Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Algèbre linéaire

1.1.1 Bases et dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exercice 1.1 ★★ ***Mines PC 2011***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ où pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $f_i : x \mapsto \cos^i x$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 ★

Soit $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n et soit $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de taille n. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(1,2,\ldots,n)$. Montrer que $(1,\mathrm{D},\mathrm{D}^2,\ldots,\mathrm{D}^{n-1})$ est une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 1.3 ★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille libre. Les familles

$$\mathrm{S} = (u_1-u_2, u_2-u_3, \ldots, u_{n-1}-u_n, u_n-u_1)$$

$$\mathrm{T} = (u_1+u_2, \ldots, u_{n-1}+u_n, u_n+u_1)$$

sont-elles libres ?

Exercice 1.4 ★★ ***Mines PC 2003***

Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathrm{S} = (f_1,\ldots,f_n)$ est libre.

Exercice 1.5 ★★★ ***X PC 2017***

Soient $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ tels que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ une subdivision de $[0,1]$. On note V l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ et W l'ensemble des fonctions de V continues sur $[0,1]$. Calculer $\dim \mathrm{V}$ et $\dim \mathrm{W}$.

Exercice 1.6 ★ ***X PC 2017***

Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^6$ chacun de dimension 4. Le sous-espace $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$ peut-il être une droite vectorielle ?

Exercice 1.7 ★ ***X PC 2017***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soient $v_1,\ldots,v_n$ n vecteurs de E. Montrer que

$$\mathrm{Vect}\Big(\big(v_i - v_j\big)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}\Big)$$

est de dimension au plus égale à $n-1$.

1.1.2 Applications linéaires, noyau, image

Exercice 1.8 ★★

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$*. On définit*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array} \right. \quad \text{où } \varphi(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* φ *est bien définie et que* $\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$.
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} \varphi$ *et* $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 1.9 ★ ***Formule d'Euler-Poincaré***

Une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{u_0} \mathrm{E}_1 \xrightarrow{u_1} \mathrm{E}_2 \xrightarrow{u_3} \mathrm{E}_3 \ldots \xrightarrow{u_{n-1}} \mathrm{E}_n \xrightarrow{u_n} \{0\}$$

est exacte si et seulement si $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \operatorname{Im} u_i = \operatorname{Ker} u_{i+1}$. *Montrer que si tous les* E_i *sont de dimension finie alors on a la formule d'Euler-Poincaré :*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim \mathrm{E}_k = 0.$$

usion_noyaux

Exercice 1.10 ★

Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. *Montrer que :*

1. $\operatorname{Ker}(gof) = f^{(-1)}(\operatorname{Ker} g)$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
3. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$

Exercice 1.11 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme. On pose*

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = x\}$$

1. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer que la somme* $\operatorname{Ker} u + \mathrm{P}$ *est directe.*

Exercice 1.12 ★

Soient f *et* g *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \Longleftrightarrow gof = 0$.
2. *Montrer que* $fog = gof \implies \operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Montrer que* $gof = \mathrm{id} \implies f$ *injective.*

Exercice 1.13 ★★

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Montrer que pour toute partie* A *de* E, $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A})) = \operatorname{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$.

Exercice 1.14 ★★

On considère trois K*-espaces vectoriels* E,F,G *et deux applications* $\mathrm{E} \xrightarrow{u} \mathrm{F} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *telles que :*

1. *l'application* u *est linéaire et surjective ;*
2. *l'application* vou *est linéaire de* E *vers* G.

Montrer que l'application v *est linéaire.*

Exercice 1.15 ★★

Soient trois $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E, F, G *et deux applications linéaires* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. *Montrer que :*

1. $\operatorname{Ker}(gof) = \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{\mathrm{O}_\mathrm{E}\}$;

2. $\operatorname{Im}(gof) = \operatorname{Im} g \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Exercice 1.16 ★★

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* u *un endomorphisme de* E.

1. *On suppose dans cette question que* $u^2 = 0$.
   (a) *Montrer que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{id}_E + u$ *est un automorphisme de* E.
2. (a) *Montrer que :* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que :* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

Exercice 1.17 ★★

Soit un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $(u, v) \in (L(E))^2$ *qui commutent :*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v, *c'est-à-dire*

$$v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u.$$

2. *Si l'on suppose de plus que* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$, *montrer que*

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \text{ et } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Exercice 1.18 ★★★

Soit un K-espace vectoriel E *et un endomorphisme* $u \in L(E)$ *tel que* $\forall x \in E$, *le système de vecteurs* $(x, u(x))$ *est lié. Montrer que l'application* u *est une homothétie.*

Exercice 1.19 ★★

Soit $f \in \mathfrak{L}(E, F)$ *avec* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels tels que* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$. *Dire et démontrer, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de* f *:*

1. *L'image de toute famille libre de* E *par* f *est libre*
2. $\operatorname{Im} f = F$
3. *L'image d'une base de* E *par* f *est génératrice de* F.
4. $\operatorname{rg} f = n$.
5. *L'image d'une base de* E *par* f *est libre.*
6. $\operatorname{rg} f = p$.
7. *L'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
8. *L'image de toute famille génératrice de* E *par* f *est génératrice de* F.
9. $\exists g \in \mathfrak{L}(F, E), \quad g \circ f = \mathrm{id}_E$
10. $\exists g \in \mathfrak{L}(F, E), \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$

Exercice 1.20 ★

Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X & \longrightarrow & \mathbb{R}[X \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* φ *est linéaire ;*
2. *Montrer que* φ *n'est pas injective et déterminer son noyau ;*
3. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 0$, φ_n *induit un isomorphisme entre* $X^2\mathbb{R}_n[X]$ *et* $\mathbb{R}_n[X]$;
4. *En déduire que* φ *est surjective.*

Exercice 1.21 ★★★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $f \in L(E)$ *un endomorphisme. On définit*

$$\varphi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longrightarrow & f \circ u - u \circ f \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* $\varphi_f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$.

2. *Montrer que si f est nilpotent, alors φ_f est aussi nilpotent.*

Exercice 1.22 ★★ ***X PC 2016***

Soit V *un espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathfrak{L}(V)$*. Montrer l'équivalence entre :*

1. *il existe* $(g,h) \in (\mathfrak{L}(V))^2$ *tel que* $0 = h \circ g$ *et* $f = g \circ h$*.*
2. $f^2 = 0$*.*

1.1.3 Rang d'un endomorphisme

Exercice 1.23 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* $f \in \mathfrak{L}(E)$*. Montrer que*

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \left[f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2\operatorname{rg}(f)\right].$$

Exercice 1.24 ★★

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $f^{n-1} \neq 0$ *et* $f^n = 0$*. Quel est le rang de* f *?*

Exercice 1.25 ★★★ ***X PC 2003***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer que :*

$$\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) - n \leqslant \operatorname{rg}(AB).$$

Exercice 1.26 ★ ***Mines 2003, CCP 2001, Centrale 1999***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = 0$ *et* $A + B$ *est inversible. Montrer que :*

$$\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) = n.$$

Exercice 1.27 ★★★ ***X PC 2009-2017***

1. *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*. Montrer que :*

$$\left|\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B\right| \leqslant \operatorname{rg}(A + B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

2. *Soient* $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*. On suppose que*

$$\sum_{i=1}^{k} V_i {V_i}^T = I_n.$$

   Montrer que $k \geqslant n$*.*

Exercice 1.28 ★★ ***Centrale PC 2016***

Soient $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* AB *est un projecteur.*
2. *Déterminer les rangs de* A *et* B*.*
3. *Montrer que* $BA = I_2$*.*

1.1.4 Produit, sommes, sommes directes de sous-espaces vectoriels

Exercice 1.29 ★

Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(u, v)$ *où* $u = (1,0,1)$ *et* $v = (1,1,0)$ *dans* $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.30 ★

On considère le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *et* $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *; Posons :*

$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{V}ect(u)$$

Prouver que F *et* G *sont des sous-espaces supplémentaires de* E.

