Calcul différentiel

11.0.1 Limite et continuité

Exercice 11.1 ★

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données par :

1. $f(x, y) = \frac{x^3}{y}$
2. $f(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(xy) - \cos(xy)}{x^2 y^2}$
3. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$
4. $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{x}$
5. $f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}$
6. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Exercice 11.2 ★

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données par :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{xy^2}$
3. $f(x, y) = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x + y}$
4. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{xy}$
5. $f(x, y) = \frac{xy}{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y}$
6. $f(x, y) = \frac{\sin x - y}{x - \sin y}$

Exercice 11.3 ★★

Déterminer la limite lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$$

Exercice 11.4 ★★

Déterminer la limite lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{|x| + |y|}$$

Exercice 11.5 ★★

Déterminer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercice 11.6 ★★

Soit

$$f(x, y) = \frac{\sin^4 x + (1 - \cos y)^2}{4x^4 + y^4}$$

Montrer en utilisant un DL que $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{4}$.

Exercice 11.7 ★★

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ 03/11/09 et

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Déterminer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Exercice 11.8 ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

11.0.2 Dérivées partielles

Exercice 11.9 ★

Après avoir prouvé leur existence, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \ln(\operatorname{ch}(xy))$ $\operatorname{argsh}(x+y)$ $\arctan(x \tan y)$ avec $y \in \mathbb{R} \setminus \pi/2\mathbb{Z}$.
- $f(x, y) = x^y$ avec $x > 0$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = y \cos(x+y)$

Exercice 11.10 ★

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Après avoir prouvé leur existence, déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

- $f(x, y) = \varphi(x+y)$;
- $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$;
- $k(x, y) = \varphi(xy)$;
- $h(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt$

Exercice 11.11 ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Prouver que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
- Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 11.12 ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

- Prouver que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
- Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 11.13 ★

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \|(x, y)\|$ (norme euclidienne). Étudier la continuité de f et étudier les dérivées partielles de f .

Exercice 11.14 ★

On considère une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur $\mathbb{R}^2$ et on définit $f(x, y) = \|(x, y)\|$. Soit $\vec{h} \neq 0$ un vecteur. Montrer que $D_{\vec{h}} f(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 11.15 ★

Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Exercice 11.16 ★

La fonction $f(x, y) = |xy|^\alpha$ ($\alpha > 0$) est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.17 ★★

On considère la fonction f donnée par

$$f(x, y) = \arccos\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right).$$

- Calculer les dérivées partielles de f .
- En déduire une expression simplifiée de f .

Exercice 11.18 ★

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.19 ★

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Exercice 11.20 ★

Classique

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \rightarrow \det(A) \end{cases}$$

- On considère la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de f .
- En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point $A \in E$ est la forme linéaire

$$df_A : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ H & \rightarrow \operatorname{Tr}(\tilde{A}^T H) \end{cases}$$

où $\tilde{A}$ est la comatrice de A .

Exercice 11.21 ★

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. On considère la fonction

$$f: \begin{cases} U & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto A^{-1} \end{cases}$$

- Montrer que U est un ouvert de E .
- Soit $B \in E$. Montrer que pour t petit, $(I_n + tB)$ est inversible et que $(I_n + tB)^{-1} = I_n - tB + o(t)$.
- Soit $H \in E$ étudier la dérivée de f selon le vecteur H .
- Calculer les dérivées partielles de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au point A à l'aide de la comatrice de A .
- En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1(U, E)$ et calculer sa différentielle.

Exercice 11.22 ★

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$$

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n)$$

Exercice 11.23 ★ **ENS 1999**

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est α -homogène si

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \quad f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$$

Montrer que

$$(f \alpha\text{-homogène}) \iff \left(\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n) \right) \quad (ii)$$

Exercice 11.24 ★

On définit une application

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.25 ★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une application

$$f_\alpha: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f_\alpha(x_0, y) = f_\alpha(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_\alpha(x, y_0) = f_\alpha(x_0, y_0).$$

- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.
On prend $\alpha = \frac{1}{2}$ dans la suite et on pose $f = f_{\frac{1}{2}}$.
- Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 1 à l'origine.
- f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.26 ★ **CCP 2011**

Soit f la fonction définie par

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{x^n + y^n} \end{cases}$$

- Déterminer et représenter le domaine de définition D_f de f .
- Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f en utilisant la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z^n + 1}$.

3. Lorsque cette dérivée existe, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et l'écrire sous la forme d'une série de fonctions.

Exercice 11.27 ★

Soit l'application

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer les couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ pour lesquels :

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11.28 ★

exo:2005:Feb:Mon:18:01:10

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\Theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Theta(x) = f(2x, x^3)$. Montrer que Θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et écrire $\Theta'(x)$.
2. Soit $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x, y) = f(2x + y, x^2 - y)$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et écrire les dérivées partielles de Φ au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

exo:2005:Feb:Mon:17:14:52

11.0.3 Différentielle**Exercice 11.29** ★Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.Montrer que la fonction $f: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$ est différentiable en tout point $a \in E$ et calculer sa différentielle.**Exercice 11.30** ★Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\| \end{cases}$. Montrer que f n'est pas différentiable en 0_E .**Exercice 11.31** ★On munit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque $\|\cdot\|$ et on considère pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'application

exo:2005:Feb:Mon:17:29:52

$$f_k: \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^k \end{cases}$$

- a. Montrer que f_2 est différentiable en tout point $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en A .
- b. Même question pour f_k .

