p \circ q$ *et que* $x$ *est un vecteur propre associé. Montrer que* $x \in H$*, que* $q(x) - \lambda x$ *appartient à* $H^\perp$.
2. *Montrer que toutes les valeurs propres de* $p \circ q$ *sont dans* $[0, 1]$.
3. *On suppose que* $p$ *et* $q$ *commutent.*
   (a) *Montrer que* $p \circ q$ *est un projecteur orthogonal.*
   (b) *Montrer que* $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
   (c) *Montrer que* $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

sRMS 2019 1020 Centrale PC

***Exercice 10.208*** ★ ***CCP PC 2011***

sRMS 2015 990 CCP PSI

*Mots-clés : composée de deux réflexions orthogonales*

*Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $H_1$ *et* $H_2$ *deux hyperplans distincts,* $e_1$ *et* $e_2$ *deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à* $H_1$ *et* $H_2$*.*

1. *Si* $k \in \{1, 2\}$*, montrer que la symétrie orthogonale par rapport à* $H_k$ *est l'application* $s_k : x \mapsto x - 2\langle x, e_k\rangle e_k$.
2. *Montrer que* $x \in E$ *est fixe par* $s_2 \circ s_1$ *si et seulement si* $x \in H_1 \cap H_2$.
3. *Vérifier que la somme* $F = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ *est bien directe et que* $F$ *est stable par* $s_2 \circ s_1$.
4. *Soit* $e_1'$ *tel que* $\mathscr{B} = (e_1, e_1')$ *soit une base orthonormée directe de* $F$*. Montrer qu'il existe une unique rotation* $r$ *de* $F$ *tel que* $r(e_1) = e_2$*. Donner la matrice dans la base* $\mathscr{B}$ *de l'endomorphisme de* $F$ *induit par* $s_2 \circ s_1$ *à l'aide de* $r$*.*

sRMS 2013 980 TPE EIVP PSI

***Exercice 10.209*** ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

*Mots-clés : composée de deux symétries orthogonales*

*Soient* $E$ *un espace euclidien,* $A$ *et* $B$ *deux sous-espaces orthogonaux,* $s$ *et* $s'$ *les symétries orthogonales par rapport à* $A$ *et* $B$*. Montrer que* $s$ *et* $s'$ *commutent et que leur composée est une symétrie orthogonale par rapport à* $(A + B)^\perp$*. Étudier la réciproque.*

sRMS 2014 1209 TPE PSI

***Exercice 10.210*** ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

*Soient* $F$ *et* $G$ *deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien* $(E, \|\ \|)$*. Montrer que* $F$ *et* $G$ *sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si, pour tout* $x \in E$*,* $\|x\|^2 = d^2(x, F) + d^2(x, G)$*.*

***Exercice 10.211*** ★ ***Centrale PC 2015***

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien et* $a$ *dans* $E$ *de norme 1. Si* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on pose* $f_\alpha : x \in E \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$*.*

1. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Calculer* $f_\alpha \circ f_\beta$*. Pour quels* $\alpha$ *l'endomorphisme* $f_\alpha$ *est-il bijectif ?*
2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Déterminer les éléments propres de* $f_\alpha$*.*
3. *Pour quels* $\alpha$ *l'endomorphisme* $f_\alpha$ *est-il un automorphisme orthogonal de* $E$ *?*
4. *Pour quels* $\alpha$ *l'endomorphisme* $f_\alpha$ *est-il un endomorphisme symétrique de* $E$ *?*

### 10.0.19 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales explicites en dimension quelconque

***Exercice 10.212*** ★ ***Centrale PC 2009 , Centrale PC 2013***

*Soient* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des réels distincts. On pose, pour* $(P, Q) \in E^2$ *:* $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$*.*

1. *Montrer que* $\langle\ ,\ \rangle$ *est un produit scalaire sur* $E$*.*
2. *Déterminer une base orthonormée de* $E$*.*
3. *Déterminer la distance de* $Q \in E$ *au sous-espace* $H = \{P \in E, \quad \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$*.*

***Exercice 10.213*** ★ ***CCP PSI 2015***

*Soit* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$*.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ *soit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$*. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.*
2. *Donner une base orthonormée de* $\mathbb{R}_n[X]$*.*
3. *Soit* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$*. Déterminer l'orthogonal de* $F$ *.*
4. *Calculer la distance de* $X^n$ *à* $F$ *.*

***Exercice 10.214*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

*On munit* $\mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire qui à* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$*,* $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ *associe* $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$*. Soit* $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = 1\}$*. Si* $T \in \mathbb{R}_n[X]$*, déterminer la distance de* $T$ *à* $H$*.*

***Exercice 10.215*** ★ ***TPE EIVP PSI 2013***

*On munit* $\mathbb{R}[X]$ *du produit scalaire qui à* $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$*,* $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$ *associe* $\langle P, Q\rangle = \sum_{k \geqslant 0} a_k b_k$*.*

1. *Soit* $F$ *le sous-espace engendré par* $1 + X$*. Trouver une base de* $F^\perp$*. A-t-on* $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}[X]$ *?*
2. *Soit* $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$*. Déterminer* $G^\perp$*.*

***Exercice 10.216*** ★ ***TPE PSI 2014***

1. *Montrer que* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ *définit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *Calculer* $\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j\rangle$.
2. *Soit* $f : (u_1,\dots,u_n) \mapsto \int_0^{+\infty}(1-\sum_{k=1}^n u_k t^k)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$. *Montrer que $f$ possède un unique minimum global sur* $\mathbb{R}^n$ *et le déterminer.*

**Exercice 10.217 ★ Centrale PC 2014**

*Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{I} = \inf\{\int_0^1 (1-\sum_{i=}^n x_i t^i)^2 \mathrm{d}t, \quad (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

1. *Montrer qu'il existe un unique* $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ *réalisant la borne inférieure.*
   *On pose* $g : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x+i+1}$.
2. *Calculer* $g(k)$ *pour* $k \in \{1,\dots,n\}$. *Que vaut* $g(0)$ *?*
3. *Déterminer* $\mathrm{I}$ *et* $(a_1,\dots,a_n)$.

**Exercice 10.218 ★ X ESPCI PC 2013**

*Mots-clés : matrice d'un projecteur orthogonal sur une droite, matrice d'un projecteur orthogonal sur un hyperplan*

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de son produit scalaire euclidien canonique. Soit* $v = (v_1,\dots,v_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ *de norme 1.*

1. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur* $\mathrm{V}ect(v)$.
2. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur* $\mathrm{V}ect(v)^{\perp}$.

**Exercice 10.219 ★ TPE PSI 2014**

*Mots-clés : matrice d'un projecteur orthogonal sur une droite, matrice d'un projecteur orthogonal sur un hyperplan*

*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* $n$, $e = (e_1,\dots,e_n)$ *une base orthonormée de* $\mathrm{E}$. *Soit* $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n \in \mathrm{E}$ *un vecteur unitaire.*

1. *Déterminer la matrice dans la base e de la projection orthogonale sur* $\mathrm{V}ect(u)$.
2. *Soit* $\mathrm{F}$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{E}$ *constitué des vecteurs* $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ *tels que* $x_1 + \cdots + x_n = 0$. *Déterminer la matrice dans la base e de la projection orthogonale sur* $\mathrm{F}$.

**Exercice 10.220 ★ X ESPCI PC 2013**

*Mots-clés : trace de la transposition*

*On munit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. Soit* $\Phi : \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *L'application* $\Phi$ *est-elle une symétrie orthogonale ? Déterminer sa trace.*

**Exercice 10.221 ★ RMS 2014 1211 Écoles des Mines PSI**

*Mots-clés : distance à* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

*Soit* $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Justifier (brièvement) que* $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{N})$ *est un produit scalaire sur* $\mathrm{E}$.
2. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux.*
3. *Exprimer la distance d'une matrice* $\mathrm{M}$ *à l'ensemble des matrices symétriques en fonction de* $\mathrm{M}$ *et* $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

**Exercice 10.222 ★ Centrale PC 2014 , CCP PSI 2015**

*Mots-clés : distance à* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. *Si* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, *on pose* $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$. *Montrer que* $\langle\ ,\ \rangle$ *définit un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On note* $\|\ \|$ *la norme associée.*
2. *Soient* $\mathrm{M},\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}$ *symétrique et* $\mathrm{N}$ *antisymétrique. Montrer que* $\langle \mathrm{M}|\mathrm{N}\rangle = 0$.
3. *Si* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *déterminer* $\inf\{\|\mathrm{A}-\mathrm{M}\|^2, \quad \mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.

**Exercice 10.223 ★ Mines Ponts PSI 2014**

*Soient* $\alpha_i$ *des réels tels que* $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ *et* $\mathrm{A}$ *la matrice de taille* $n$ *de terme général* $\alpha_i\alpha_j$. *Étudier la matrice* $2\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$.

### 10.0.20 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales explicites en petite dimension

**Exercice 10.224 ★ X ESPCI PC 2012**

*Déterminer* $\inf\{\int_{-\pi}^{\pi}(|t| - a - b\cos t)^2\mathrm{d}t, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

**Exercice 10.225 ★ CCP PSI 2013**

*Calculer* $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\mathrm{d}t$.

**Exercice 10.226 ★ CCP PSI 2015**

*Calculer* $m = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\mathrm{d}x$.

**Exercice 10.227 ★ Centrale PSI 2014**

*Soient* $(a,b)$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire usuel* $\langle\ ,\ \rangle$ *et* $c \in \mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que* $\langle a,b\rangle^2 \neq \langle a,a\rangle \times \langle b,b\rangle$.
2. *Déterminer* $\lambda$ *et* $\mu$ *minimisant la quantité* $\sum_{k=1}^n |\lambda a_k + \mu b_k + c_k|^2$.