Exercice 1.31 ★

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$*, on considère l'ensemble*

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathrm{E} \mid x = y \text{ et } x - y + t = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, et déterminer une base de* F.
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E.
3. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Exercice 1.32 ★

Soit l'espace vectoriel E *des polynômes à coefficients réels de degré* $\leqslant 4$*. On considère l'ensemble*

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, déterminer une base de* F *et préciser sa dimension.*
2. *Montrer que le sous-espace vectoriel* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$ *est un supplémentaire de* F *dans* E.

Exercice 1.33 ★

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$*, on considère les sous-espaces vectoriels*

$$\mathrm{F} = \mathrm{V}ect((1,2,1,3),(2,0,0,1)) \text{ et } \mathrm{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, x = y\right\}$$

1. *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels* F *et* G.
2. *Montrer que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
3. *En déduire que* $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 1.34 ★★★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f^3 = \mathrm{id}$*. Montrer que*

$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}\right) = \mathrm{E}.$$

Exercice 1.35 ★

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$*. Pour tout* $i \in [\![0, n]\!]$*, on pose*

$$\mathrm{F}_i = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, \quad \mathrm{P}(j) = 0\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}_0 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_n$.

Exercice 1.36 ★

Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *des endomorphismes non nuls d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que* $u_1 + \ldots + u_n = \mathrm{id}$ *et tels que*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies u_i \circ u_j = 0.$$

1. *Montrer que pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, u_i *est un projecteur.*
2. *Montrer que* $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\, u_i = \mathrm{E}$.
3. *Montrer que* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est libre.*
4. *Soient* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *des scalaires distincts et* $u = \sum_{k=1}^n a_i u_i$.

(a) *Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Exprimer* u^p *en fonction de* p, *des* a_i *et des* u_i.

(b) *Montrer que* $\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, u^2, \dots, u^{n-1}\right)$ *est libre et que* $\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, u^2, \dots, u^n\right)$ *est liée.*

Indication 1.0 : Pour la dernière question, on pourra s'intéresser au sev F *de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *donné par* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(u_1, \dots, u_n)$, *montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \mathrm{F}$ *et utiliser une base de* F.

Exercice 1.37 ★

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $p_1, \dots, p_m$ *des projecteurs de* E *tels que* $p_1 + \dots + p_m = \mathrm{id}$. *Montrer que*

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, p_i.$$

Exercice 1.38 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_m$ *des sevs de* E *tels que* $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{F}_i$. *Montrer qu'il existe des sevs* $\mathrm{G}_1, \dots, \mathrm{G}_m$ *de* E *tels que*

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \mathrm{G}_i \subset \mathrm{F}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{G}_i.$$

Exercice 1.39 ★★★ ***Un grand classique***

Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on note :*

$$\mathrm{K}_p = \mathrm{Ker}\, f^p \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \mathrm{Im}\, f^p.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p.$$
2. *Prouver qu'il existe un plus petit entier naturel* $r \leqslant n$ *tel que :* $\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i+1}$.
3. *Montrer de même que :*
$$\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{I}_i = \mathrm{I}_{i+1}.$$
4. *Montrer que :* $\mathrm{E} = \mathrm{K}_r \oplus \mathrm{I}_r$.

Exercice 1.40 ★

Soient E *un* $\mathbb{K}$*−espace vectoriel et* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3$ *trois sevs de* E *tels que* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus (\mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3)$.
Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$.

Exercice 1.41 ★

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{G}, \mathrm{G}'$ *des sevs de* E *tels que :*

1. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$,
2. $\mathrm{E} = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{G}'$,
3. $\mathrm{F}' \subset \mathrm{G}$

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}' \oplus \left(\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'\right)$.

Exercice 1.42 ★

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E *tel que* $u^3 = u$.

1. *Que peut-on dire de* u *et de* E *quand* u *est bijective ?*
2. *On suppose* u *non bijective. Montrer l'équivalence* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3 \iff u^3 = u$ *où* $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}\, u$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$, $\mathrm{E}_3 = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$.

Exercice 1.43 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. *Montrer l'équivalence :*
$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \iff \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u.$$
Est-ce vrai en dimension infinie ?
2. *On suppose que* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$. *Montrer que :* $\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{Ker}\, u^n = \mathrm{Ker}\, u$.
3.

1.1.5 Hyperplans, formes linéaires

Exercice 1.44 ★ ***Deux supplémantaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes***

1. *Montrer que deux supplémentaires dans un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.*
2. *Soient* $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{F}_a = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(a) = 0 \right\}$.
   (a) *Que peut-on dire de* F_a *?*
   (b) *Déterminer tous les supplémentaires de* F_a *dans* E.

Exercice 1.45 ★★

Dans le $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *on considère un hyperplan* H *stable pour le produit. Montrer que* $\mathrm{I}_n \in \mathrm{H}$.
Indication 1.0 : *On pourra raisonner par l'absurde et montrer l'implication* $\mathrm{M}^2 \in \mathrm{H} \implies \mathrm{M} \in \mathrm{H}$.

Exercice 1.46 ★ ***Sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplan***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* F *un sev de* E *tel que* $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.

1. *Montrer qu'il existe un hyperplan* H *de* E *contenant* F.
2. *Montrer que* F *est égal à l'intersection des hyperplans le contenant.*

Exercice 1.47 ★ ***Caractérisation des formes linéaires proportionnelles***

Montrer que deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

Exercice 1.48 ★ ***X PC 2011***

Soient H *et* K *deux hyperplans d'un espace vectoriel* E *de dimension* n. *Que peut-on dire de la dimension de* $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ *?*

Exercice 1.49 ★ ***Centrale 2012***

Soit f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* $f^2 = 0$. *Montrer qu'il existe un vecteur* $u \in \mathbb{R}^3$ *et* φ *une forme linéaire sur* $\mathbb{R}^3$ *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \varphi(x)u.$$

1.1.6 Endomorphismes commutants

_avec_endoms

Exercice 1.50 ★★★ ***Endomorphisme commutant avec tous les autres***

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes* f *de* E *tels que :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \big(x, f(x)\big) \text{ est une famille liée.}$$

2. *En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de* E *qui commutent avec tout autre endomorphisme.*

Indication 1.0 : *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pourra considérer une projection sur* $\mathrm{Vect}(x)$*).*

ome_28_05_14

Exercice 1.51 ★ ***ENS PC 99***

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. *On suppose qu'il existe* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $e = \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ *soit libre. Montrer que les seuls endomorphismes de* E *commutant avec* u *sont les polynômes en* u.

Exercice 1.52 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et soit* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E *tel que* $u^n = 0$ *et* $u^{n-1} \neq 0$ *(On dit que* u *est nilpotent d'indice* n*).*

1. *Montrer que* u *n'est pas bijective.*
2. *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}) \mid u \circ v = v \circ u\}$ *des endomorphismes de* E *qui commutent avec* u *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{L}(u)$.
3. *Déterminer le rang de* u.
4. *Déterminer la dimension de* $\mathscr{C}(u)$.

Exercice 1.53 ★★ ***X PC 2017***

On note Ω *l'ensemble des endomorphismes de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *qui commutent avec la transposition. Montrer que* Ω *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et calculer sa dimension.*

1.1.7 Sous-espaces stables

Exercice 1.54 ★

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose que u et v commutent, montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
Que dire de la réciproque ?