Exercice 11.32 ★

On considère la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées selon tous les vecteurs $h = (h_1, h_2)$ non nuls en $a = (0, 0)$ et que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.**Exercice 11.33** ★

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?**Exercice 11.34** ★Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.**Exercice 11.35** ★**Classique**

On considère l'application

$$f: \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \mapsto \det(A) \end{cases}$$

- a. On considère la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de f .
- b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point $A \in E$ est la forme linéaire

$$df_A: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ H & \mapsto \text{Tr}(\tilde{A}^T H) \end{cases}$$

où $\tilde{A}$ est la comatrice de A .**Exercice 11.36** ★On note $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. On considère la fonction

$$f: \begin{cases} U & \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

- a. Montrer que U est un ouvert de E .
- b. Soit $B \in E$. Montrer que pour t petit, $(I_n + tB)$ est inversible et que $(I_n + tB)^{-1} = I_n - tB + o(t)$.
- c. Soit $H \in E$ étudier la dérivée de f selon le vecteur H .
- d. Calculer les dérivées partielles de f dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ au point A à l'aide de la comatrice de A .
- e. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1(U, E)$ et calculer sa différentielle.

11.0.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ **Exercice 11.37** ★★Étudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

1. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11.38 ★★

Soit la fonction de deux variables $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$ lorsque

$(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité des dérivées partielles de f . La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.39 ★

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \int_x^y \varphi(t) dt \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 11.40 ★★

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x, y) = \int_0^y (x-t)\varphi(t)dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles de f .

Exercice 11.41 ★

Soient $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$G: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(\alpha(x), \beta(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.42 ★ CCP TSI

On considère la fonction f donnée par

$$f(x, y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

- Déterminer le domaine de définition D de f et montrer qu'il est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Simplifier l'expression de f en admettant que f est constante sur l'ouvert non convexe apparaissant dans son domaine de définition

Exercice 11.43 ★★★ Centrale PC 2018

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que F est continue.

- On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Indication 11.0 : On pourra se placer en (a, a) et poser $\varphi(t) = f(t) - (t-a)f'(a) - \frac{(t-a)^2}{2}f''(a)$.

Exercice 11.44 ★★★ X ESPCI PC 2011

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.45 ★★ X ESPCI PC 2011

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a \cos y, y + b \sin x) \in \mathbb{R}^2$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11.46 ★★ Centrale PC 2008

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.47 ★★ X ESPCI PC 2012

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées partielles sont bornées par 1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|$.

Exercice 11.48 ★★ X ESPCI PC 2012

Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui à P associe PP^T .

- Si M appartient à $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que la différentielle de f en M est surjective.
- On considère la restriction g de f à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle toujours surjective ?

Exercice 11.49 ★★ ENS PC 2013

Soient $d \in \mathbb{N}^*, A \in S_d^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'application $\Phi: (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est définie, continue et bijective.

Exercice 11.50 ★★ X ESPCI PC 2013

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne sur toute boule de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.51 ★★ CCP PC 2009

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

- Étudier la continuité de f .
- Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.52 ★★ X ESPCI PC 2014

Soit $F: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $F(P) = \int_0^1 \sin(tP(t)) dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

11.0.5 Dérivées de fonctions composées

Exercice 11.53 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en ses deux variables et en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(2t, 1+t^2) \end{cases}$$

Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 11.54 ★

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\rho, \theta) & \mapsto f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{cases}.$$

1. Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
3. Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g .

Exercice 11.55 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)$$

Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Exercice 11.56 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx, ty) = f(x, y)$$

Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Exercice 11.57 ★ **Oral CCP 2015**

On pose $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 11.58 ★ **Oral CCP 2015**

1. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Justifier l'existence et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.59 ★ **Oral CCP 2015**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.

(b) Donner la définition de " f différentiable en $(0, 0)$ ".

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

11.0.6 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ **Exercice 11.60** ★

Calculer, après avoir prouvé leur existence, les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$

3. $f(x, y) = yx^2 + \cos(x^2 + y)$

2. $f(x, y) = y^2(x - y)$

Exercice 11.61 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 11.62 ★

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x + \varphi(y)) \end{cases}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Exercice 11.63 ★ **CCP 2005**

Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que les dérivées partielles de deuxième ordre existe. Les calculer.

3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 11.64 ★ **CCP 2011**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F .

3. Calculer son laplacien.

Exercice 11.65 ★ **CCP 1995-1996**

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.

2. Écrire le gradient de f au point $(x, y) \in U$.