**Exercice 10.228 ★ RMS 2014 1205 Écoles des Mines PSI**

*Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *On pose*

$$\mathrm{M}(\theta) = \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & 1-\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

*Valeurs propres de* $\mathrm{M}(\theta)$, *espaces propres. Reconnaître* $\mathrm{M}(\theta)$.

**Exercice 10.229 ★ Centrale PC 2011**

*Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation* $x + y + z = 0$.

**Exercice 10.230 ★ TPE PSI 2014**

*Soient* $\mathrm{E}$ *un espace vectoriel euclidien de dimension 3,* $(e_1,e_2,e_3)$ *une base orthonormale de* $\mathrm{E}$, $\mathrm{P}$ *le plan vectoriel de vecteur normal* $n = (1,1,1)$. *Trouver la matrice dans la base* $(e_1,e_2,e_3)$ *de la projection orthogonale sur* $\mathrm{P}$.

**Exercice 10.231** ★ **CCP PC 2012**

*Soit* $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. *Montrer que* $(f,g) \mapsto \int_0^1 x f(x) g(x) \mathrm{d}x$ *définit un produit scalaire sur* E. *Déterminer le projeté orthogonal de* $x \mapsto 1$ *sur* $\mathrm{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.



**Exercice 10.232** ★ **Mines Ponts PC 2010**

*On munit* $\mathbb{R}^4$ *de son produit scalaire canonique* $\langle\ ,\ \rangle$. *Soit* F *d'équations* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$. *Déterminer la matrice* M, *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$, *de la projection orthogonale sur* F.



**Exercice 10.233** ★ **Centrale PSI 2014**

*On considère* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire habituel, et* F *l'ensemble des* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *tels que* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ *et* $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

1. *Donner la dimension de* F.
2. *Soit* $s_{\mathrm{F}}$ *la symétrie orthogonale par rapport à* F. *Trouver une base orthonormée* $(v_1, v_2, w_1, w_2)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *telle que* $s_{\mathrm{F}}(x) = \langle v_1, x\rangle v_1 + \langle v_2, x\rangle v_2 - \langle w_1, x\rangle w_1 - \langle w_2, x\rangle w_2$.
3. *Écrire la matrice de* $s_{\mathrm{F}}$ *dans la base canonique.*



**Exercice 10.234** ★ **CCP PC 2007**

*Déterminer la matrice canonique de la projection orthogonale de* $\mathbb{R}^4$ *sur* $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,0),(1,1,0,1)\}$.

**Exercice 10.235** ★ **CCP PSI 2014**

*L'espace* $\mathbb{R}^4$ *est muni de sa structure euclidienne usuelle. On pose* $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1. *Déterminer une base orthonormée de* F.
2. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur* F.



**Exercice 10.236** ★ **CCP PC 2015**

*Soit* $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *la base canonique de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^4$. *On considère le sous-espace* $\mathrm{P}: x + y + z + t = 0 = x - y + z - t$. *Trouver la matrice dans la base* $e$ *de la symétrie orthogonale par rapport à* P.



**Exercice 10.237** ★ **CCP PC 2010**

*Soient* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ *et* $\mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E},\quad \mathrm{P}(1) = 0\}$. *On munit* E *du produit scalaire défini par* $\langle a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + a_3\mathrm{X}^3, b_0 + b_1\mathrm{X} + b_2\mathrm{X}^2 + b_3\mathrm{X}^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

1. *Donner la dimension et une base de* H.
2. *Déterminer le projeté orthogonal de* P *sur* H.





**Exercice 10.238** ★ **CCP PC 2010**

*On munit* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *de son produit scalaire canonique. Déterminer le projeté orthogonal de* $\mathrm{X}^3$ *sur* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

**Exercice 10.239** ★ **CCP PSI 2013**

*On munit* $\mathbb{R}^4$ *de sa structure euclidienne canonique. Soit* P *le plan de* $\mathbb{R}^4$ *vérifiant le système d'équations* $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ *et* $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$. *Déterminer les matrices, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur* P *et de la symétrie orthogonale par rapport à* P.

### 10.0.21 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

**Exercice 10.240** ★ **X ESPCI PC 2009**

*Mots-clés : somme de matrices orthogonales*
*Soient* A *et* B *dans* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *Les matrices* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *et* AB *sont-elles dans* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *?*

**Exercice 10.241** ★ **CCP PSI 2010**

*Mots-clés : somme de matrices orthogonales*
*Soient* A *et* B *dans* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. *Les matrices* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, AB *et la comatrice de* A *sont-elles nécessairement dans* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *?*
2. *Montrer que si* $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, *alors le segment* $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ *est inclus dans* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.242** ★ **X ESPCI PC 2012**

*Mots-clés : caractérisation des isométries antisymétriques*
*Soient* $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer deux des trois propriétés impliquent la troisième :*

*(i)* $f$ *est une isométrie ;*
*(ii)* $f^2 = -\mathrm{id}$ ;
*(iii)* $\forall x \in \mathrm{E},\quad \langle f(x), x\rangle = 0$.

**Exercice 10.243** ★ **Centrale PC 2009**

1. *Une symétrie est-elle un endomorphisme symétrique ?*
2. *Une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?*
3. *Quelles sont les matrices de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *qui sont orthogonales et symétriques ?*
4. *Quelles sont les matrices de* $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ *qui sont diagonalisables ?*

**Exercice 10.244** ★ **CCP PSI 2008 , Mines Ponts PC 2015 , TPE PC 2015**

*Mots-clés : somme des éléments d'une matrice orthogonale*
*Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$ *et que* $|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}| \leqslant n$.

**Exercice 10.245** ★ **CCP PSI 2008**

*Mots-clés : transformation de Cayley*
*Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique. Montrer que* $\mathrm{I}_n + \mathrm{A}$ *est inversible, puis que* $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.246** ★ **CCP PC 2010**

*Mots-clés : transformation de Cayley*
*On munit* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{2n+1}$ *du produit scalaire canonique* $\langle\ ,\ \rangle$. *Soient* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ *la matrice canoniquement associée à* $f$. *On suppose que* A *est antisymétrique.*

1. *Montrer que* $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. *Montrer que l'unique valeur propre de* $f$ *est zéro.*
3. *Montrer que* $\mathrm{A} - \mathrm{I}_{2n+1}$ *et* $\mathrm{A} + \mathrm{I}_{2n+1}$ *sont inversibles.*
4. *On pose* $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_{2n+1} - \mathrm{A})(\mathrm{I}_{2n+1} + \mathrm{A})^{-1}$. *Montrer que* $\mathrm{B} \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$ *et* $\det \mathrm{B} = 1$.

**Exercice 10.247** ★ **Mines Ponts PC 2014**

*Mots-clés : transformation de Cayley*

*Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A + I_n \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est antisymétrique.*



**Exercice 10.248** ★ **Centrale PC 2015**

*Mots-clés : transformation de Cayley*

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.*



1. *Montrer que $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles, et que $(A - I_n)(A + I_n)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que $A \mapsto (A - I_n)(A + I_n)^{-1}$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques dans l'ensemble $\{M \in O_n(\mathbb{R}), \quad 1 \notin Sp(M)\}$.*

**Exercice 10.249** ★ **X ESPCI PC 2013**

*Mots-clés : caractérisation des similitudes, endomorphismes conservant l'orthogonalité*

*Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $u \in O(E)$ tels que $f = ku$.*

**Exercice 10.250** ★ **X ESPCI PC 2014 , X ESPCI PC 2015**

*Mots-clés : caractérisation des similitudes, endomorphismes conservant l'orthogonalité*

*Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.*

**Exercice 10.251** ★ **Centrale PC 2014**

*Mots-clés : matrices symplectiques*



*Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), \quad M^T J M = J\}$.*

1. *Soit $M = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$ avec $B, C$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartenant à $E$.*
   (a) *La matrice $M$ appartient-elle à $O_{2n}(\mathbb{R})$ ?*
   (b) *On pose $A = B + iC$. Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$.*
2. *Montrer que $E$ est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.*

**Exercice 10.252** ★ **CCP PC 2015**



*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et telle que $A^2 = A^T$. Montrer que $A$ est orthogonale. Si de plus $A$ est diagonalisable, trouver $A$.*

**Exercice 10.253** ★ **Mines Ponts PC 2015**

*Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^T = M^TM$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que $M$ est orthogonale.*

**Exercice 10.254** ★ **X ESPCI PC 2015**

*Soient $u, v \in O(\mathbb{R}^n)$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|$ et $\|v(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u^{-1} \circ v^{-1} \circ u \circ v(x) - x\| \leqslant \|x\|$.*

### 10.0.22 Endomorphismes et matrices symétriques

**Exercice 10.255** ★ **CCP PSI 2010 , Mines Ponts PSI 2014 , ENSAM PSI 2014**

*Mots-clés : trace de $u^* \circ u$*

*Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormales de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $A = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \langle u(e_i), \varepsilon_j\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormales choisies.*

**Exercice 10.256** ★ **Centrale PSI 2014**

*Mots-clés : trace de $u^* \circ u$, caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs*

*Soit $E$ un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\alpha(f) = Tr(f^* \circ f)$.*

1. *Calculer $\alpha(p)$ lorsque $p$ est un projecteur orthogonal.*
2. *Soit $p$ un projecteur quelconque de rang $r$. Montrer que $\alpha(p) \geqslant r$ et étudier le cas d'égalité.*

**Exercice 10.257** ★ **X ESPCI PC 2013**

*Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $f$ et $f^*$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$. On suppose que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. Montrer que $f + f^*$ est un automorphisme.*

**Exercice 10.258** ★ **CCP PSI 2015**

*Soient $E$ un espace euclidien, $a$ et $b$ dans $E$ non colinéaires et $u : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle b$.*

1. *Déterminer l'adjoint $u^*$ de $u$.*
2. *Montrer que $f = u + u^*$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.*

**Exercice 10.259** ★ **Centrale PC 2013**

*Mots-clés : sous-espaces stables par l'adjoint*

1. *On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à $A$, $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à $A^T$.*
   (a) *Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.*
   (b) *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F$ est stable par $u$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par $v$.*
2. *Déterminer les sous-espaces stables par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

**Exercice 10.260** ★ **CCP PSI 2010**

*Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $p$ le projecteur orthogonal sur $F$, et $f$ un endomorphisme auto-adjoint de $E$. Montrer que $p \circ f$ induit un endomorphisme auto-adjoint de $F$.*

**Exercice 10.261** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

*Mots-clés : adjoint d'une contraction*

*Soit $E$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.*

1. *Montrer que si $f(x) = x$ alors $f^*(x) = x$.*

2. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})$ *et* $\operatorname{Im}(f-\mathrm{id})$ *sont supplémentaires dans* E.