Exercice 1.55 ★

Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Exercice 1.56 ★★

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On pose

$$\mathrm{N} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} u^p \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u^p.$$

1. *Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N} = \operatorname{Ker} u^n$ et $\mathrm{I} = \operatorname{Im} u^n$.*
2. *Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les restrictions de u à N et I soient respectivement nilpotente et bijective.*
3. *Réciproquement on suppose $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les restrictions de u à F et G soient respectivement nilpotente et bijective. Établir $\mathrm{F} = \mathrm{N}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{I}$.*

Exercice 1.57 ★

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

1. *Soit $a \in \mathrm{E}$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.*
   On pose $\mathrm{F}(a) = \mathrm{V}ect\big(a, f(a)\big)$.
2. *Montrer qu'il existe des vecteurs de E $a_1, \ldots, a_p$ non nuls tels que*
   $$\mathrm{E} = \mathrm{F}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}(a_p).$$
3. *En déduire que la dimension de E est paire et justifier l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est simple.*

Exercice 1.58 ★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent.
On désire montrer

$$\det(u + v) = \det u$$

en raisonnant par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$.

1. *Traiter le cas $n = 1$ et le cas $v = 0$.*
2. *Pour $n \geqslant 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et v dans une base adaptée à $\operatorname{Im} v$.*
3. *Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v au départ de $\operatorname{Im} v$.*

Exercice 1.59 ★ **Mines-Pont PC 2017**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

1. *Montrer que n est pair.*
2. *Montrer que u ne laisse stable aucun hyperplan de E.*

1.1.8 Projecteurs

Exercice 1.60 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* u *un endomorphisme de* E.

1. *On suppose qu'il existe* $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un projecteur tel que* $u = p \circ u - u \circ p$.
   (a) *Montrer que* $u\big(\mathrm{Ker}\, p\big) \subset \mathrm{Im}\, p$ *et que* $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$.
   (b) *En déduite que* $u^2 = 0$.
2. *Réciproquement, montrer que si* $u^2 = 0$ *alors il existe* $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un projecteur tel que* $u = p \circ u - u \circ p$.

Exercice 1.61 ★★

On définit sur $\mathrm{E} = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *l'application* $u : \mathrm{P} \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\right)$.

1. *Montrer que* u *est un projecteur et détermines sa matrice dans la base canonique.*
2. *Déterminer son noyau, son image.*

Exercice 1.62 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1. *Soient* $p, q \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *deux projecteurs de* E *tels que* $p + q = 0$. *Montrer que* $p = q = 0$.
2. *On suppose* E *de dimension finie* n. *Soit* $k \geqslant 2$ *et soit* $(p_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ *une famille de* k *projecteurs de* E *de somme nulle. Montrer que :* $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i = 0$.

Exercice 1.63 ★★ ***X PC 2016***

Soit E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. On considère* $e \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$, $i \in \mathfrak{L}(\mathrm{Im}(e), \mathrm{E})$ *et* $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{Im}(e))$ *des applications linéaires telles que* $i \circ p = e$ *et* $p \circ i = \mathrm{id}$.

1. *Montrer que* i *est injective et que* p *est surjective.*
2. *Montrer que si* $e \circ e = e$ *alors* i *et* p *existent.*
3. *Que dire de la réciproque ?*
4. *Y a t-il unicité du couple* (i, p) *?*

Exercice 1.64 ★ ***X PC 2016***

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice antisymétrique. Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et soient* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_k$ *des matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *vérifiant* $\mathrm{P}_i^2 = \mathrm{P}_i$ *pour tout* $i \in [\![1,k]\!]$. *On suppose que* $\mathrm{A} = \mathrm{P}_1 + \ldots + \mathrm{P}_k$. *Montrer que* $\mathrm{A} = 0$.

Exercice 1.65 ★★ ***X PC 2017***

Soit un entier $n \geqslant 2$ *et soit* Φ *un automorphisme de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que :*

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(\mathrm{A})\Phi(\mathrm{B}) = 0.$$

1. *Calculer* $\Phi(\mathrm{I}_n)$ *;*
2. *Soit* $i \in [\![1,n]\!]$. *Montrer que* $\Phi(\mathrm{E}_{i,i})$ *est un projecteur de rang* 1 *;*
3. *Soit* $\mathrm{U}_i \in \mathrm{Im}\big(\Phi(\mathrm{E}_{i,i})\big) \setminus \{0\}$. *Montrer que* $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ *est une base de* $\mathbb{C}^n$.

1.2 Matrices

1.2.1 Calcul matriciel

Exercice 1.66 ★

On munit $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *de sa base canonique* $e = \left(\mathrm{E}_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. *Reconnaître les application définies, pour* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *par*

$$f_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{E}_{ii}\mathrm{M}\mathrm{E}_{jj} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \mathrm{E}_{ii}\mathrm{M}\mathrm{E}_{ii} \end{array} \right. .$$

Exercice 1.67 ★★ ***X PC 2017***

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{rg}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = 1$. *Montrer que* $\mathrm{A}\,(\mathrm{Im}\,\mathrm{B}) \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{B}$ *ou* $\mathrm{A}\,(\mathrm{Ker}\,\mathrm{B}) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$.

1.2.2 Matrices inversibles

Exercice 1.68 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme que* $P = X^3 - 3X + 3$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Exercice 1.69 ★★

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.70 ★★ ***X PC 2007***

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* A^{-1} *peut s'écrire comme un polynôme de* A.

Exercice 1.71 ★★ ***X PC 2013***

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A *est inversible.*

Exercice 1.72 ★★★ ***CCP PC 1992***

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = A + B$. *Montrer que* $AB = BA$.

1.2.3 Puissances d'une matrice

Exercice 1.73 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $A - I_3$ *est nilpotente d'ordre* 3 *(c'est-à-dire que* $(A - I_3)^2 \neq 0$ *et que* $(A - I_3)^3 = 0$
2. *En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.74 ★

Calculer A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de deux manières différentes.*

Exercice 1.75 ★★★ ***X PC 2011***

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On pose pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $M(z) = A + zB$. *On suppose que* $M(z)$ *est nilpotente pour* $n+1$ *valeurs distinctes de* z. *Montrer que* A *et* B *sont aussi nilpotentes.*

Exercice 1.76 ★★

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 5X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$, *déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^2 - 5X + 4$.
4. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.77 ★★

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *remplie de* 1 *:*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* J^2 *puis pour* $k \in \mathbb{N}$, J^k.

2. J *est-elle inversible ?*

3. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de A.

1.2.4 Trace

uit_scalaire

Exercice 1.78 ★★ ***Un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées***

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On note*

$$< A, B >= \operatorname{Tr}(AB^T)$$

1. *Calculer* $< A, B >$ *en fonction des coefficients de* A *et* B.
2. *Vérifier que* $< A, B >=< B, A >$
3. *On note* $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$. *Montrer que* $\|A\| \geqslant 0$.
4. *Montrer que* $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
5. *Montrer que* $A \mapsto < A, B >$ *et* $B \mapsto < A, B >$ *sont des formes linéaires sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
6. *Montrer que* $|< A, B >| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

On a prouvé que $<, >$ *est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *voir le chapitre* **??**. *L'inégalité prouvée dans la dernière question n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz. Voir le théorème* **??** *page* **??**.

Exercice 1.79 ★ ***TPE PC 2011***

1. *Existe-t-il deux matrices* $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB - BA = I_n$ *?*
2. *Montrer que s'il existe* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB - BA = A$ *alors* A *n'est pas inversible.*
3. *Montrer que si* $\operatorname{Tr}(A^T A) = 0$ *alors* $A = 0$

Exercice 1.80 ★

Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB - BA = B$.
Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(B^k) = 0$.

Exercice 1.81 ★

Soit deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{Tr}(AX) = \operatorname{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 1.82 ★ ***Mines-Pont PC 2016***

Dans le $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *on considère* $A, B \in E$. *Discuter et résoudre dans* E *l'équation*

$$M + \operatorname{Tr}(M)A = B.$$

Exercice 1.83 ★ **TPE PC 2009**

Déterminer toutes les formes linéaires φ *sur* $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *vérifiant :*

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Exercice 1.84 ★

1. *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* $\mathrm{Tr}\left(A^T A\right)$.
2. *On note* $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de taille* n. *Soit* $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(M^4) \geqslant 0$ *puis montrer l'implication* $\mathrm{Tr}(M^4) = 0 \implies M = 0$.