3. Montrer que si f possède un extremum local en un point $(x, y) \in U$ alors on a nécessairement $x = y = 1$.

4. Montrer que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(1+u, 1+v) = f(1, 1) + au^2 + buv + cv^2 + o_{(u,v) \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}}(u^2 + v^2)$$

où a, b, c sont des réels à préciser.

5. En déduire que f présente en $(1, 1)$ un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local.

11.0.7 Extremum de fonctions de deux variables

Exercice 11.66 ★ **Centrale-Supélec MP et CCP PSI**

Déterminer les extremums éventuels des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$;

2. $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 11.67 ★ **ENSAM**

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B celui de coordonnées $(0, b)$.

On désigne par $f(x, y)$ le carré du produit des distances du point M de coordonnées (x, y) à chaque côté du triangle ABO

Déterminer le maximum de f sur la portion de plan délimitée par le triangle ABO .

Exercice 11.68 ★

Soit U le carré de $\mathbb{R}^2$ donné par $[0, 2] \times [-1, 1]$. Rechercher sur ce fermé borné de $\mathbb{R}^2$ les extremums globaux de

$$f : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2 - 2x + xy + y^2 \end{cases}$$

Exercice 11.69 ★★

Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$

3. $f(x, y) = x^3 + y^3$

8. $f(x, y) = xe^y + ye^x$

4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

9. $f(x, y) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} +$

5. $f(x, y) = x^3 + xy^2 + x^2 - y^2$

Exercice 11.70 ★

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2(1+y)^3 + y^4 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle possède un unique point critique qui est un minimum local, mais que f n'a pas de minimum global.

Exercice 11.71 ★

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2 \end{cases}$$

Déterminer les extremums locaux et globaux de f .

Exercice 11.72 ★★

Déterminer les extremums locaux de la fonction $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2$.

Indication 11.0 : Montrer que le second extrémum n'est ni un minimum ni un maximum local. Pour cela, faire un changement de variables $\tilde{f}(u, v)$ pour se ramener en $(0, 0)$ et étudier les fonctions $\tilde{f}(t, 0)$ et $\tilde{f}(0, t)$ pour montrer que $\tilde{f}(u, v) - \tilde{f}(0, 0)$ prend des valeurs positives et négatives sur un voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 11.73 ★★

On considère une boîte sans couvercle de forme parallélépipédique de volume 1. Trouver les dimensions de la boîte pour que la somme des aires des 5 faces soit minimale.

Exercice 11.74 ★★

Soit $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

- Démontrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet en ce point un minimum (local).
- f admet-elle un minimum en $(0, 0)$?

Exercice 11.75 ★

On considère la fonction de deux variables définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x^2 \leq y^2 \\ y & \text{si } x^2 > y^2 \end{cases}$$

Étudier sa régularité.

Exercice 11.76 ★

On identifie $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ X & \mapsto \frac{1}{2}X^TAX - B^T X \end{cases}$$

- Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$, et calculer pour $X \in E$, df_X , $\vec{\nabla} f(X)$.
- On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que f possède un minimum atteint en un unique point $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de $AX_0 = B$.

Exercice 11.77 ★

Soit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Étudier l'existence des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 11.78 ★

On considère le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et la fonction définie sur Δ par $f(x, y) = (y - x)^3 + 6xy$. Déterminer ses extrémums.

Exercice 11.79 ★

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \end{cases}$$

- Déterminer ses extrémums locaux et préciser leur nature.
- Extrémums globaux ?

Exercice 11.80 ★

Étudier les extrémums de $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$.

Exercice 11.81 ★ Mines

On considère un espace euclidien E et a un vecteur non nul. On définit la fonction

$$g : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (a | x) e^{-\|x\|^2} \end{cases}$$

- Soit $h \in E$. Calculer la dérivée de g selon le vecteur h et df_x , $\vec{\nabla} f(x)$.
- Montrer que g possède un minimum et un maximum globaux.
- En quels points sont-ils atteints ?

Exercice 11.82 ★

On considère une boîte sans couvercle de forme parallélépipédique de volume 1. Trouver les dimensions de la boîte pour que la somme des aires des 5 faces soit minimale.

Exercice 11.83 ★ Centrale 2005

- Montrer que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ et } xy = 1\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

- Étudier les extrema de $f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$.

Exercice 11.84 ★★ Mines Ponts PSI 2013, méthode de la descente de gradient

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{R}^n$ et $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^TAX - 2B^T X$.

- Calculer $\nabla_X f$, le gradient de f en X .
- Montrer que f possède un minimum global et préciser en quel point il est atteint.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n - \alpha_n \nabla_{X_n} f$ avec $\alpha_n = \frac{\|\nabla_{X_n} f\|}{X_n^T A X_n}$. Trouver la limite éventuelle de la suite (X_n) .

Exercice 11.85 ★★ Centrale PC 2013

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle a, x \rangle$. Déterminer le gradient de φ .
2. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que f possède un minimum.
3. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{f(x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que $x \mapsto \text{grad} f$ est surjective.

Exercice 11.86 ★★ X ESPCI PC 2008

Soient $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x + y \leq 2\}$ et $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y^2 (x^2 + y^2)$. Déterminer le maximum de f sur C .