PSI **Exercice 10.262** ★ **ENSAM PSI 2015** sRMS 2013 112 ENS PC

*On munit* $E=\mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire* $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, *et on pose* $u(P)=\int_0^1 (X+t)^n P(t)\,dt$. *Montrer que* $u$ *est un endomorphisme autoadjoint bijectif.*

PC **Exercice 10.263** ★ **TPE PC 2015**

*Soient* E *un espace euclidien,* $u\in\mathscr{L}(E)$. *On note* $\|u\|=\sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|$.

1. *Montrer que* $\|u\|\geqslant\sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|$.
2. *Montrer que* $\|u\|=\sup_{\|x\|=1,\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle|$.
3. *Si* $u$ *est symétrique, montrer que* $\|u\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|$.

### 10.0.23 Généralités et applications du théorème spectral

sRMS 2013 115 ENS PC

PSI **Exercice 10.264** ★ **Mines Ponts PSI 2013**

.

*Mots-clés : partie symétrique d'une matrice nilpotente*

*Soient* $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2=0$ *et* $D=A+A^T$. *Montrer que* $\operatorname{Ker}D=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}(A^T)$ *et* $\operatorname{Im}D=\operatorname{Im}A\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(A^T)$.

PC **Exercice 10.265** ★ **CCP PC 2016** sRMS 2014 322 X ENS PSI

*Soit* $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $A^TA$ *est diagonalisable.*
2. *Soit* $\lambda$ *une valeur propre de* $A^TA$. *Montrer que* $\lambda$ *est positive.*
3. *Soit* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *la liste des valeurs propres de* $A^TA$. *En notant* $a_{i,j}$ *les coefficients de la matrice* A, *montrer que* $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}^2=\sum_{k=1}^n\lambda_k$.

PC **Exercice 10.266** ★ **X ESPCI PC 2015**

*Mots-clés : endomorphisme normal*

*Soit* $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\overline{A}^TA=A\overline{A}^T$. *Montrer que* A *est diagonalisable.*

PC **Exercice 10.267** ★ **Mines Ponts PC 2014**

1. *Soit* $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. *On suppose que* $a_{1,1}$ *appartient au spectre de* A. *Que peut-on dire de* A ?
2. *Soit* $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* $a=a_{1,1}$ *est valeur propre de* A, *que* $a$ *est la plus petite valeur propre de* A *et qu'elle est simple. Montrer que la première ligne de* A *est* $\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$.

sRMS 2012 311 X ESPCI PC

PSI **Exercice 10.268** ★ **CCP PSI 2014** sRMS 2012 312 X ESPCI PC

*Mots-clés : quotients de Rayleigh et valeurs propres*

*Soit* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n$. *Soient* $f\in\mathscr{L}(E)$ *un endomorphisme auto-adjoint,* $\lambda_1,\leqslant\dots\leqslant\lambda_n$ *ses valeurs propres. Soit* $x\in E$ *unitaire.*

1. *Montrer que* $\lambda_1\leqslant\langle f(x),x\rangle\leqslant\lambda_n$.
2. *Montrer que* $\langle f(x),x\rangle=\lambda_1\iff f(x)=\lambda_1x$.

**Exercice 10.269** ★ **ENS PC 2013**

*Mots-clés : quotients de Rayleigh et valeurs propres*

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de son produit scalaire canonique noté* $\langle\ ,\ \rangle$. *Soient* $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *avec* $\lambda_1\leqslant\dots\leqslant\lambda_n$ *le spectre ordonné de* A.

1. *Montrer que* $\lambda_1=\inf\{\langle Ax,x\rangle : x\in\mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|=1\}$.
2. *Soit* $x\in\mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x\|=1$ *et* $\langle Ax,x\rangle=\lambda_1$. *Montrer que* $Ax=\lambda_1x$.
3. *Soit* $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda_1$. *On note* $x^+$ *le vecteur de coordonnées* $\max\{x_i,0\}$ *et* $x^-$ *le vecteur de coordonnées* $\max\{0,-x_i\}$. *On a donc* $x=x^+-x^-$. *Montrer que* $\langle Ax^+,x^-\rangle\geqslant 0$.

**Exercice 10.270** ★ **ENS PC 2013**

*Mots-clés : théorème de Courant-Fisher, théorème d'entrelacement de Cauchy*

*Soient* $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *les valeurs propres de* A *avec* $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

1. *Si* $k\in\{1,\dots,n\}$, *montrer que :* $\lambda_k=\min\{\max\{\langle Ax,x\rangle,\quad x\in F \text{ et } \|x\|=1\},\quad F$ sous-espace de $\mathbb{R}$
2. *Soient* B *la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de* A, *et* $\mu_1,\dots,\mu_n$ *les valeurs propres de* B *avec* $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_{n-1}$. *Montrer que* $\lambda_1\leqslant\mu_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\mu_{n-1}\leqslant\lambda_n$.

**Exercice 10.271** ★ **X ENS PSI 2014**

*Mots-clés : théorème de Courant-Fisher, théorème d'entrelacement de Cauchy*

*Soit* E *un espace vectoriel euclidien de dimension* $n$, *le produit scalaire étant noté* $\langle\ ,\ \rangle$. *Soit* $u$ *un endomorphisme symétrique de* E *de valeurs propres* $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$.

1. *Montrer que* $\forall x\in E,\quad \langle u(x),x\rangle\leqslant\mu_1\|x\|^2$.
2. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* $k$. *Montrer que* $\min_{x\in F,\|x\|=1}\langle u(x),x\rangle\leqslant\mu_k$.
3. *On note* $\mathscr{E}_k$ *l'ensemble des sous-espaces de* E *de dimension* $k$. *Montrer que* $\mu_k=\max_{F\in\mathscr{E}_k}\min_{x\in F,\|x\|=1}\langle u(x),x\rangle$.
4. *Montrer que* $\mu_k=\min_{G\in\mathscr{E}_{n-k+1}}\max_{x\in G,\|x\|=1}\langle u(x),x\rangle$.
5. *Soit* A *une matrice symétrique et* $\widehat{A}$ *la matrice composée des* $n-1$ *premières lignes et colonnes de* A. *Soient* $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}$ *les valeurs propres de* $\widehat{A}$. *Montrer que* $\mu_1\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\mu_n$.

**Exercice 10.272** ★ **X ESPCI PC 2012**

*Mots-clés : racine carrée d'une matrice symétrique*

*Soit* $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *Déterminer le nombre de matrices* $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A=B^2$.

**Exercice 10.273** ★ **X ESPCI PC 2012**

*Soient* $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ *avec* $2\leqslant p<n$, $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *de rang* $p$ *et* $B=A^TA$.

1. *Montrer que* B *est inversible.*
2. *Montrer que* $AB^{-1}A^T$ *est un projecteur de rang* $p$.

***Exercice 10.274*** ★ ***ENS PC 2013***

*On note* $\|\ \|$ *la norme euclidienne canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on pose* $|||M||| = \sup\{\|MX\|,\quad X \in \mathbb{R}^n \quad\text{et}\quad \|X\| = 1\}$. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
*Déterminer* $\sup\{\mathrm{Tr}(AB),\quad B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad |||B||| = 1\}$.

***Exercice 10.275*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

1. *Soit* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. *Si* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *que dire de* $X^T AX$ ?
2. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad X^T AX \geqslant 0$ *si et seulement si le spectre de* $A$ *est inclus dans* $\mathbb{R}_+$. *Montrer sous cette condition que* $AX = 0$ *si et seulement si* $X^T AX = 0$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* $A^T + A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A^T$.

***Exercice 10.276*** ★ ***Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2014***

*Soient* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $B = A^3 + A + I_n$. *Montrer qu'il existe un polynôme* $T \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $A = T(B)$.

***Exercice 10.277*** ★ ***Mines Ponts PC 2013***

*Soient* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $B = A^2 + A + I_n$. *Montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $A = P(B)$.