Exercice 1.85 ★

Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *vérifie* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Tr}(A) = 1$ *alors* A *est la matrice d'un projecteur.*

Exercice 1.86 ★

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on considère* $A \in E$ *de trace non nulle. Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on considère l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A)M + \alpha \mathrm{Tr}(M)A \end{array} \right. .$$

Montrer que f *est un endomorphisme puis déterminer son noyau, son rang, son image et sa trace.*

Exercice 1.87 ★

Soit $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice de rang* 1.

1. *Montrer qu'il existe des matrices* $U, V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *telles que* $H = UV^T$.
2. *En déduire*
$$H^2 = \mathrm{Tr}(H)H.$$
3. *On suppose* $\mathrm{Tr}(H) \neq -1$. *Montrer que* $I_n + H$ *est inversible et*
$$(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1+\mathrm{Tr}(H)} H.$$
4. *Soient* $A \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Tr}(HA^{-1}) \neq -1$. *Montrer que* $A + H$ *est inversible et*
$$(A+H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+\mathrm{Tr}(HA^{-1})} A^{-1} H A^{-1}.$$

Exercice 1.88 ★★★

1. *Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?*
2. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $A^q = I_n$.
Montrer
$$\dim \mathrm{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}(A^k)$$

Exercice 1.89 ★★ **Mines MP**

1. *Soit* f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant*
$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$
montrer que f *est proportionnelle à la trace.*
2. *Soit* g *un endomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant*
$$g(AB) = g(BA)$$
pour toutes $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $g(I_n) = I_n$. *Montrer que* g *conserve la trace.*

Exercice 1.90 ★★★ **X MP**

Soient $A_1,\dots,A_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$A_1+\dots+A_k = I_n \quad \text{et} \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant k,\quad A_i^2 = A_i.$$

Montrer

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant k,\quad A_iA_j = 0_n.$$

Exercice 1.91 ★★ **X, Mines-Pont PC 2017,2019**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Résoudre dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *l'équation*

$$X + X^T = \mathrm{Tr}(X)A.$$

1.2.5 Changements de base

Exercice 1.92 ★

On considère $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \mathbb{R}^2$ *tous deux munis de leurs bases canoniques respectives qu'on notera* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *et* $f = (f_1, f_2)$. *Soit* $u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}\right.$.

1. *Prouver que* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *et écrire la matrice de* u *relativement aux bases* e *et* f.
2. *On considère les familles de vecteurs* $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *avec* $e'_1 = (0,1,-1)$, $e'_2 = (1,0,2)$, $e'_3 = (1,1,0)$ *et* $f' = (f'_1, f'_2)$ *avec* $f'_1 = (1,0)$, $f'_2 = (1,1)$. *Montrer que* e' *et* f' *sont des bases de respectivement* E *et* F *et écrire les matrices de changement de base de* e *vers* e' *et de* f *vers* f'.
3. *En déduire la matrice de* u *relativement aux bases* e' *et* f'.

Exercice 1.93 ★

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* e, *on considère la famille de vecteurs* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *donnés par* $\varepsilon_1 = (1,0,2)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$. *Posons* $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E. *Donner une base de* E *adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.*
2. *Écrire, dans la base* e, *la matrice de la projection* p *de* E *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire les matrices, dans la base* e *de :*
   (a) *la projection* p' *de* E *sur* G *parallèlement à* F.
   (b) *la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G.

Exercice 1.94 ★

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\varepsilon_1 = (0,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ *et* $\varepsilon_3 = (0,1,1)$. *On pose :* $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Prouver que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E *et en déduire que* $E = F \oplus G$.
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique* e *de* E *de la projection* p *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire, dans la base canonique de* E, *la matrice de la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G *et la matrice de la projection* p' *sur* G *parallèlement à* F.

Exercice 1.95 ★

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par* A *dans la base* e. *On pose* $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\quad \varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\quad \varepsilon_3 = (1,0,2) \quad$ et $\quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}\, f$ *et de* $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 1.96 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, e_2, e_3)$*. On considère* f *l'endomorphisme de* E *dont la matrice dans la base* e *est* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^2*. Que peut-on en déduire au sujet de* f *?*
2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*
3. *Prouver de deux façons différentes que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
4. *Quelle est la matrice de* f *relativement à une base adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*

Exercice 1.97 ★

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$*. Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* e *est* A*.*

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$*. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Déterminer une base à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$ *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Écrire* f *comme composée de transformations vectorielles élémentaires.*

Exercice 1.98 ★

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, e_2, e_3)$*. On considère* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *représenté dans la base* e *par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la famille* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_1 = -e_1 + e_2 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_2$ *et* $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ *est une base de* E*. Écrire la matrice de passage de la base* e *à la base* ε*.*
2. *Calculer la matrice de* u *dans la base* ε*.*
3. *En déduire la matrice de* u^n *dans la base* e*.*

Exercice 1.99 ★ **Votre première diagonalisation**

On considère le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $e = (e_1, e_2, e_3)$*. Soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté dans la base* e *par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$*. Le but de cet exercice est de trouver une base* ε *de* E *tel que dans cette base la matrice de* u *est diagonale. On dira alors qu'on a diagonalisé* u*.*

1. *Développer le polynôme* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$*.* P *est appelé* ***polynôme caractéristique*** *de* u*.*
2. *Calculer les racines de* P*. Les trois réels trouvés sont appelées* ***valeurs propres*** *de* u*.*
3. *Déterminer des vecteurs* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *de* E *en sorte que* (ε_1) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u - id)$, (ε_2) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u - 2id)$ *et* (ε_3) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u + id)$*. Ces trois vecteurs sont des* ***vecteurs propres*** *de* u*.*
4. *Montrer que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E*.*
5. *Vérifier que la matrice de* u *dans la base* ε *est diagonale.*

1.2.6 Calculs par blocs

Exercice 1.100 ★

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in GL_p(\mathbb{K})$ *et*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Montrer que $M \in GL_{n+p}(\mathbb{K})$ *et calculer* M^{-1}.

Exercice 1.101 ★

Montrer que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Indication 1.0 : On pourra faire intervenir des nombres complexes.

Exercice 1.102 ★

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions respectives* m, $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ *de rang* r. *Notons* $\mathscr{C}(u) = \left\{v \in \mathfrak{L}(F, E) \mid u \circ v = 0_{\mathfrak{L}(F)} \quad \text{et} \quad v \circ u = 0_{\mathfrak{L}(F)}\right\}$. *Montrer que* $\mathscr{C}(u)$ *est un sev de* $\mathfrak{L}(F, E)$ *et calculer sa dimension.*

Exercice 1.103 ★

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ *et* M *la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Exercice 1.104 ★

Soient $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *On note* $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en accolant les colonnes de* B *à droite de celles de* A. *Montrer*
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \Longleftrightarrow \exists U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : \quad B = AU$$
2. *On note* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en accolant les lignes de* C *en dessous de celles de* A. *Montrer*
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \Longleftrightarrow \exists V \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : \quad C = VA$$
3. *En déduire*
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \Longleftrightarrow \exists U, V \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Exercice 1.105 ★ ***CCP PC***

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.106 ★★ ***Mines PC***

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Exprimer le rang de*
$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$$
2. *Calculer l'inverse de* M *lorsque cela est possible.*

1.2.7 Matrices semblables

Exercice 1.107 ★ ***TPE PC 2006***

On considère

$$\mathrm{S} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{A} = (a_{i,j}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, a_{j,i} \end{array} \right. .$$

Montrer que si A *et* B *sont semblables alors* $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{B})$.