Exercice 11.87 ★★ X ESPCI PC 2008

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les extrema de $\Phi: (x, y, z) \mapsto \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle$ sur S^3 .

Exercice 11.88 ★★ Mines Ponts PC 2008

Déterminer les extrema de $(x, y) \mapsto (3x + 4y)e^{-x^2 - y^2}$.

Exercice 11.89 ★★ Centrale PSI 2008

Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq \pi\}$.

Exercice 11.90 ★★ Centrale PC 2008

Déterminer les extrema de $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 11.91 ★★ CCP PC 2009

Soient $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, 1 - x - y \geq 0\}$ et $f: (x, y) \in D \mapsto xy(1 - x - y)$.

1. Représenter D .
2. Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

Exercice 11.92 ★★ Mines Ponts PSI 2014

Soient $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, x_1 + \dots + x_n = 1\}$, et $f: (x_1, \dots, x_n) \in H \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$. Déterminer les extrema de f .

Exercice 11.93 ★★ Mines Ponts PC 2014

Déterminer les extrema de $f: (x, y) \in [0, \pi]^2 \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x + y)$.

Exercice 11.94 ★★ Centrale PSI 2015

Soit $f: (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto y(x^2 + \ln^2 y)$. Déterminer les extrema de f et préciser leur nature globale ou locale.

Exercice 11.95 ★★ Extremas liés

Étudier les extrema de la fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto e^{axy} \end{cases}, a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y^4 = 0$.

Exercice 11.96 ★★

On considère, dans le plan euclidien, un polygone à n côtés inscrit dans le cercle unité.

On note :

1. p son périmètre;
2. $e^{ia_1}, \dots, e^{ia_n}$ les affixes de ses n sommets avec $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < 2\pi$.

1. On pose $t_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$ et $t_n = \frac{1}{2}(a_1 + 2\pi - a_n)$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Montrer que

$$p = 2 \sum_{k=1}^n \sin(t_k).$$

2. Montrer que p est maximal lorsque le polygone est régulier.

Exercice 11.97 ★★ Inégalité arithmético-géométrique

Soient $n \geq 2$ et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \dots x_n$. On note $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

1. Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a :

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

11.0.8 Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 11.98 ★

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + y^3 + x^2;$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}.$

Exercice 11.99 ★

En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$ déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 11.100 ★

En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 11.101 ★

En utilisant un changement de coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 11.102 ★

En utilisant un changement de coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 11.103 ★★ **Centrale PSI 2014**

- Résoudre le système : $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x - y \right)$.
- Résoudre l'équation différentielle $x + y + (x - y)y' = 0$.

11.09 Équations aux dérivées partielles d'ordre 2**Exercice 11.104** ★

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2$;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 + x$.

Exercice 11.105 ★ **Équation des ondes**

Soit $c > 0$. En utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ déterminer les fonctions

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \rightarrow f(x, t) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Exercice 11.106 ★

Soit $c > 0$. En utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$ déterminer les fonctions

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow f(x, y) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 11.107 ★★

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite harmonique ssi

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1. Montrer que la fonction $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y})$ sont aussi harmoniques.

3. Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que l'application $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ soit harmonique sur l'ouvert $x > 0$.

Indication 11.0 : Pour la dernière question, poser $z = \frac{y}{x}$ et trouver une équation différentielle vérifiée par $\varphi(z)$.

Exercice 11.108 ★ **ENSAM**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha.$$

- Déterminer E en utilisant le changement de variable ($u = 2x + y, v = 2x - y$).
- À quelle(s) condition(s) sur les réels λ et μ la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \lambda (\cos(2x) + \sin(2x)) (\sin y + \cos y) + \mu \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} \right)$$

est-elle élément de E .

Exercice 11.109 ★

On considère l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$.

a. Résoudre sur U les équations aux dérivées partielles

$$(E_1) : y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$(E_2) : x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

b. Résoudre sur U ,

$$(E) : x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) - (x^2 + y^2)$$

Exercice 11.110 ★

Résoudre sur $U = \mathbb{R}^2$ l'équation des ondes :

$$(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en utilisant le changement de variables $x = u + v, y = u - v$.

Exercice 11.111 ★

Résoudre sur $U =]0, +\infty[$ l'équation

$$(E) : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

par le changement de variables $x = e^u$, $y = e^v$.

Exercice 11.112 ★★ X ESPCI PC 2008

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les couples (f, g) de fonctions tels que $U : (t, x) \mapsto f(t)g(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times]0, L]$, $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $U(t, 0) = U(t, L) = 0$.

Exercice 11.113 ★★ Mines Ponts PC 2013

Déterminer $u : (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\forall x \in [0, \pi]$, $u(x, 0) = x(\pi - x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Indication 11.0 : Chercher u sous la forme $u(x, t) = a(t)b(x)$.

Exercice 11.114 ★★ CCP PC 2005

Soit φ définie sur $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par : $\varphi(x, y) = (x, \frac{y}{x})$.

1. Montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$ de classe C^2 sur Ω telle que $f = g \circ \varphi$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ en fonction des dérivées partielles de f .
4. Résoudre sur $U : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 11.115 ★★ TPE PC 2011

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication : Poser $f(x, y) = e^{-y} g(x, y)$.

Exercice 11.116 ★★ Centrale PC 2013

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on appelle laplacien de f la fonction $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On dit que f est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : (x, y) \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que f soit harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Soit $g : (x, y) \mapsto \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Montrer que g est harmonique sur un ouvert à préciser.
3. Calculer, pour $r \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos t}{(r \cos t - 1)^2 + r^2 \sin^2 t} dt$.
Ind. Faire le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$.
4. Donner l'expression du laplacien en polaire.

Exercice 11.117 ★★ X ESPCI PC 2013

On dit que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Soit P dans $\mathbb{C}[X]$.

Montrer que $(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(P(x + iy))$ et $(x, y) \mapsto \operatorname{Im}(P(x + iy))$ sont harmoniques.

Exercice 11.118 ★★ Mines Ponts PSI 2013

Déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

11.0.10 Applications géométriques : courbes et surfaces**Exercice 11.119** ★ Tangentes à l'ellipse

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathcal{E}$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{E}$ et soit $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0 . Trouver les points de $\mathcal{E}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}_0$.

Exercice 11.120 ★ Centrale-Supélec

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point Ω de coordonnées $(1, 0, 0)$.
2. Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux de O sur les plans tangents à $\mathcal{S}$.

Exercice 11.121 ★ Centrale-Supélec

Donner les équations des plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $xy = z^3$ contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

Exercice 11.122 ★ CCP PSI

Déterminer les points de la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dont le plan tangent est parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 11.123 ★ Mines 1994

On considère la courbe plane (C) d'équation cartésienne :

$$(C) : y^2(y^2 - 2) = -x^2(x - 1)(x - 2).$$

1. Le point $M(1, 0)$ est-il un point régulier de (C) ? Donner une équation cartésienne de la tangente en ce point.
2. La courbe (C) est-elle bornée ?

Exercice 11.124 ★ CCP 2011

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 4 et -5 sont des valeurs propres de M .
2. Montrer que M est diagonalisable. Déterminer les sous-espaces propres de M .
3. On considère la surface $\mathcal{Q}$ d'équation

$$3x^2 + 8yz + 4xy - 4xz + y + z = 0.$$

- (a) Montrer que le point O appartient à $\mathcal{Q}$ et donner une équation du plan tangent à $\mathcal{Q}$ en ce point.

(b) Soit $e_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, -1, 1)$. Trouver l'équation de $\mathcal{L}$ dans le nouveau repère (O, e_1, e_2, e_3) .

(c) En déduire que l'équation de $\mathcal{L}$ dans un nouveau repère (Ω, e_1, e_2, e_3) est

$$-5X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 = \alpha$$

avec α un réel à déterminer.

(d) Décrire la surface.

11.0.11 Pour aller plus loin

Exercice 11.125 ★★

Démontrer le théorème sur les DL d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables réelles :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage V de $(0, 0)$ telle que :

1 Pour tout accroissement $\vec{H} = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_0 + \vec{H} \in U$, on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k)$$

2 $\varepsilon(h, k) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$

Exercice 11.126 ★★ Une démonstration du théorème de Schwarz

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et admettant en $(a, b) \in U$ des dérivées partielles d'ordre 2 continues.

Soit $(a, b) \in U$. Soient $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + h, b + k), (a + h, b), (a, b + k) \in U$. On pose

$$\Delta = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

On introduit F et G données par :

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \quad \text{et} \quad G(y) = f(a + h, y) - f(a, y).$$

1. En remarquant que $\Delta = F(a + h) - F(a) = G(a + k) - G(a)$, démontrer qu'il existe $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) \in [0, 1]^4$ tels que

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \vartheta_1 h, b + \vartheta_2 k) = kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \vartheta_3 h, b + \vartheta_4 k).$$

2. Après simplification par hk , on fait tendre (h, k) vers $(0, 0)$. Quel résultat obtient-on ?

Exercice 11.127 ★★ ENS PC 2013

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

1. On suppose qu'il existe x et b dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle b - a(y), x - y \rangle \geq 0$. Montrer que $b = a(x)$.

2. On suppose que a est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle a(x) - a(y), x - y \rangle \geq 0$. On note Jac_x la matrice $(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que $\text{Jac}_x + \text{Jac}_x^T$ est symétrique et positive.

Exercice 11.128 ★★ CCP PC 2010

Soient $Q = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $Q' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, |v| < u\}$. On note φ l'application qui à $(x, y) \in Q$ associe $(y^2 + x^2, y^2 - x^2)$.

1. Représenter Q et Q' . Montrer que φ définit une bijection de Q sur Q' . Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

2. On cherche les solutions $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy.$$

Si f est une solution de (E), on pose $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, avec $\tilde{f} : Q' \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\tilde{f}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (E').