***Exercice 10.278*** ★ ***Centrale PC 2009***

*Mots-clés : caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les endomorphismes symétriques*
*Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien.*

1. *Soit* $g \in \mathcal{L}(E)$ *symétrique tel que* $\langle g(z), z\rangle = 0$ *pour tout* $z \in E$. *Montrer que* $g = 0$.
2. *Soit* $g \in \mathcal{L}(E)$ *symétrique tel que* $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ *pour tout* $z \in E$. *Montrer que* $g$ *est un projecteur orthogonal.*

***Exercice 10.279*** ★ ***Centrale PC 2009***

*Mots-clés : racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif*
*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base de* $E$, *et* $f : x \in E \mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.

1. *L'endomorphisme* $f$ *est-il symétrique ? Est-il défini positif ?*
2. *Montrer qu'il existe* $v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $v^2 = f^{-1}$.

***Exercice 10.280*** ★ ***Centrale PC 2009***

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 2$, $a$ *et* $b$ *deux vecteurs de* $E$ *linéairement indépendants, et* $\varphi : x \in E \mapsto \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle$.

1. *Montrer qu'il existe un unique* $u \in \mathcal{L}(E)$ *symétrique tel que* $\forall x \in E,\quad \varphi(x) = \langle u(x), x\rangle$.
2. *Déterminer le noyau et l'image de* $u$.
3. *Calculer* $\max_{\|x\|=1} \varphi(x)$ *et* $\min_{\|x\|=1} \varphi(x)$.

***Exercice 10.281*** ★ ***Mines Ponts PC 2013***

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $a$ *et* $b \in E$ *linéairement indépendants, et* $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \frac{\langle x,a\rangle\langle x,b\rangle}{\|x\|^2}$. *Déterminer les extrema de* $f$.

***Exercice 10.282*** ★ ***CCP PSI 2011 , Mines Ponts PC 2013 , CCP PSI 2014***

*Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $MM^T M = I_n$. *Montrer que* $M$ *est inversible et symétrique. Déterminer* $M$.

***Exercice 10.283*** ★ ***Centrale PSI 2014***

1. *Trouver toutes les* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $MM^T M = I_n$.
2. *Montrer que d'autres solutions apparaissent si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Peut-on trouver des matrices non diagonales solutions ?*

***Exercice 10.284*** ★ ***CCP PC 2006***

*Mots-clés : majoration de* $N_1(A)$ *pour une matrice de projecteur orthogonal*
*Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = A$.

1. *Montrer que* $A$ *définit un projecteur orthogonal.*
2. *Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *exprimer* $\mathrm{Tr}(M^T M)$ *en fonction des coefficients de* $M$.
3. *Montrer que* $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$.

***Exercice 10.285*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

*Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *dont les valeurs propres répétées avec leur ordre de multiplicité sont* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. *Montrer que* $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

***Exercice 10.286*** ★ ***CCP PC 2006***

*Que dire de* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$ ?

***Exercice 10.287*** ★ ***ENSEA PSI 2010***

*Trouver les* $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.

***Exercice 10.288*** ★ ***X ESPCI PC 2013***

*Mots-clés : endomorphisme symétrique à valeur propre double*
*Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *ayant une valeur propre de multiplicité* $\geqslant 2$. *Si* $x \in \mathbb{R}^n$, *montrer que* $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ *est liée.*

***Exercice 10.289*** ★ ***Mines Ponts PC 2015***

*Soient* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $n \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 1$, *et* $(x_1, \dots, x_p)$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\quad \forall k \in \{1, \dots, p\},\quad Ax_k = 0\}$. *Déterminer la dimension de* $\mathcal{F}$.
*Il faut sans doute supposer que* $\mathcal{F}$ *est libre.*

***Exercice 10.290*** ★ ***X ESPCI PC 2013 , X ESPCI PC 2014 , Mines Ponts PC 2014***

*Mots-clés : spectre d'une somme de matrices symétriques*
*Soient* $A$ *et* $B$ *dans* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$ *avec* $\leqslant a'$ *et* $b \leqslant b'$. *On suppose que* $\mathrm{Sp}(A) \subset [a, a']$ *et* $\mathrm{Sp}(B) \subset [b, b']$. *Montrer que* $\mathrm{Sp}(A + B) \subset [a + b, a' + b']$.

***Exercice 10.291*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

*Mots-clés : racines d'un endomorphisme symétrique*
*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $u \in \mathcal{S}(E)$. *Montrer qu'il existe* $v \in \mathcal{S}(E)$ *tel que* $v^3 = u$. *Un tel endomorphisme est-il unique ?*

***Exercice 10.292*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : racines d'une matrice symétrique*

1. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une unique* $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $B^3 = A$.
2. *Déterminer* $B$ *pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

***Exercice 10.293*** ★ ***Centrale PC 2014***

*Mots-clés : racines d'une matrice symétrique*

*Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Existe-t-il* $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $B^7 = A$. *A-t-on unicité ?*

***Exercice 10.294*** ★ ***Centrale PSI 2015***

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *pour qu'il existe* $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A = S^2 + S + I_n$.
2. *Déterminer l'ensemble des matrices* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *pour lesquelles il existe une unique* $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A = S^2 + S + I_n$. sRMS 2014 1212 TPE PSI

***Exercice 10.295*** ★ ***CCP PSI 2013***

*Mots-clés : valeurs propres de la partie symétrique d'une matrice*

*Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. *On note* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *le spectre ordonné de* $S$. *Si* $\mu$ *est une valeur propre réelle de* $A$, *montrer que* $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

***Exercice 10.296*** ★ ***Navale PSI 2013 , CCP PC 2014***

*Mots-clés : matrice symétrique nilpotente*

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(A + A^T)^p = 0$. *Montrer que* $A$ *est antisymétrique.* sRMS 2015 718 Mines Ponts PC

***Exercice 10.297*** ★ ***CCP PSI 2013 , CCP PSI 2015***

*Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *non nulle. Montrer que* $\frac{(\mathrm{Tr}\,A)^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}\,A$.

***Exercice 10.298*** ★ ***OdT 2013 19 149 TPE PSI*** sRMS 2015 988 CCP PSI

*Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale*

*Soit* $S$ *symétrique réelle et* $D$ *diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de* $S$. *On suppose* $S$ *et* $D$ *semblables. Calculer* $\mathrm{Tr}(S^2)$ *de deux manières et en déduire que* $S = D$.

***Exercice 10.299*** ★ ***X ESPCI PC 2014***

*Mots-clés : spectre d'une matrice hermitienne*

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A = \overline{A}^T$. *Montrer que les valeurs propres de* $A$ *sont réelles.*

***Exercice 10.300*** ★ ***CCP PC 2010***

*Mots-clés : diagonalisation en base orthonormale de* $J_n$

*Soit* $J_n$ *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont égaux à 1.* sRMS 2011 1128 CCP PC

1. *Montrer que* $J_n$ *est diagonalisable. Montrer qu'il existe* $P_n \in O_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P_n^{-1} J_n P_n$ *soit la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne* $n$, *colonne* $n$, *qui est égal à* $n$.
2. *Expliciter* $P_2$ *et* $P_3$.
3. *Montrer que* $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\quad BJ_3 = J_3B\}$ *est un espace vectoriel de dimension 5.*

***Exercice 10.301*** ★ ***CCP PC 2010***

*Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n+1$, $(e_0, \dots, e_n)$ *une base orthonormée de* $E$, $a$ *un vecteur unitaire tel que* $\langle a, e_0\rangle = 0$. *Pour* $k \in \{1, \dots, n\}$, *on pose* $a_k = \langle a, e_k\rangle$ *et*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

sRMS 2014 1214 CCP PSI

*On note* $s$ *l'endomorphisme de* $E$ *dont la matrice dans la base* $(e_0, \dots, e_n)$ *est* $S$.

1. *Montrer que* $S$ *est diagonalisable. Montrer que l'un des* $a_k$ *au moins est non nul ; déterminer le rang de* $S$.
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}\, s$ *et* $(\mathrm{Ker}\, s)^{\perp}$.
3. *Calculer* $\mathrm{Tr}\, s$ *et* $\mathrm{Tr}\, s^2$. *En déduire les valeurs propres non nulles de* $s$. *Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres non nulles.*

***Exercice 10.302*** ★ ***TPE PSI 2014***

*On munit* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de sa de structure euclidienne canonique. Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $a_{i,i} = -1$ *et* $a_{i,j} = \frac{1}{n-1}$ *si* $i \neq j$.

1. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}(A)$.
2. *Montrer que* $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ *est une base de* $\mathrm{Im}(A)$.
3. *Montrer que* $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A)$.

***Exercice 10.303*** ★ ***Mines Ponts PC 2015***

*Soient* $(a_1, \dots, a_{n-1}, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ *et* $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *où* $m_{i,n} = m_{n,i} = u_i$ *pour* $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_{i,i} = a_i$ *pour* $i \in \{1, \dots, n-1\}$, *les autres coefficients étant nuls. On suppose* $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$. *Comparer les valeurs propres de* $A$ *aux coefficients* $a_1, \dots, a_{n-1}$.

***Exercice 10.304*** ★ ***CCP PSI 2015***

*Soit* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $J$ *et* $K$ *sont diagonalisables dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et déterminer leurs éléments propres. Diagonaliser* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

### 10.0.24 Endomorphismes symétriques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}[X]$

***Exercice 10.305*** ★ ***CCP PC 2011***

*On définit* $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *par :* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \varphi(M) = 2M + M^T$.