Exercice 1.108 ★★ ***X PC 2011***

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $n+1$ *réels deux à deux distincts. Trouver l'inverse (après avoir justifié son existence) de la matrice de Vandermonde en considérant*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(x_0), \mathrm{P}(x_1), \dots, \mathrm{P}(x_n)) \end{array} \right. .$$

Exercice 1.109 ★★★ ***Centrale PC 2017,2019***

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.110 ★★ ***X PC 2016***

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = 0$ *et* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$. *Montrer que* A *et* B *sont semblables.*

Exercice 1.111 ★★ ***Mines PC 2018***

Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *non nulle telle que* $\mathrm{M}^2 = 0$. *Montrer que* M *est semblable à* $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.8 Nilpotence

Exercice 1.112 ★

Soient A *et* B *des matrices complexes carrées d'ordre* n. *On suppose les matrices* $\mathrm{A} + 2^k\mathrm{B}$ *nilpotentes pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant n$. *Montrer que les matrices* A *et* B *sont nilpotentes.*

Exercice 1.113 ★ ***X MP***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A *et* B *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ *deux à deux distincts dans* $\mathbb{C}$. *On suppose, pour* $1 \leqslant i \leqslant n+1$, *que* $\mathrm{A} + \lambda_i\mathrm{B}$ *est nilpotente.*

Montrer que A *et* B *sont nilpotentes.*

Exercice 1.114 ★ ***Centrale PC***

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On note* $\mathrm{E}^* = \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathbb{C})$ *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des formes linéaires sur* E.

1. *Montrer que* $\mathrm{L} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$, $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{L}_\mathrm{A}$ *où* L_A *est la forme linéaire* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{AM})$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire une description des hyperplans de* E.
2. *Soit* $\mathrm{T} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice triangulaire supérieure non nulle et* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{L}_\mathrm{T}$.
   On note T_n^+ *(respectivement* T_n^-*) le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) à diagonales nulles.*
   Déterminer $\mathrm{H} \cap \mathrm{T}_n^+$.
   En discutant selon que T *possède ou non un coefficient non nul (au moins) hors de la diagonale, déterminer la dimension de* $\mathrm{H} \cap \mathrm{T}_n^-$.
3. *Une matrice* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est dite nilpotente s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{A}^k = 0$.
   Prouver que les éléments de $\mathrm{T}_n^+ \cup \mathrm{T}_n^-$ *sont des matrices nilpotentes.*
   En déduire que H *contient au moins* $n^2 - n - 1$ *matrices nilpotentes linéairement indépendantes.*
4. *Montrer que tout hyperplan de* E *contient au moins* $n^2 - n - 1$ *matrices nilpotentes linéairement indépendantes.*

Exercice 1.115 ★★

Soit A *une matrice carrée nilpotente de taille* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que la matrice* $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ *est inversible.*

Exercice 1.116 ★ ***X MP***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soient* n *endomorphismes* $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{L}(E)$ *tous nilpotents et qui commutent deux à deux. Montrer que leur produit est nul.*

Exercice 1.117 ★★★ ***X PC 2018***

Existe-t-il $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *?*

Exercice 1.118 ★★ ***Mines PC 2018***

Soient E *un espace de dimension finie* $n \geqslant 1$ et $f_1, \dots, f_n$ n *endomorphismes de* E *nilpotents qui commutent. Montrer que* $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$.

1.3 Déterminants

1.3.1 Formes multilinéaires alternées

Exercice 1.119 ★

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.
Soient f *une forme linéaire sur* E, p *la projection vectorielle sur* F *parallèlement à* G *et* $q = Id - p$ *sa projection complémentaire.*
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ *définie par*

$$\varphi(x, y) = f(p(x)) f(q(y)) - f(p(y)) f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

1.3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 1.120 ★

Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* f *un endomorphisme de* E *vérifiant* $f^2 = -Id$*. Montrer que l'espace* E *est de dimension paire.*

Exercice 1.121 ★

Soit $V = \left\{ x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$.

1. *Montrer que* V *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dont on déterminera la dimension.*
2. *Montrer que l'application* $D : f \mapsto f'$ *est un endomorphisme de* V *dont on calculera le déterminant.*

Exercice 1.122 ★ ***Centrale PC***

Soit f *un endomorphisme du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

1. *Montrer qu'il existe un unique couple de complexes* (a, b) *tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z}$$

2. *Exprimer en fonction de* a *et* b *le déterminant de* f.

1.3.3 Déterminant d'une matrice

Exercice 1.123 ★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique avec* n *impair. Montrer qu'elle n'est pas inversible.*

Exercice 1.124 ★

Soit la matrice $A = ((\inf(i, j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Calculer son déterminant.*

Exercice 1.125 ★

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *avec* $n > p$*. Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Exercice 1.126 ★ ***X 2016***

1. *On pose*

$$\mathrm{P}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathrm{C}\\ (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x^iy^j\end{array}\right. .$$

   On suppose qu'il existe $x_1,\dots,x_{n+1}$ *des complexes distincts et* $y_1,\dots,y_{n+1}$ *des complexes distincts tels que :* $\forall (i,j)\in [\![1,n+1]\!]^2,\quad \mathrm{P}(x_i,y_j)=0$. *Montrer que* $\mathrm{P}=0$.

2. *Si on suppose à la place que :* $\forall i\in[\![1,n+1]\!],\quad \exists \mathrm{P}_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{C}^2:\quad \mathrm{P}(xi,yi)=0$ *et* $\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2, i\neq j \implies \mathrm{P}_i\neq \mathrm{P}_j$ *que peut-on conclure ?*

1.3.4 Calcul de déterminants

Exercice 1.127 ★

Calculer le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 1 & & & -1\end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.128 ★

Calculer le déterminant

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}(x+1) & 1 & \dots & & 1\\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2\\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & & \dots & & (x+n)\end{vmatrix}$$

Exercice 1.129 ★

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. *Calculer*

$$\begin{vmatrix}\mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_1 & \cdots & \mathrm{S}_1\\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_2 & \cdots & \mathrm{S}_2\\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \cdots & \mathrm{S}_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \cdots & \mathrm{S}_n\end{vmatrix}$$

où pour tout $1\leqslant k\leqslant n$ *on a*

$$\mathrm{S}_k=\sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 1.130 ★

Soient $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{K}$. *Calculer*

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & a_2\\ (a_1) & & & a_1\end{vmatrix}$$

Exercice 1.131 ★★ ***Centrale PC 2003***

Calculer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.132 ★★ ***CCP PC 2003***

Soient a, b, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. On se propose de calculer

$$\Delta = \begin{pmatrix} r_1 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & r_n \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, on introduit le déterminant d'ordre n :

$$\mathrm{P}(x) = \begin{pmatrix} r_1 - x & b-x & \dots & b-x \\ a-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ a-x & \dots & a-x & r_n - x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{C}$.

1. *Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.*
2. *Calculer $\mathrm{P}(a)$ et $\mathrm{P}(b)$ quand $a \neq b$.*
3. *Déterminer entièrement $\mathrm{P}(x)$ et Δ quand $a \neq b$.*
4. *En utilisant la continuité de l'application qui à chaque réel b associe $\mathrm{P}(0)$, déduire Δ lorsque $a = b$*

Exercice 1.133 ★

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ii} = 1, a_{1,i} = 1, a_{i1} = 1$ et 0 sinon.

Exercice 1.134 ★

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = \alpha$ pour $i \leqslant j$ et $a_{ij} = 1$ pour $i > j$.

Exercice 1.135 ★

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ii} = i$ et sinon $a_{ij} = 2$.

Exercice 1.136 ★

Calculer le déterminant $(2p) \times (2p)$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \nearrow & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \nearrow & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

Exercice 1.137 ★

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Exercice 1.138 ★

Caluler $\mathrm{D} = \det\max(i,j) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & \dots & n \end{vmatrix}$.