3. Résoudre (E'), et en déduire les solutions de (E).

Exercice 11.129 ★★ X ESPCI PC 2014

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré n si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Montrer que f est homogène de degré n si et seulement si $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$.

Exercice 11.130 ★★ Centrale PC 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle de A est 0.

2. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^3, Av = u \wedge v$.

3. Montrer qu'il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soient $M(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ et $X(t) = [x(t), y(t), z(t), 1]$, et $v_0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que M est solution de $M' = AM + v_0$ si et seulement si $X' = BX$. Résoudre $X' = BX$.

11.0.12 Intégrales multiples

Exercice 11.131 ★★ X ESPCI PC 2011

Soit E l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{12} = 1$. Calculer $\iint_E x^2 dx dy$.

Exercice 11.132 ★★ CCP PC 2009

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } |x| \leq x^2 + y^2\}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (1 + x^2 + y^2)^{-2}$. On pose $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

1. Dessiner D.

2. Calculer $K = \int_0^{\pi/2} d\theta / (1 + \cos^2 \theta)$. Ind. Poser $t = \tan \theta$.

3. En déduire I.

sRMS 2014 180 ENS PC

sRMS 2014 421 X ESPCI PC

11.1 Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

11.1.1 Questions théoriques

sRMS 2014 698 Mines Ponts PSI

Exercice 11.133 ★ ENS PC 2013

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

1. On suppose qu'il existe x et b dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle b - a(y), x - y \rangle \geq 0$. Montrer que $b = a(x)$.

2. On suppose que a est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle a(x) - a(y), x - y \rangle \geq 0$. On note Jac_x la matrice $(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que $\text{Jac}_x + \text{Jac}_x^T$ est symétrique et positive.

Exercice 11.134 ★ X ESPCI PC 2009

Mots-clés : théorème des fonctions implicites

Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f_1' ne s'annule pas. On pose $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Montrer l'existence d'un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme Φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\Phi^{-1}(f(x)) = (x, 0)$. A-t-on unicité?

Exercice 11.135 ★ X ESPCI PC 2012

Mots-clés : dilatations

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.136 ★ X ESPCI PC 2012

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a \cos y, y + b \sin x) \in \mathbb{R}^2$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11.137 ★ Centrale PC 2009

Mots-clés : fonctions 2-höldériennes

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.138 ★ X ESPCI PC 2013

Mots-clés : fonction lipschitzienne

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées partielles sont bornées par 1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|$.

Exercice 11.139 ★ X ESPCI PC 2013

Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui à P associe PP^T .

1. Si M appartient à $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que la différentielle de f en M est surjective.

2. On considère la restriction g de f à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si M $\in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle toujours surjective?

Exercice 11.140 ★ ENS PC 2014

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_d^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'application $\Phi: (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA} X_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est définie, continue et bijective.

Exercice 11.141 ★ X ESPCI PC 2014

Mots-clés : fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et fonction lipschitzienne

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne sur toute boule de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.142 ★ Mines Ponts PSI 2014

Mots-clés : fonction coercive, descente de gradient

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ et $f: X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X - 2B^T X$.

1. Calculer $\nabla_X f$, le gradient de f en X.

2. Montrer que f possède un minimum global et préciser en quel point il est atteint.

3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n - \alpha_n \nabla_{X_n} f$ avec $\alpha_n = \frac{\|\nabla_{X_n} f\|}{X_n^T A X_n}$. Trouver la limite éventuelle de la suite (X_n) .

Exercice 11.143 ★ Centrale PC 2014

Mots-clés : fonction coercive, surjectivité du gradient

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle a, x \rangle$. Déterminer le gradient de φ .

2. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que f possède un minimum.

3. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{f(x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que $x \mapsto \text{grad} f$ est surjective.

Exercice 11.144 ★ RMS 2014 1310 Telecom Paris-Sud PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $f|_S$ est constante, où S est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien standard. Montrer qu'il existe x_0 de norme < 1 tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice 11.145 ★ Centrale PC 2014

Mots-clés : fonction invariante par une contraction du plan

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donner une expression de u_n en fonction de n , de u_0 et de u_1 .

2. Que dire de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, \frac{x+y}{6})$?

Exercice 11.146 ★ X ESPCI PC 2015

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R}^2)$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|f(t)\|$ soit croissante sur $[0, \varepsilon]$.

11.1.2 Étude de fonctions particulières

Exercice 11.147 ★ X ESPCI PC 2015

Déterminer l'image de l'application $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y)$.

11.1.3 Régularité

sRMS 2015 486 X ESPCI PC

Exercice 11.148 ★ CCP PC 2010

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f .
2. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

sRMS 2009 409 X ESPCI PC

Exercice 11.149 ★ Centrale PC 2013

Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{xy^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

sRMS 2009 410 X ESPCI PC

1. Étudier la continuité de f .
2. Dans le cas où f est continue, la fonction est-elle $\mathcal{C}^1$?

Exercice 11.150 ★ Centrale PC 2013

Soient $f(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} e^{2inx}$, $g(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} \cos(2nx)$ et $h(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} \sin(2nx)$.