1. *Montrer que* $\varphi^2 = 4\varphi - 3\,\mathrm{id}$. *L'endomorphisme* $\varphi$ *est-il diagonalisable ?*
2. *Déterminer les valeurs propres de* $\varphi$, *les sous-espaces propres, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de* $\varphi$.
3. *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + bM^T$. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $(a, b)$ *pour que* $\varphi_{a,b}$ *soit inversible.*
4. *Soit* $\langle\ ,\ \rangle$ *le produit scalaire défini sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *par :* $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$. *L'endomorphisme* $\varphi_{a,b}$ *défini en (c) est-il symétrique pour ce produit scalaire ?*

***Exercice 10.306*** ★ ***CCP PSI 2014***

*Justifier que l'on définit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *en posant* $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. *Montrer que l'endomorphisme* $P \mapsto (2X-1)P'(X) + (X^2 - X)P''(X)$ *est auto-adjoint.*

**Exercice 10.307** ★ **CCP PC 2015**



1. Soit $f : t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Montrer que $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $]-1,1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $t \mapsto \mathrm{P}(t) f(t)$ est intégrable sur $]-1,1[$.
3. Montrer que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
4. Montrer que $g : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (2\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'(\mathrm{X})$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Donner sa matrice dans la base canonique. Montrer que $g$ est diagonalisable.
5. On admet que $g$ est symétrique pour le produit scalaire précédent. Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ de polynômes unitaires telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $a_k \in \mathbb{R}$ tel que $g(\mathrm{P}_k) = a_k \mathrm{P}_k$.

**Exercice 10.308** ★ **Centrale PC 2015**

On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par $\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2, \quad \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^1 \mathrm{PQ}$. Soit $d : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{X}(1-\mathrm{X})\mathrm{P}'' - (2\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$.

1. Montrer que $\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2, \quad \langle d(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = -\int_0^1 x(1-x)\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}'(x)\mathrm{d}x$.



2. Déterminer le noyau de $d$. Montrer que les valeurs propres de $d$ sont dans $\mathbb{R}_-$.
3. Montrer que $d$ est diagonalisable.

   Précision : c'est l'endomorphisme $d_n$ induit par $d$ sur le sous-espace vectoriel stable $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ — de dimension finie —, qui est susceptible d'être diagonalisable. De même, la dernière question porte sur $\mathrm{P} \mapsto d_n(\mathrm{P}(1-\mathrm{X}))$.



4. L'endomorphisme $\mathrm{P} \mapsto d(\mathrm{P}(1-\mathrm{X}))$ est-il diagonalisable ?

### 10.0.25 Matrices symétriques positives



**Exercice 10.309** ★ **ENSAM PSI 2014**

Mots-clés : trace d'une composée d'endomorphismes symétriques positifs

Soient E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Déterminer $\mathrm{Tr}(f)$ en fonction des $e_i$ et des $f(e_i)$.
2. On suppose $f$ et $g$ autoadjoints, $f$ et $g$ positifs (au sens où toutes leurs valeurs propres sont $\geqslant 0$). Montrer que $\mathrm{Tr}(f \circ g) \geqslant 0$.

**Exercice 10.310** ★ **ENS PC 2013**

Mots-clés : racine carrée d'une matrice symétrique positive, ordre de Loewner sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.



1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \langle \mathrm{A}u, u \rangle > 0$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.
3. Soient A et B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{B}^{-1} - \mathrm{A}^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.311** ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : racine carrée d'une matrice symétrique positive, produit de matrices symétriques positives

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{R} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{R}^2$.
2. Montrer (en utilisant R) que AB est diagonalisable.
3. On suppose que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{AB}) \subset \mathbb{R}_+$.

**Exercice 10.312** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : mineurs diagonaux d'une matrice symétrique positive

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\mathrm{A}) \geqslant 0$.
2. Si $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, soit $\mathrm{A}_p = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. Montrer que $\det(\mathrm{A}_p) \geqslant 0$.

**Exercice 10.313** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : déterminant d'une somme de matrices symétriques positives

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(\mathrm{A} + \mathrm{I}_n) \geqslant 1 + \det(\mathrm{A})$.
2. Soient A et B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

**Exercice 10.314** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : quotients de Rayleigh et valeurs propres

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad a\|\mathrm{X}\|^2 \leqslant \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX} \rangle \leqslant b\|\mathrm{X}\|^2$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\forall x \in [a,b], \quad \mathrm{P}(x) > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est symétrique définie positive.

**Exercice 10.315** ★ **Centrale PSI 2009**

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{MA})$. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire si et seulement M est définie positive.

**Exercice 10.316** ★ **Centrale PC 2009**

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.
2. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $f_\mathrm{A} : \mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{AM} + \mathrm{MA} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $f_\mathrm{A}$ est un automorphisme.
3. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de $f_\mathrm{A}$.

**Exercice 10.317** ★ **CCP PC 2011**

Mots-clés : matrice de Hilbert, valeurs propres d'une matrice de Hilbert

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \left( \int_0^1 t^k \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{X}^k$.

1. Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$.
2. Écrire la matrice M de $\Phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Justifier que M est diagonalisable.

3. *Soit* $\mathrm{U} = (u_0, \dots, u_n)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{MU} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k\right)^2 \mathrm{d}t$. *En déduire que toutes les valeurs propres de* M *sont strictement positives.*
4. *Montrer que la plus petite valeur propre de* M *tend vers zéro quand* $n$ *tend vers l'infini.* Indication. *Utiliser la trace.*

### ***Exercice 10.318*** ★ ***CCP PC 2007***



1. *Montrer qu'en posant* $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$ *pour tout* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, *on définit un produit scalaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Si* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$, *montrer* $[\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}+\mathrm{BA})]^2 \leqslant 4(\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^2)(\mathrm{Tr}\,\mathrm{B}^2)$.
3. *Si* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *et* $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, *montrer* $\mathrm{Tr}(\mathrm{S}^{p+q}) \leqslant \sqrt{(\mathrm{Tr}\,\mathrm{S}^{2p})(\mathrm{Tr}\,\mathrm{S}^{2q})}$.

### ***Exercice 10.319*** ★ ***CCP PC 2011 , CCP PC 2013***

*Mots-clés : matrice symétrique positive unipotente*
*Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_n$. *Montrer que* $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_n$.

### ***Exercice 10.320*** ★ ***CCP PC 2011***



*Soient* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{C} = \mathrm{AB} + \mathrm{BA}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{C} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
2. *On suppose que* $\mathrm{C} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

### ***Exercice 10.321*** ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

*Soient* S *une matrice réelle symétrique et* A *une matrice réelle quelconque. On pose* $\mathrm{B} = \mathrm{SAS}$. *Montrer que* $\mathrm{B} \in \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$ *si et seulement si* S *est inversible et* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$.

### ***Exercice 10.322*** ★ ***TPE PC 2010***

*Mots-clés : valeurs singulières d'une matrice réelle carrée*
*Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.



1. *Montrer que* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}$ *sont diagonalisables.*
2. *Montrer que* MN *et* NM *ont les mêmes valeurs propres et que les espaces propres associées à une valeur propre* $\lambda$ *non nulle ont même dimension.*
3. *Montrer que* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}$ *ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. En déduire qu'il existe* $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}$.

### ***Exercice 10.323*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : décomposition polaire, sous-groupe compact maximal du groupe linéaire*
*On munit* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *de la norme donnée par* $\|\mathrm{A}\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ *pour* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Si* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, *montrer que* $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \|\mathrm{P}\| \leqslant 1$.
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{PS}$.
3. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. *On suppose que l'ensemble* $\{\|\mathrm{S}^p\|,\quad p \in \mathbb{Z}\}$ *est borné. Montrer que* $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$.
4. *Soit* G *un sous-groupe borné de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *contenant* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{G} = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

### ***Exercice 10.324*** ★ ***CCP PSI 2013***

*Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. *Soit* $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. *Montrer que* $a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i}\, a_{j,j}$.
2. *Soit* $p \in \{1, \dots, n\}$. *Que dire de* A *si :* $\forall i \geqslant p,\ a_{i,i} = 0$ ?

### ***Exercice 10.325*** ★ ***CCP PSI 2013***

*Mots-clés : majoration du déterminant sur* $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$
*Soient* $\mathrm{S} = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *et* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *convexe. On note* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *les valeurs propres de* S.

1. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} = (p_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{SP} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
2. *Exprimer les* $s_{k,k}$ *en fonction des* $p_{i,j}$ *et des* $\lambda_i$.
3. *Montrer que* $\sum_{i=1}^n f(s_{i,i}) \leqslant \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)$.
4. *En déduire que* $\det(\mathrm{S}) \leqslant s_{1,1} \times \dots \times s_{n,n}$.

### ***Exercice 10.326*** ★ ***Centrale PSI 2014***

*Mots-clés : majoration du déterminant sur* $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$

1. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Justifier que sa trace et son déterminant sont positifs, puis trouver une relation entre* $\det(\mathrm{A})$ *et* $(\frac{\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}}{n})^n$.
2. *Que devient cette relation dans le cas où* $\mathrm{A} = \mathrm{BC}$ *avec* $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ ?

### ***Exercice 10.327*** ★ ***X ESPCI PC 2014***

1. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}) \geqslant 0$.
2. *Soient* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_m$ *des parties de* $\{1, \dots, n\}$. *Pour* $1 \leqslant i, j \leqslant m$, *on note* $a_{i,j}$ *le cardinal de* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j$, *puis* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Montrer que* $\det \mathrm{A} \geqslant 0$.

### ***Exercice 10.328*** ★ ***ENSAM PSI 2014***

*Mots-clés : concavité logarithmique du déterminant sur* $\mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$
*Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique définie positive.*

1. *Montrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x,y)\mathrm{A}(x,y)^{\mathrm{T}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{\det(\mathrm{A})}}$. *(On admettra que le théorème de Fubini s'applique ici.)*
2. *Soit* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *symétrique et positive. Montrer que* $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant 4\sqrt{\det(\mathrm{AB})}$.