Exercice 1.139 ★

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

Exercice 1.140 ★

Calculer $\det(ia + jb)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.141 ★

Calculer $\det(1 + a_i a_j)$ où $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.142 ★

Calculer $\det(\left|i - j\right|)$.

Exercice 1.143 ★

Soit f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*. On pose*

$$\Delta(h) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 1 & f(x+h) & f(x+2h) \\ 1 & f(x+2h) & f(x+3h) \end{vmatrix}$$

Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \Delta(h)/h^2$$

Exercice 1.144 ★

Calculer les déterminants suivants en utilisant un déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Indication 1.0 : Pour le deuxième, introduire

$$\mathrm{P}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.145 ★ **Mines 1992**

Calculer le déterminant $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 1.146 ★ **Déterminant de Cauchy**

On considère $2n$ *scalaires* $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ *tels que tous les* a_i *sont distincts et* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_i \neq 0$. *On veut calculer le* déterminant de Cauchy *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

a. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \frac{(b_1 - \mathrm{X})\dots(b_{n-1} - \mathrm{X})}{(\mathrm{X} + a_1)\dots(\mathrm{X} + a_n)}$$

b. *Exprimer* Δ_n *en fonction de* Δ_{n-1}.

c. *Calculer* Δ_n.

Exercice 1.147 ★★★ **Centrale MP**

Calculer

$$\mathrm{D}_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.148 ★★★ **Centrale MP**

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *distincts et* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \lambda_i)$. *Calculer :*

$$\Delta(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{\mathrm{X}-\lambda_1} & \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{\mathrm{X}-\lambda_2} & \cdots & \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{\mathrm{X}-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

1.3.5 Calcul de déterminants par blocs

Exercice 1.149 ★★★ **Mines MP**

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* C *et* D *commutent.*

1. *On suppose que* D *est inversible, établir*

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC}).$$

2. *Généraliser la formule au cas où* D *n'est plus supposée inversible.*

Exercice 1.150 ★ **Centrale MP**

1. *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

2. *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. *Montrer que* $\det(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) \geqslant 0$.
3. *Trouver un contre-exemple à b) si* A *et* B *ne commutent pas.*

Exercice 1.151 ★ **Centrale PC**

Soient $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. *À quelle condition la matrice* A *est-elle inversible ?*
2. *Donner son inverse quand cela est possible.*

1.3.6 Calcul de déterminants en utilisant une relation de récurrence

Exercice 1.152 ★

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.153 ★

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.154 ★

Calculer le déterminant tridiagonal avec $\alpha+\beta$ *sur la diagonale principale,* 1 *en dessous et* $\alpha\beta$ *au dessus.*

Exercice 1.155 ★

Calculer le déterminant tridiagonal avec des 1 *partout.*

Exercice 1.156 ★

Calculer le déterminant tridiagonal

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.157 ★★★ **X PC 2018**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$*, on pose :*

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

et

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Montrer que pour $n \geqslant 2$, $[a_1, \dots, a_n] = \dfrac{D(a_1, \dots, a_n)}{D(a_2, \dots, a_n)}$.

1.3.7 Exercices théoriques sur les déterminants

Exercice 1.158 ★

Soient deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *avec* $p < n$. *Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Exercice 1.159 ★

Considérons pour $n \geqslant 2$, *l'application*

$$\det : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 1.160 ★

Déterminer toutes les formes p*-linéaires alternées sur* $\mathbb{R}^n$ *où* $p > n$.

Exercice 1.161 ★

Dans $\mathbb{R}^5$, *déterminer tous les endomorphismes* f *vérifiant* $f^2 + \mathrm{id} = 0$.

Exercice 1.162 ★

Déterminer le rang de la comatrice $\widetilde{A}$ *en fonction du rang de* A. *(Penser à la caractérisation du rang par les matrices extraites.)*

Exercice 1.163 ★

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *de colonnes* $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. *On définit à partir des colonnes de* A, *la matrice* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *de vecteurs colonnes* $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *où :*

$$B_i = \sum_{j \neq i} A_i$$

Exprimez le déterminant de la matrice B *en fonction du déterminant de la matrice* A.

Exercice 1.164 ★

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficients entiers relatifs. Montrer l'équivalence*

$$\underset{(i)}{\big(A \text{ inversible et } A^{-1} \text{ a ses coefficients dans } \mathbb{Z}\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\det(A) = \pm 1\big)}$$

Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ *est un sous-groupe de* $Gl_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.165 ★ ***Des matrices réelles semblables dans*** $\mathbb{C}$ ***sont semblables dans*** $\mathbb{R}$

Soient deux matrices à coefficients réels $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. *On suppose qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.166 ★

On considère un système $(f_1, \dots, f_n)$ *de fonctions de* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *qui est libre dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* n *réels* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tels que la matrice* $A = ((f_i(x_j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *soit inversible.*

Exercice 1.167 ★

Soit une application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ *non-constante vérifiant :*

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad f(AB) = f(A) f(B)$$

Montrer que

$$\underset{(i)}{\big(f(A) = 0\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\det(A) = 0\big)}$$

Exercice 1.168 ★

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ i + j > n + 1 \implies a_{ij} = 0$$

Calculer $\det(A)$. *Si on suppose de plus que* $a_{ij} > 0$ *lorsque* $i + j \leqslant n + 1$, *déterminer le signe de* $\det(A)$.

Exercice 1.169 ★

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et on définit la matrice* $A' = ((\ (-1)^{i+j} a_{ij}))$. *Exprimer* $\det(A')$ *en fonction de* $\det(A)$.

Exercice 1.170 ★

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *et l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$. *Exprimer* $\det(f)$ *en fonction de* $\det(A)$.

Exercice 1.171 ★

Calculer pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, *le déterminant d'ordre* $(2n)$: $m = \begin{vmatrix} a & & \mathbb{O} & b & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & \mathbb{O} & & b \\ c & & \mathbb{O} & d & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & c & \mathbb{O} & & d \end{vmatrix}$.

Exercice 1.172 ★

Quel est de déterminant de l'endomorphisme Φ *défini par*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array} \right. .$$

Exercice 1.173 ★

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n > p$. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Exercice 1.174 ★★★ ***Mines PC 2009***

Soient $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AC = CA$. *On pose* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. *Montrer que*

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

1.3.8 Algèbre linéaire

entrale PSI

Exercice 1.175 ★ ***Centrale PSI 2013***

Mots-clés : caractérisation de la dimension

Soient E *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 1$ *et* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* E.

1. *Soient* F *et* F′ *dans* $\mathcal{S} \setminus \{E\}$. *Montrer que* $F \cup F' \neq E$.
2. *Soient* H *et* H′ *deux hyperplans de* E. *Montrer qu'il existe* $D \in \mathcal{S}$ *tel que* $H \oplus D = H' \oplus D = E$.
3. *Soit* $d : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{N}$ *vérifiant :* $d(E) = n$ *et* $\forall F, F' \in \mathcal{S},\ F \cap F' = \{0\} \Longrightarrow d(F + F') = d(F) + d(F')$. *Montrer que* $\forall F \in \mathcal{S},\ d(F) = \dim(F)$.

5 X ESPCI PC

Exercice 1.176 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : changement de corps

Soit (v_1, v_2, v_3) *une famille libre de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Est-ce encore une famille libre si on voit les vecteurs dans* $\mathbb{C}^3$?

7 X ESPCI PC

Exercice 1.177 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* A *une partie non vide de* E. *Montrer qu'il existe une base de* $\mathrm{V}ect(A)$ *formée de vecteurs de* A.

1155 TPE PC

Exercice 1.178 ★ ***TPE PC 2009***

Mots-clés : caractérisation des sommes directes

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* $V_1, \dots, V_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E. *Montrer que la somme* $\sum_{k=1}^{n} V_k$ *est directe si et seulement si* $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$ *est directe et* $(\sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n = \{0\}$.