1. Montrer que f est définie sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$. Donner une expression simple de f . En déduire des expressions simples de g et de h .
2. Soit $P: y \in] -1, 1[\mapsto \int_0^y g(x, t) dt$. Exprimer P sous forme de somme. Donner une expression simple de P .
3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire telle que $\forall x \in]0, \pi[$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, et $f(0) = 0$. Calculer les coefficients de Fourier de f .

Exercice 11.151 ★ X ESPCI PC 2014

Mots-clés : différentielle du déterminant

Soit $\det: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det M$. Déterminer la différentielle de $\det$ en I_n .

Exercice 11.152 ★ Centrale PC 2014

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
3. L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 11.153 ★ ENS PC 2015

Mots-clés : différentielle du carré dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

Soient $S = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $f: M \in S \mapsto M^2 \in S$.

1. Donner une base de S ainsi que l'expression de f dans cette base.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner la matrice jacobienne de f dans la base précédente.
3. Soit $\mathcal{X} = \{M \in S, M^2 = I_2\}$.

(a) Le point I_2 est-il isolé dans $\mathcal{X}$?

(b) Le point $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-il isolé dans $\mathcal{X}$?

Exercice 11.154 ★ X ESPCI PC 2015

Soit $F: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $F(P) = \int_0^1 \sin(tP(t)) dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

11.1.4 Inégalités et extrema

Exercice 11.155 ★ X ESPCI PC 2009

Soient $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x + y \leq 2\}$ et $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y^2 (x^2 + y^2)$. Déterminer le maximum de f sur C .

Exercice 11.156 ★ X ESPCI PC 2009

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les extrema de $\Phi: (x, y, z) \mapsto \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle$ sur S^3 .

Exercice 11.157 ★ Mines Ponts PC 2009

Déterminer les extrema de $(x, y) \mapsto (3x + 4y)e^{-x^2 - y^2}$.

Exercice 11.158 ★ Centrale PSI 2009

Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq \pi\}$.

Exercice 11.159 ★ Centrale PC 2009

Déterminer les extrema de $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 11.160 ★ CCP PC 2010

Soient $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, 1 - x - y \geq 0\}$ et $f: (x, y) \in D \mapsto xy(1 - x - y)$.

1. Représenter D .
2. Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

Exercice 11.161 ★ CCP PC 2011

Déterminer les extrema de $f: (x, y) \mapsto (x^2 - 1)^2 + (x^2 - e^y)^2$.

Exercice 11.162 ★ X ESPCI PC 2013

Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \exp(x + y - 2) \geq \frac{x^2 + y^2}{4}$.

Exercice 11.163 ★ Centrale PC 2013

Soit $f: (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Si D est une droite passant par $(0, 0)$, montrer que f restreinte à D possède un minimum local en $(0, 0)$.
2. Montrer que f ne possède pas de minimum local en 0 .

Exercice 11.164 ★ Centrale PC 2013

Soit $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$. Montrer que f est positive lorsque $|x| \geq \sqrt{2}$ et $|y| \geq \sqrt{2}$. Trouver les extrema de f .

Exercice 11.165 ★ Mines Ponts PSI 2015

Soient $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, x_1 + \dots + x_n = 1\}$, et $f: (x_1, \dots, x_n) \in H \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$. Déterminer les extrema de f .

Exercice 11.166 ★ Mines Ponts PC 2015

Mots-clés : triangles inscrits dans un cercle d'aire maximale

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \in [0, \pi]^2 \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x+y)$.

Modification d'énoncé : $+\sin(x+y)$ remplacé par $-\sin(x+y)$ pour pouvoir donner l'interprétation géométrique finale.

Exercice 11.167 ★ Centrale PSI 2015

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto y(x^2 + \ln^2 y)$. Déterminer les extrema de f et préciser leur nature globale ou locale.

Exercice 11.168 ★ CCP PC 2015

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x \sin(y)}$. Étudier les extrema de f .

11.1.5 Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 11.169 ★ CCP PC 2011

Soient $Q = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $Q' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, |v| < u\}$. On note φ l'application qui à $(x, y) \in Q$ associe $(y^2 + x^2, y^2 - x^2)$.

1. Représenter Q et Q' . Montrer que φ définit une bijection de Q sur Q' . Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.
2. On cherche les solutions $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy.$$

Si f est une solution de (E), on pose $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, avec $\tilde{f} : Q' \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\tilde{f}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (E').

3. Résoudre (E'), et en déduire les solutions de (E).

Exercice 11.170 ★ RMS 2014 1316 Écoles des Mines PSI

Mots-clés : fonctions homogènes

Soient a un réel et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^*, (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^a f(x, y)$ (E).

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a f(x, y)$ (E').
2. Montrer que les équations (E) et (E') ont les mêmes solutions.

La valeur de t^a avec $t < 0$ et a réel quelconque pose problème.

Exercice 11.171 ★ X ESPCI PC 2015

Mots-clés : fonctions homogènes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré n si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Montrer que f est homogène de degré n si et seulement si $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f$.