### ***Exercice 10.329*** ★ ***ENS PC 2015***

*Mots-clés : concavité de* $\det^{1/n}$ *sur* $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. *Soit* $\mathrm{C} \in \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{C})^{1/n} \geqslant 1 + (\det \mathrm{C})^{1/n}$.
2. *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *et* $t \in [0, 1]$. *Montrer que* $\det(t\mathrm{A} + (1-t)\mathrm{B})^{1/n} \geqslant t(\det \mathrm{A})^{1/n} + (1-t)(\det \mathrm{B})^{1/n}$.

### ***Exercice 10.330*** ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

1. *Soit* $\varphi$ *une forme bilinéaire symétrique. Montrer que* $\varphi$ *est définie positive si et seulement s'il existe* S *une matrice réelle symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives telle que pour tout* $x, y$, $\quad \varphi(x, y) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{SY}$.

2. Soit la forme quadratique $q\colon (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto -\det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & \mathrm{S} & \\ x_n & & & \end{pmatrix}$ avec S symétrique, définie positive. Montrer que $q$ est définie positive.

***Exercice 10.331*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

*Soient* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{AP}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$.

***Exercice 10.332*** ★ ***Centrale PC 2014 , CCP PSI 2014***

1. *Soit* $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale à coefficients diagonaux positifs. Montrer, si* $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, *que* $\mathrm{Tr}(\Omega\mathrm{D}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{D})$.
2. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Montrer, si* $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, *que* $\mathrm{Tr}(\Omega\mathrm{S}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{S})$.
3. *Le résultat est-il toujours vrai si on suppose seulement* $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *?*

***Exercice 10.333*** ★ ***X ENS PSI 2015***

*Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. *On munit* E *de sa structure euclidienne canonique. On note* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *la base canonique de* E.

1. *Soit* $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $u$ *est inversible, que* $u^{-1} \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ *et que* $u$ *et* $u^{-1}$ *sont diagonalisables dans une même base orthonormée.*
2. *Soit* $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(y), y\rangle$.
   *Si* $k \in \{1, \dots, n\}$ *et* $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, *on pose* $\delta_k(u) = \inf\{\langle u(x), x\rangle, \quad x \in \mathrm{E}, \quad \langle x, e_k\rangle = 1\}$.
3. *Montrer que* $\forall (u, v) \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})^2, \quad \delta_k(u+v) \geqslant \delta_k(u) + \delta_k(v)$.
4. *Si* $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ *et* $k \in \{1, \dots, n\}$ *montrer que* $\delta_k(u) = \frac{1}{\langle u^{-1}(e_k), e_k\rangle}$.
5. *Soient* $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ *et* A *la matrice de* $u$ *dans la base canonique. On note* $\mathrm{A}_k$ *la matrice extraite de* A *obtenue en enlevant la* $k$*-ième ligne et la* $k$*-ième colonne. Montrer* $\delta_k(u) = \frac{\det(\mathrm{A})}{\det(\mathrm{A}_k)}$.
6. *En déduire, si* A *et* B *sont dans* $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, *que* $\frac{\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\det(\mathrm{A}_k+\mathrm{B}_k)} \geqslant \frac{\det \mathrm{A}}{\det \mathrm{A}_k} + \frac{\det \mathrm{B}}{\det \mathrm{B}_k}$.

***Exercice 10.334*** ★ ***Centrale PC 2015***

*Soit* $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *triangulaire supérieure. On pose* $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{T}$.

1. *Montrer que* A *est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans* $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que* T *et* $\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$ *commutent si et seulement si* T *est diagonale.*

### 10.0.26 Endomorphismes et matrices antisymétriques

***Exercice 10.335*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

*Mots-clés : caractérisation des matrices antisymétriques*

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de son produit scalaire canonique noté* $\langle\ ,\ \rangle$. *Déterminer les* A *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle = 0$.

***Exercice 10.336*** ★ ***X ESPCI PC 2013***

*Mots-clés : matrices antisymétriques et nilpotentes*

*Déterminer les* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotentes et antisymétriques.*

***Exercice 10.337*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

*Mots-clés : matrices antisymétriques et nilpotentes*

*On munit* $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique.*

1. *Caractériser les* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = 0$.
2. *Déterminer les matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétriques et nilpotentes.*

***Exercice 10.338*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : endomorphisme antisymétrique en dimension paire*

*Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ *antisymétrique.*

1. *Montrer que* $f^2$ *est diagonalisable. Que peut-on dire des valeurs propres de* $f^2$ *?*
2. *Soient* $a$ *une valeur propre non nulle de* $f^2$ *et* $x$ *un vecteur propre associé. Montrer que* $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ *et* $\mathrm{Vect}(x, f(x))^{\perp}$ *sont stables par* $f$.
3. *On suppose de plus* A *inversible. Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *telle que :* $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}$.

***Exercice 10.339*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

*Soient* A, S *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* A *antisymétrique et* S *symétrique. Les matrices* A *et* S *peuvent-elles être semblables ?*

### 10.0.27 Espaces euclidiens de dimension 3

***Exercice 10.340*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

*Mots-clés : formule du double produit vectoriel*

*L'espace* $\mathbb{R}^3$ *est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Montrer, sans calcul, que* $\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \quad u \wedge (v \wedge w) = -\langle u, v\rangle w + \langle u, w\rangle v$.

### 10.0.28 Rotations en dimension 3

***Exercice 10.341*** ★ ***X ESPCI PC 2012 , ENSAM PSI 2014 , Centrale PC 2015***

*Mots-clés : caractérisation des rotations en dimension 3*

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne canonique orientée. Soit* $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*(i)* $f$ *est une rotation.*
*(ii)* $f$ *vérifie* $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

***Exercice 10.342*** ★ ***Centrale PC 2009***

*Mots-clés : quart de tour*

*Soient* $(\mathrm{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien orienté de dimension 3 et* $u \in \mathrm{E}$ *unitaire. Soit* $f\colon x \mapsto \langle x, u\rangle u + u \wedge x$.

1. Montrer que $f$ est une isométrie de E.
2. Caractériser $f$.
3. Quelles sont les isométries $g$ de E telles que $g^2 = f$ ?



**Exercice 10.343** ★ **Centrale PC 2009**

Mots-clés : quart de tour

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$$



Caractériser $f$.

**Exercice 10.344** ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : quart de tour

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, soit $f_{\vec{u}} : \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $f_{\vec{u}}$ est linéaire et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



peut-elle représenter une application $f_{\vec{u}}$ ? Si oui, déterminer $\vec{u}$.



**Exercice 10.345** ★ **CCP PSI 2014**

Mots-clés : quart de tour



Nature géométrique de la transformation de matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



**Exercice 10.346** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : quart de tour

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Soient $a$, $b$ dans $\mathbb{R}^3$ et $f : x \mapsto \langle a, x \rangle b + b \wedge x$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)$ pour que $f$ soit un isomorphisme.
2. Sous ces conditions, déterminer $f^{-1}$.



**Exercice 10.347** ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : matrice circulante de rotation

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une matrice de rotation. Donner alors l'axe et l'angle de cette rotation.

**Exercice 10.348** ★ **Centrale PSI 2014 , Centrale PSI 2015**

Mots-clés : matrice circulante de rotation

Soient $u, v, w$ les racines complexes comptées avec multiplicités de $X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. Montrer les relations $u^2+v^2+w^2 = a^2-2b$, $u^3+v^3+w^3 = -a^3+2ab-3c$.
2. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} v & w & u \\ u & v & w \\ w & u & v \end{pmatrix}.$$

Montrer que $f$ est une rotation si et seulement si $u, v, w$ sont les racines de $X^3 - X^2 + k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$. Préciser alors son axe et son angle.

**Exercice 10.349** ★ **TPE PSI 2010**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\pi$ et d'axe dirigé par le vecteur $(a,b,c)$.

**Exercice 10.350** ★ **Centrale PC 2011**

Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $u = e_1+e_2+e_3$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

**Exercice 10.351** ★ **Centrale PC 2013**

Soit $r$ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $(1,1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Écrire la matrice de $r$ dans la base canonique. Trouver des plans (P) et (Q) tels que $r$ soit la composée des réflexions par rapport à (P) et à (Q).

**Exercice 10.352** ★ **ENSAM PSI 2014**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + b^2 & \frac{a}{2} & \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ab \\ -\frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{b}{2} \\ \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ab & -\frac{b}{2} & a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}b^2 \end{pmatrix}.$$

Condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que A soit une isométrie. En déterminer alors les caractéristiques géométriques.