1042 TPE PC

Exercice 1.179 ★ ***TPE PC 2010 , TPE EIVP PC 2013***

Mots-clés : supplémentaire commun

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel* H *de* E *tel que* $F \oplus H = G \oplus H = E$. *Ind. On pourra faire une récurrence sur* $\dim E - \dim F$.

170 CCP PSI

Exercice 1.180 ★ ***CCP PSI 2014***

Mots-clés : supplémentaire commun

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels. Montrer que* F_1 *et* F_2 *sont isomorphes si et seulement s'ils ont un supplémentaire commun.*

entrale PSI **Exercice 1.181** ★ **Centrale PSI 2015**

Mots-clés : supplémentaire commun

Montrer que deux sous-espaces d'un espace de dimension finie ont la même dimension si et seulement s'ils admettent un supplémentaire commun.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.182** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : complémentaire d'un hyperplan

Soient E *un espace de dimension* $n \geqslant 2$ *et* H *un hyperplan de* E. *Soit* $X = (E \setminus H) \cup \{0\}$. *L'ensemble* X *est-il un espace vectoriel ? Que vaut* $\mathrm{V}ect(X)$ *?*

es Ponts PSI **Exercice 1.183** ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $\beta = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. *On suppose que* $\forall f \in E^*, \quad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$. *Montrer que* β *est une base de* E.

nes Ponts PC **Exercice 1.184** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient E *un espace de dimension finie,* $(x_1, \ldots, x_p)$ *une famille libre de vecteurs de* E. *Peut-on trouver des formes linéaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ *telles que* $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2, \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ *?*

nes Ponts PC **Exercice 1.185** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : intersection d'hyperplans

Soient E *un espace de dimension finie,* φ *et* ψ *dans* E^* *indépendantes. Déterminer* $\dim(\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi)$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.186** ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : intersection d'hyperplans

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $0 \leqslant p \leqslant n$, E *un espace de dimension* n. *Déterminer* $\min \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p)$ *lorsque* $H_1, \ldots, H_p$ *sont des hyperplans de* E.

nes Ponts PC **Exercice 1.187** ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : intersection d'hyperplans

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $1 \leqslant p \leqslant n$, E *un espace vectoriel de dimension finie* n *et* $(f_1, \ldots, f_p)$ *des formes linéaires linéairement indépendantes. Montrer qu'il existe* $(x_1, \ldots, x_p)$ *dans* E^p *tel que* $E = \mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_p \oplus \cap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.188** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : réunion de sous-espaces vectoriels

Soient E *un espace vectoriel,* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces stricts de* E. *Peut-on avoir* $F_1 \cup F_2 = E$ *?*

nes Ponts PC **Exercice 1.189** ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : réunion d'hyperplans

1. *Soient* E *un espace vectoriel,* A *et* B *deux sous-espaces de* E. *On suppose que* $E = A \cup B$. *Montrer que* $A \subset B$ *ou* $B \subset A$.
2. *Montrer que* $\mathbb{R}^n$ *ne peut s'écrire comme réunion de* p *hyperplans.*

5 X ESPCI PC **Exercice 1.190** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : produit cartésien d'espaces vectoriels

Soit E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension* n, $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E, *et* F *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension* p, $(f_1, \ldots, f_p)$ *une base de* F.

1. *Montrer que la famille* $(e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$ *est libre.*
2. *Donner une base de* $E \times F$ *ainsi que sa dimension.*
3. *Soit* G *le sous-espace vectoriel de* $E \times F$ *engendré par les* (e_i, f_j) *pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $j \in \{1, \ldots, p\}$. *Déterminer la dimension de* G.

es Ponts PSI **Exercice 1.191** ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *et, pour* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $L_k : P \in \mathbb{C}_p[X] \mapsto P(a_k)$. *Montrer que* $L_k \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_p[X], \mathbb{C})$. *Déterminer le rang de* $(L_1, \ldots, L_n)$.

52 ENSAM PSI **Exercice 1.192** ★ **ENSAM PSI 2013**

Soit $n \geqslant 2$. *Si* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *on note* u_i *le vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les coordonnées valent 1 sauf la* i*−ième qui vaut* -1.

1. *La famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^n$ *?*
2. *Trouver la base duale de* $(u_1, \ldots, u_n)$.

es Ponts PC

Exercice 1.193 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit f_1 *et* f_2 *deux formes linéaires indépendantes de* $\mathbb{R}^5$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer qu'il existe* x_1, x_2 *dans* $\mathbb{R}^5$ *tels que* $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ *pour* $(i,j) \in \{1,2\}^2$.
2. *Montrer que* $\mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus (\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2) = \mathbb{R}^5$.

1.3.9 Polynômes

3 X ESPCI PC

Exercice 1.194 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 *dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

1. *On suppose que* $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. *La famille* (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-elle liée ?*
2. *On suppose que* $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. *La famille* (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-elle liée ?*

Centrale PC

Exercice 1.195 ★ ***Centrale PC 2009***

Soit, pour $k \in \mathbb{N}$: $P_k = (X-1)^k (X+1)^k$. *Montrer que* $(P_0, \dots, P_n)$ *est une famille libre. Trouver les racines de* $P = \sum_{k=0}^n P_k$.

976 CCP PSI

Exercice 1.196 ★ ***CCP PSI 2015***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}$.

1. *Montrer que si* $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$ *alors* $(P_k(X+a))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *aussi.*
2. *Soit* $a \neq b$. *Montrer que* $((X-a)^k (X-b)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Saint-Cyr PC

Exercice 1.197 ★ ***RMS 2015 1026 Saint-Cyr PC***

(Maple) Soit la famille $F = ((X-k)^k (X+k)^{6-k})_{0 \leqslant k \leqslant 6}$.

1. *Montrer que* F *est une base de* $\mathbb{R}_6[X]$.
2. *Décomposer le polynôme* $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$ *dans la base* F.

3 X ESPCI PC

Exercice 1.198 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : endomorphisme $\mathrm{id} - \Delta$ *sur l'espace des polynômes*

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. *Montrer que* $\Phi - \mathrm{id}$ *est nilpotent.*
2. *Soit* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *de degré* n. *Montrer que* $(P, \Phi(P), \dots, \Phi^n(P))$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Centrale PSI

Exercice 1.199 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : endomorphisme $\mathrm{id} - \Delta$ *sur l'espace des polynômes*

Soit $n \geqslant 1$ *et* T *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *défini par* $T : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. *Montrer que* T *est nilpotent.*
2. *En déduire que* $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0$.

168 CCP PSI

Exercice 1.200 ★ ***CCP PSI 2014***

Mots-clés : endomorphisme Δ *sur l'espace des polynômes*

Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, *on note* $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.

1. *Déterminer la matrice de* φ *dans la base canonique.*
2. *Déterminer* φ^{-1} *ainsi que la matrice de* φ^{-1} *dans la base canonique.*

30 X ENS PSI

Exercice 1.201 ★ ***X ENS PSI 2009***

Soient $I_0, \dots, I_n$ *des segments de* $\mathbb{R}$ *deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ *non nul tel que :* $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \int_{I_k} P = 0$. *Peut-on remplacer* $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ *par* $\mathbb{R}_n[X]$ *?*

31 X ENS PSI

Exercice 1.202 ★ ***X ENS PSI 2009***

Pour $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, *on considère l'égalité* $(*)$ *:*

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0) \Big).$$

1. *Trouver les polynômes* $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ *tels que* $(*)$ *soit vraie pour tout* $c \in \mathbb{R}^n$.

2. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $(*)$ *soit vérifiée pour tout* $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

0 X ESPCI PC **Exercice 1.203** ★ ***X ESPCI PC 2009***

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $a_0, \dots, a_n$ *des réels distincts. Montrer qu'il existe* $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k P(a_k)$.