Exercice 11.172 ★ X ESPCI PC 2013

Trouver les solutions de (E) : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = g$ pour $g = 0$, pour $g = 1$ puis pour $g : (x, y) \mapsto x^2 y^2$.

Exercice 11.173 ★ Centrale PC 2013

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 11.174 ★ TPE PSI 2014

Résoudre sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[: x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x + y + f$.

Exercice 11.175 ★ CCP PSI 2014

Soient $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et f une solution sur D de (E) : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Vérifier que $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \frac{y}{x}$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit $h : (u, v) \mapsto f(u, uv)$. Montrer que $\frac{\partial h}{\partial u} = 0$.
4. Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 11.176 ★ Centrale PC 2015

Soit $\Phi : (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, y/x)$.

1. Déterminer l'image de Φ .
2. Montrer que Φ réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur son image.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$. On pose $g = f \circ \Phi^{-1}$.
 - (a) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
 - (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$ telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$.

Exercice 11.177 ★ Centrale PC 2013

1. Déterminer les F de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial F}{\partial x} = x + y$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = x - y$.
2. Déterminer les $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, x + \varphi(x) + (x - \varphi(x))\varphi'(x) = 0$ et $\varphi(1) = 4$. Ind. Poser $h : x \mapsto F(x, \varphi(x))$.

Exercice 11.178 ★ Centrale PC 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle de A est 0.
2. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^3, Av = u \wedge v$.
3. Montrer qu'il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soient $M(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ et $X(t) = [x(t), y(t), z(t), 1]$, et $v_0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que M est solution de $M' = AM + v_0$ si et seulement si $X' = BX$. Résoudre $X' = BX$.

Exercice 11.179 ★ TPE PSI 2014

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la forme différentielle $\omega = xzdx + f(y)g(z)dy + dz$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que cette forme différentielle soit exacte, puis l'intégrer.

Exercice 11.180 ★ **Centrale PSI 2015**

- Résoudre le système : $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x - y\right)$.
- Résoudre l'équation différentielle $x + y + (x - y)y' = 0$.

Exercice 11.181 ★ **Centrale PC 2015**

Résoudre sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y$. On utilisera le changement de variable $(u, v + u^2/2) = (x, y)$.

Exercice 11.182 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $A \in \mathbb{R}$. Déterminer les $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = A$.
Ind. Poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

sRMS 2014 699 Mines Ponts PSI

11.1.6 Équations aux dérivées partielles d'ordre 2**Exercice 11.183** ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : équation de diffusion unidimensionnelle
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les couples (f, g) de fonctions tels que $U: (t, x) \mapsto f(t)g(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times [0, L]$, $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, U(t, 0) = U(t, L) = 0$.

Exercice 11.184 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : équation de diffusion unidimensionnelle
Déterminer $u: (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = x(\pi - x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Ind. Chercher u sous la forme $u(x, t) = a(t)b(x)$.

Exercice 11.185 ★ **CCP PC 2006**

Soit φ définie sur $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par : $\varphi(x, y) = (x, \frac{y}{x})$.

- Montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
- Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g: (u, v) \mapsto g(u, v)$ de classe C^2 sur Ω telle que $f = g \circ \varphi$.
- Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ en fonction des dérivées partielles de f .
- Résoudre sur $U: x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

sRMS 2015 942 Centrale PC

Exercice 11.186 ★ **TPE PC 2012**

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication. Poser $f(x, y) = e^{-y}g(x, y)$.

Exercice 11.187 ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : laplacien, fonctions harmoniques

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on appelle laplacien de f la fonction $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On dit que f est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$.

- Soient $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f: (x, y) \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que f soit harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Soit $g: (x, y) \mapsto \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Montrer que g est harmonique sur un ouvert à préciser.

3. Calculer, pour $r \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos t}{(r \cos t - 1)^2 + r^2 \sin^2 t} dt$.
Ind. Faire le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$.

4. Donner l'expression du laplacien en polaire.

Exercice 11.188 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : laplacien, fonctions harmoniques

On dit que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Soit P dans $\mathbb{C}[X]$.

Montrer que $(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(P(x + iy))$ et $(x, y) \mapsto \operatorname{Im}(P(x + iy))$ sont harmoniques.

Exercice 11.189 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 11.190 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : produit de fonctions d'une seule variable

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $(*) : f \times \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}$.

- On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.
 - Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) \times f(x, y)$.
 - En déduire qu'il existe g et h dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x) \times h(y)$.
 - Déterminer les f solutions de $(*)$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $f: (x, y) \mapsto (xy)^3 + |xy|^3$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de $(*)$. Montrer que f ne peut s'écrire $f: (x, y) \mapsto g(x)h(y)$ avec g, h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.191 ★ **Centrale PC 2015**

- Résoudre l'équation $(*) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide du changement de variable $(u, v) = (x + 2y, x - 2y)$.
- Existe-t-il une solution f de $(*)$ telle que $\forall y, \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$ et $\forall x, f(x, 0) = x^2$?