**Exercice 10.353** ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : caractérisation de deux rotations qui commutent

1. *Donner dans la base canonique la matrice de la rotation vectorielle d'axe* $\mathrm{D}$ *dirigé par* $2i-j+k$ *et d'angle* $\frac{\pi}{6}$*. Quelle est l'image du point* $(1,1,1)$ *?*



2. *Écrire les expressions analytiques de la rotation affine d'angle* $\frac{\pi}{6}$ *et d'axe* $\Delta$ *dirigé par* $2i-j+k$ *et passant par* $\mathrm{A}=(1,1,1)$*. Donner l'image par cette rotation de* $\mathrm{B}=(-1,3,2)$*.*
3. *Soient* $f$ *et* $g$ *dans* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$*. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $f$ *et* $g$ *commutent.*



**Exercice 10.354** ★ **Centrale PC 2014**

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne canonique orientée. Soit* $f_t \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *dont la matrice dans la base canonique est*

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \cos t \sin t & \cos^2 t & -\sin t \\ \sin^2 t & \cos t \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$



1. *Montrer que* $f_t$ *est une rotation. Déterminer son axe* $\Delta(t)$*.*
2. *Déterminer le lieu des axes* $\Delta(t)$ *lorsque* $t$ *parcourt* $]0,2\pi[$*.*



**Exercice 10.355** ★ **CCP PSI 2014**

*Étudier la transformation géométrique associée à*

$$\mathrm{M}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$



**Exercice 10.356** ★ **Mines Nancy PSI 2013**

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne canonique. Soit* $f$ *l'endomorphisme canoniquement associé à*

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$



*Justifier que* $f$ *est un automorphisme orthogonal de* $\mathbb{R}^3$*. Caractériser* $f$*.*



**Exercice 10.357** ★ **Mines Ponts PC 2014**

*Caractériser l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *de matrice*



$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$





**Exercice 10.358** ★ **CCP PSI 2014**

*Caractériser l'endomorphisme de matrice*

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

### 10.0.29 Autres endomorphismes en dimension 3

**Exercice 10.359** ★ **Mines Ponts PSI 2007**

*Mots-clés : exponentielle d'un endomorphisme antisymétrique de* $\mathbb{R}^3$

*Soit* $u$ *un endomorphisme antisymétrique de* $\mathbb{R}^3$*, muni du produit scalaire et de l'orientation usuels.*

1. *Préciser la forme de la matrice de* $u$ *dans la base canonique.*
2. *Montrer qu'il existe un unique vecteur* $\omega \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $u(x)=\omega \wedge x$ *pour tout* $x$*.*
3. *Justifier la convergence de* $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$*.*
4. *Montrer que* $\exp u$ *est une rotation, dont on précisera l'axe et l'angle.*

**Exercice 10.360** ★ **Centrale PC 2013**

*Mots-clés : exponentielle d'une matrice antisymétrique d'ordre 3*

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne canonique orientée. Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *antisymétrique.*

1. *Montrer qu'il existe un unique* $a \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{A}x = a \wedge x$*.*
2. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{R} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{AR} = \|a\|\mathrm{N}$ *où*

$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$*. Calculer* $\mathrm{S}_n$*. Montrer que* $(\mathrm{S}_n)$ *converge vers une matrice* $\mathrm{E}(\mathrm{A})$ *que l'on caractérisera.*
4. *Soient* $\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{B}$ *deux matrices antisymétriques de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$*.*

   (a) *Si* $\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{B}$ *commutent, montrer que* $\mathrm{E}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{E}(\mathrm{B})$ *commutent également.*

   (b) *La réciproque est-elle vraie ?*

**Exercice 10.361** ★ **Centrale PSI 2013**

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne orientée canonique. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$*. Déterminer les endomorphismes* $f$ *de* $\mathbb{R}^3$ *tels que pour tout* $x$*,* $f(x)$ *et* $x \wedge u$ *soient liés.*

**Exercice 10.362** ★ **RMS 2014 1216 Écoles des Mines PSI**

*Soient* $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien de dimension 3,* $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall (x,y)$*,* $\langle f(x),y\rangle = \lambda\langle x, f^{-1}(y)\rangle$*. Montrer que* $f$ *est la composée d'une rotation et d'une homothétie.*

**Exercice 10.363** ★ **CCP PC 2010**

*Mots-clés : endomorphisme antisymétrique en dimension 3*

*Soient* $\mathrm{E}$ *un espace euclidien orienté de dimension 3,* $a \in \mathrm{E}$ *unitaire et* $\Phi : x \mapsto a \wedge x$*. Si* $t \in \mathbb{R}$*, soit* $f_t : x \mapsto x + t\Phi(x)$*.*

1. *Déterminer le noyau et l'image de* $\Phi$*. Montrer que* $\Phi$ *possède une unique valeur propre et donner un vecteur propre associé.*
2. *Montrer :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad a \wedge (a \wedge x) = \langle a, x\rangle a - x$*. En déduire que* $\Phi^3 = -\Phi$*.*

3. Trouver un polynôme de degré au plus trois tel que $P_t(f_t) = 0$. Calculer $f_t^{-1}$.

PSI

***Exercice 10.364*** ★ ***ENSAM PSI 2011***

*Mots-clés : endomorphisme antisymétrique en dimension 3*
*Soient* $u \in \mathbb{R}^3$ *et* $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x \wedge u$.

1. *Montrer que* $f$ *est linéaire.*
2. *Déterminer l'image et le noyau de* $f$.
3. *En utilisant une base adaptée, déterminer* $f \circ f$.
4. *En déduire* $f^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

sRMS 2015 713 Mines Ponts PC

PSI

***Exercice 10.365*** ★ ***Centrale PSI 2014***

*Mots-clés : endomorphisme antisymétrique en dimension 3*
*Soit* $(a,b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. *On note* $f_a : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto a \wedge x \in \mathbb{R}^3$.

1. *Trouver l'adjoint de* $f_a$ *et de* $f_a \circ f_b$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $f_a \circ f_b$ *soit autoadjoint.*
3. *Calculer* $f_a \circ f_b(a)$ *et* $f_a \circ f_b(a \wedge b)$.
4. *L'endomorphisme* $f_a \circ f_b$ *est-il diagonalisable ?*

### 10.0.30 Polynômes orthogonaux

PSI

***Exercice 10.366*** ★ ***X ENS PSI 2015***

sRMS 2013 1052 CCP PC

*Mots-clés : déterminant de Hankel, polynômes orthogonaux par rapport à une forme linéaire*
*Soit* $\mathscr{L}$ *une forme linéaire sur* $\mathbb{C}[X]$. *On dit qu'une suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{C}[X]$ *est orthogonale par rapport à si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_n) = n, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad m \neq n \Rightarrow \mathscr{L}(P_m P_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{L}(P_n^2) \neq 0.$

1. *Dans cette question, on suppose qu'il existe* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *orthogonale par rapport à* $\mathscr{L}$.
   (a) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad \mathscr{L}(P_n P) = 0.$
   (b) *Soit* $R \in \mathbb{C}[X]$ *tel que pour tout* $S \in \mathbb{C}[X]$ *de degré inférieur ou égal à* $\deg R$, $\mathscr{L}(RS) = 0$. *Montrer que* $R = 0$.
   (c) *Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes unitaires orthogonale relativement à* $\mathscr{L}$.

sRMS 2013 897 Centrale PC

2. *Pour* $k \in \mathbb{N}$ , *on note* $\mu_k = \mathscr{L}(X^k)$ *et on pose pour tout* $n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$

   *On suppose qu'il existe* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *orthogonale pour* $\mathscr{L}$.

   (a) *Montrer que* $\Delta_n \neq 0$.
   (b) *Établir la réciproque et montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le coefficient dominant de* $P_n$ *est égal à* $\mathscr{L}(X^n P_n)\Delta_{n-1}/\Delta_n$.

sRMS 2013 982 TPE EIVP PSI

***Exercice 10.367*** ★ ***X ESPCI PC 2013***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux de Tchebychev*

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *montrer qu'il existe un unique polynôme* $T_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
2. *Déterminer* $\inf\left\{\int_{-1}^{1} \frac{|P(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{unitaire de degré } n\right\}$.

***Exercice 10.368*** ★ ***Mines Ponts PC 2015***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux de Tchebychev*

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *montrer l'existence d'un unique* $T_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx)$. *Déterminer le degré et le coefficient dominant de* $T_n$.
2. *Si* $P, Q$ *sont dans* $\mathbb{R}[X]$, *on pose* $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. *Justifier la définition de* $\langle P, Q\rangle$. *Montrer que cette application définit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.
3. *Montrer que la famille* $(T_n)_{n\geqslant 0}$ *est orthogonale pour ce produit scalaire.*

***Exercice 10.369*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux de Legendre*
*Pour* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $P_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. *Si* $n \geqslant 1$, *montrer que* $P_n$ *est de degré* $n$ *et admet* $n$ *racines distinctes dans* $]-1,1[$.
2. *Trouver un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$ *pour lequel la famille* $(P_n)_{n\geqslant 0}$ *est orthogonale. La famille est-elle orthonormée ?*

***Exercice 10.370*** ★ ***CCP PC 2013***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux de Legendre*
*On considère le produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$ *donné par* $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}, \quad L_n = [X^n(1-X)^n]^{(n)}$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $L_n$ *est de degré* $n$ *et de coefficient dominant* $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$.
2. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P(0) = P(1) = 0$. *Si* $Q \in \mathbb{R}[X]$, *montrer que* $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$.
3. *Montrer que* $L_n$ *est orthogonal à* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. *En déduire que* $(L_n)_{n\geqslant 0}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}[X]$.

***Exercice 10.371*** ★ ***Centrale PC 2013***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux d'Hermite*
*Si* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, *on pose* $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$. *Soit* $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto nP'' - 2XP'$.

1. *Vérifier que* $\langle\ ,\ \rangle$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Montrer que* $\Phi$ *est symétrique pour* $\langle\ ,\ \rangle$.
3. *Déterminer les valeurs propres de* $\Phi$.
4. *Déterminer une base de vecteurs propres de* $\Phi$.

***Exercice 10.372*** ★ ***TPE EIVP PSI 2013***

*Mots-clés : polynômes orthogonaux d'Hermite*
*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$. *Si* $P$ *et* $Q$ *sont dans* $\mathbb{R}_n[X]$, *on pose* $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$. *Soit* $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto 2XP' - P''$.

1. *Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.*
2. *Montrer que $\varphi$ est symétrique. Donner la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les valeurs propres de $\varphi$.*
3. *Si $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k : x \mapsto e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x^2}\right)$. Montrer que $H_k$ est polynomiale de degré $k$.*
4. *Montrer que $H_k$ vérifie l'équation différentielle : $y'' - 2xy' + 2ky = 0$.*
5. *Montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille orthogonale pour $\langle \quad , \quad \rangle$.*

sRMS 2014 384 X ESPCI PC

PSI

### Exercice 10.373 ★ Centrale PSI 2015

sRMS 2014 924 Centrale PSI

*Mots-clés : polynômes orthogonaux d'Hermite*

1. *Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels unitaires et deux à deux orthogonaux.*

   *Ajouter l'hypothèse $\deg(P_n) = n$.*
3. *Montrer que si $n$ est pair (resp. impair) alors $x \mapsto P_n(x)$ est paire (resp. impaire).*
4. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.*

sRMS 2012 318 X ESPCI PC

PSI

### Exercice 10.374 ★ Mines Ponts PSI 2013

*Mots-clés : boules sécantes, sphères sécantes*

*Soient $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien, $x_1, x_2 \in E$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$.*

sRMS 2013 654 Mines Ponts PC

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection des boules fermées (resp. ouvertes) de centres respectifs $x_1$ et $x_2$ et de rayons respectifs $r_1$ et $r_2$ soit non vide.*
2. *Même question pour les sphères.*

sRMS 2013 655 Mines Ponts PC

s PC

### Exercice 10.375 ★ ENS PC 2015

*Mots-clés : réseau*

*Si $(e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on pose $L(e_1, e_2) = \{me_1 + ne_2, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$. On note A l'ensemble des $a > 0$ tels que les boules ouvertes de rayon $a$ centrées sur les éléments de $L(e_1, e_2)$ soient disjointes.*

1. *Montrer que A est non vide.*
2. *Montrer que A est de la forme $]0, R]$ avec $R > 0$ .*
3. *Calculer R pour la base canonique.*
4. *Calculer R pour des vecteurs $(e_1, e_2)$ engendrant un pavage hexagonal.*

sRMS 2014 169 ENS PC

PSI

### Exercice 10.376 ★ Centrale PSI 2014

*Mots-clés : jauge d'un convexe, boule unité d'un e.v.n.*

*Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé de dimension finie.*

1. *Montrer que la boule unité fermée $B_E$ de E est un convexe, compact, symétrique par rapport à 0 et que 0 est un point intérieur de $B_E$.*
2. *Inversement, soit K un convexe, compact, symétrique par rapport à 0, tel que 0 est un point intérieur de K. On pose $J_K(0) = 0$ et, pour $x \in E\setminus\{0\}$, $\quad J_K(x) = \inf\{r > 0, \quad \frac{x}{r} \in K\}$. Montrer que $J_K$ définit une norme sur E et décrire sa boule unité fermée.*

### Exercice 10.377 ★ X ESPCI PC 2014

*Mots-clés : fonction distance à une partie*

*Soient $(E, \|\ \ \|)$ un espace vectoriel normé et Y une partie non vide de E. Si $x \in E$, on pose $f(x) = \inf\{\|x - y\|, \quad y \in Y\}$. Montrer que $f$ est 1-lipschitzienne.*

### Exercice 10.378 ★ Centrale PSI 2014

*Mots-clés : fonction distance à une partie, partie convexe*

*Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$. Soient $R > 0$ et $A(R) = \{x \in E, \quad d(x,A) \leqslant R\}$. Montrer que si A est convexe alors A(R) est convexe et fermé.*

### Exercice 10.379 ★ X ESPCI PC 2012

*Mots-clés : distance de Hausdorff*

*Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des parties fermées, bornées et non vides de $\mathbb{R}^3$. Pour tous A et B éléments de $\mathscr{E}$, on pose $d(A,B) = \sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right) + \sup_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} d(x,y)\right)$.*

1. *Montrer cette application est bien définie.*
2. *Montrer que $d(A,B) = 0$ si et seulement si $A = B$.*
3. *Montrer que $\forall (A,B,C) \in \mathscr{E}^3, \quad d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$.*

### Exercice 10.380 ★ Mines Ponts PC 2013

*Mots-clés : théorème de Hahn-Banach*

*Soient $(E, \|\ \ \|)$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(F)$ telle que $\forall x \in F, \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Existe-t-il $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que $g_{/F} = f$ et $\forall x \in E, \quad \|g(x)\| \leqslant \|x\|$ ?*

### Exercice 10.381 ★ Mines Ponts PC 2013

*Mots-clés : partie du plan fermée et verticalement convexe*

*Soit K une partie fermée de $[0,1]^2$. On suppose que, pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $\{y \in [0,1], \quad (x,y) \in K\}$ est un intervalle non vide. Montrer que K coupe la droite $y = x$.*

### Exercice 10.382 ★ ENS PC 2014

*Mots-clés : inégalité de Hölder*

*On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $p \in ]1, +\infty[, \quad \|x\|_p = (\sum_{k=1}^p |x_k|^p)^{1/p}$.*

1. *Soit $(p,q) \in ]1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p^p + \|y\|_q^q$. En déduire que $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.*
2. *Montrer que $\|x\|_p = \sup\{|\langle x, y\rangle|, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\|_q = 1\}$.*

### Exercice 10.383 ★ ENS PC 2014

*Mots-clés : adjoint en dimension quelconque, norme subordonnée de l'adjoint*

*Soient $(H_1, \langle \ , \ \rangle)$ et $(H_2, \langle \ , \ \rangle)$ deux espaces préhilbertiens réels, $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ et $T^* \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$. On suppose que : $\forall x \in H_1, \quad \forall y \in H_2, \quad \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$.*

1. *Si* $\mathrm{T}^*$ *est continue, montrer que* $\mathrm{T}$ *est continue. Comparer* $|||\mathrm{T}^*|||$ *et* $|||\mathrm{T}|||$.
2. *Si* $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}^*$ *est continue, l'application* $\mathrm{T}$ *est-elle continue ? Comparer alors* $|||\mathrm{T}|||$ *et* $|||\mathrm{T}\circ \mathrm{T}^*|||$.

**Exercice 10.384** ★ **X ESPCI PC 2013**

*Mots-clés : théorème du point fixe sur un compact*

*On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa norme euclidienne canonique et on pose* $\mathrm{K}=[a,b]^3$. *Soit* $f:\mathrm{K}\to\mathrm{K}$ *telle que* $\forall (x,y)\in \mathrm{K}^2,\quad x\neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$. *Montrer que* $f$ *possède un unique point fixe.*

**Exercice 10.385** ★ **X ENS PSI 2014**

*Mots-clés : théorème de Markov-Kakutani, points fixes de fonctions affines sur un convexe compact*

*Soit* $\mathrm{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie. Une partie* $\mathrm{C}$ *de* $\mathrm{E}$ *est dite convexe si pour tout* $t\in[0,1]$ *et pour tout* $(x,y)\in\mathrm{C}^2,\quad tx+(1-t)y\in\mathrm{C}$. *Une application* $\mathrm{T}$ *de* $\mathrm{E}$ *dans* $\mathrm{E}$ *est dite affine si et seulement si pour tout* $t\in[0,1]$ *et pour tout* $(x,y)\in\mathrm{E}^2,\quad \mathrm{T}(tx+(1-t)x)=t\mathrm{T}(x)+(1-t)\mathrm{T}(y)$.

1. *Soit* $\mathrm{C}$ *une partie convexe de* $\mathrm{E}$ *et* $\mathrm{T}$ *une application affine de* $\mathrm{E}$ *dans* $\mathrm{E}$. *Montrer que pour tout* $p\in\mathbb{N}^*$, *pour tout* $(t_1,\dots,t_p)\in[0,1]^p$ *tel que* $\sum_{i=1}^p t_i=1$, *pour tout* $(x_1,\dots,x_p)\in\mathrm{C}^p,\quad \sum_{i=1}^p t_i x_i\in\mathrm{C}$ *et* $\mathrm{T}(\sum_{i=1}^p t_i x_i)=\sum_{i=1}^p t_i\mathrm{T}(x_i)$.
2. *Soient* $\mathrm{C}$ *un compact convexe non vide,* $\mathrm{T}$ *une application affine telle que* $\mathrm{T}(\mathrm{C})\subset\mathrm{C}$ *et* $a\in\mathrm{C}$. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite d'éléments de* $\mathrm{C}$ *définie par* $\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \mathrm{T}^k(a)$, *où* $\mathrm{T}^k$ *désigne la* $k$*-ième itérée de* $\mathrm{T}$. *Montrer que la suite* $(x_n)$ *possède une suite extraite* $(x_{\varphi(n)})$ *convergente dont la limite est l'élément de* $\mathrm{C}$ *noté* $x$. *Établir que* $\mathrm{T}(x)=x$.
3. *Donner un exemple de couple* $(\mathrm{C},\mathrm{T})$ *comme en (b) où* $\mathrm{T}$ *possède un seul point fixe. Même question avec plusieurs points fixes.*
4. *Soient* $\mathrm{C}$ *un convexe compact non vide,* $\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_\mathrm{N}$ *une famille d'applications affines commutant deux à deux telles que* $\forall i\in[\![1,\mathrm{N}]\!],\quad \mathrm{T}_i(\mathrm{C})\subset\mathrm{C}$. *Montrer que les applications* $\mathrm{T}_i$ *possèdent un point fixe commun.*

**Exercice 10.386** ★ **X ESPCI PC 2013**

*Montrer que l'ensemble* $\left\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}\quad (n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.