1034 TPE PC **Exercice 1.204** ★ ***TPE PC 2010***

Montrer que $((1-X)^n, (1-X)^{n-1}X, \dots, (1-X)X^{n-1}, X^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Centrale PC **Exercice 1.205** ★ ***Centrale PC 2013***

Soit $\Phi : P \in \mathbb{C}_5[X] \mapsto (P(1), P(j), P(j^2), P'(1), P'(j), P'(j^2)) \in \mathbb{C}^6$.

1. *Montrer que* Φ *est un isomorphisme.*

2. *Montrer qu'il existe une base* $(A_1, \dots, A_6)$ *de* $\mathbb{C}_5[X]$ *telle que :*

$$\forall P \in \mathbb{C}_5[X], \quad P = P(1)A_1 + P(j)A_2 + P(j^2)A_3 + P'(1)A_4 + P'(j)A_5 + P'(j^2)A_6.$$

   Déterminer A_1 *et* A_4.

3. *Exprimer* $P(jX)$ *dans la base* $(A_1, \dots, A_6)$. *En déduire* A_2, A_3, A_5, A_6.

Centrale PSI **Exercice 1.206** ★ ***Centrale PSI 2015***

Soient $u \in \mathbb{R}$ *et* $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *la famille de polynômes définie par* $P_0 = 1$ *et, pour* $k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k(X) = X(X - ku)^{k-1}$.

1. *Montrer que* $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Montrer que, pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) = P(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(ku)}{k!} P_k(X)$.

1.3.10 Fonctions

nes Ponts PC **Exercice 1.207** ★ ***Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2013***

Soient $a_1, \dots, a_n$ *des réels* > 0 *deux à deux distincts. Soit* $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2 + a_k^2}$. *La famille* $(f_1, \dots, f_n)$ *est-elle libre ?*

Centrale PC **Exercice 1.208** ★ ***Centrale PC 2013***

Si $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kx)$ *et* $g_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^k(x)$. *Montrer que les familles* $(f_k)_{k \geqslant 1}$ *et* $(g_k)_{k \geqslant 1}$ *sont libres.*

3 X ESPCI PC **Exercice 1.209** ★ ***X ESPCI PC 2013***

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *des réels distincts et, pour* $k \in \{1, \dots, n\}, \quad f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\alpha_k x}$. *Montrer que la famille* $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre.*

4 X ESPCI PC **Exercice 1.210** ★ ***X ESPCI PC 2013***

Soit $n \geqslant 2$. *Donner un exemple de* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *telle que* $(f, f', \dots, f^{(n-1)})$ *soit libre et* $f^{(n)} = f$.

169 CCP PSI **Exercice 1.211** ★ ***CCP PSI 2014***

Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n\}$.

1. *Montrer qu'il s'agit d'un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

2. *Déterminer la dimension de l'ensemble des suites de* E *ayant pour limite 0.*

0 X ESPCI PC **Exercice 1.212** ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : matrice de Casorati

Soient A *un ensemble,* $E = \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, F *un sous-espace de dimension* n *de* E. *Montrer l'existence de* $f_1, \dots, f_n$ *dans* F *et de* $x_1, \dots, x_n$ *dans* A *tels que* $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = I_n$.

1.3.11 Matrices, applications linéaires

nes Ponts PC ***Exercice 1.213*** ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

) X ESPCI PC ***Exercice 1.214*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : famille de matrices de rang 1

Soient $v_1,\dots,v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose la famille $(v_1,\dots,v_k)$ libre. Montrer que $(v_1 {v_1}^{\mathrm{T}},\dots,v_k {v_k}^{\mathrm{T}})$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la réciproque.

1313 CCP PC ***Exercice 1.215*** ★ ***CCP PC 2012***

Soit

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Montrer que E *est un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble* E *est-il un sous-anneau de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *?*

tes Mines PC ***Exercice 1.216*** ★ ***Petites Mines PC 2010***

Mots-clés : sous-espace vectoriel de matrices circulantes

Soit $\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. *Montrer que* E *est un espace vectoriel stable par multiplication. Déterminer une base ainsi que la dimension de* E.

3 X ESPCI PC ***Exercice 1.217*** ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : sous-espace vectoriel de matrices ayant un vecteur propre donné

Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *et* $\mathrm{V} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{M}x = \lambda x\}$. *Montrer que* V *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Préciser sa dimension.*

es Ponts PSI ***Exercice 1.218*** ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels de dimensions finies. Pour* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *soit* $\mathscr{H} = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}), \quad f \circ g \circ f = 0\}$. *Déterminer* $\dim \mathscr{H}$.

1.3.12 Applications linéaires

2 X ESPCI PC ***Exercice 1.219*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : supplémentaire dans un produit cartésien

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de* $\{0_{\mathrm{E}}\} \times \mathrm{F}$ *dans* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *est de la forme* $\{(x, f(x)), \quad x \in \mathrm{E}\}$ *avec* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

9 X ESPCI PC ***Exercice 1.220*** ★ ***X ESPCI PC 2013***

Soient E *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* F *un sous-espace strict de* E. *Déterminer les formes linéaires* $\varphi \in \mathrm{E}^*$ *nulles sur* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$.

5 X ESPCI PC ***Exercice 1.221*** ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : théorème de factorisation des applications linéaires

Soient E, F G *trois espaces vectoriels de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $w \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$. *Montrer :* $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w \iff \exists v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}), \quad v \circ u = w$.

nes Ponts PC ***Exercice 1.222*** ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Mots-clés : théorème de factorisation des applications linéaires

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$ *si et seulement s'il existe* $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $u = v \circ a$.

nes Ponts PC ***Exercice 1.223*** ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Mots-clés : théorème de factorisation des applications linéaires

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$ *si et seulement s'il existe* $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $v = a \circ u$.

4 X ESPCI PC ***Exercice 1.224*** ★ ***X ESPCI PC 2012***

Soient E, F *et* G *trois espaces vectoriels de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ *si et seulement si* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

3 X ESPCI PC

Exercice 1.225 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : pseudo-inverse

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

1. *Montrer qu'il existe* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *tel que* $u \circ v \circ u = u$.
2. *Peut-on avoir la condition supplémentaire* $v \circ u \circ v = v$?

Centrale PC

Exercice 1.226 ★ ***Centrale PC 2009***

Mots-clés : pseudo-inverse

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *On dit que* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *vérifie* $(*)$ *si* $u \circ v \circ u = u$ *et* $v \circ u \circ v = v$.

1. *Montrer que si* v *vérifie* $(*)$, *alors* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ *et* $\mathrm{F} = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.
2. *Soient* E_1 *un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} u$ *dans* E *et* F_1 *un supplémentaire de* $\operatorname{Im} u$ *dans* F. *Montrer qu'il existe un unique* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *vérifiant* $(*)$ *et tel que* $\mathrm{E}_1 = \operatorname{Im} v$ *et* $\mathrm{F}_1 = \operatorname{Ker} v$.

Centrale PC

Exercice 1.227 ★ ***Centrale PC 2015***

Mots-clés : des isomorphismes parmi les composées

Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. *On pose* $w = v \circ u$. *Montrer que* w *est un automorphisme (isomorphisme, en fait) si et seulement si* v *est surjective,* u *est injective et* $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = \mathrm{F}$.

903 TPE PSI

Exercice 1.228 ★ ***TPE PSI 2007***

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*–espaces vectoriels de dimension finie et* G *un sous-espace vectoriel de* E. *On pose* $\mathrm{A} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}), \quad \mathrm{G} \subset \operatorname{Ker} u\}$. *Montrer que* A *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *dont on donnera la dimension.*

1.3.13 Applications linéaires définies sur un espace vectoriel de matrices

3 X ESPCI PC

Exercice 1.229 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : caractérisation de la trace, sous-espace vectoriel engendré par les commutateurs

1. *Montrer :* $\mathrm{Vect}\{\mathrm{AB}-\mathrm{BA}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}$.
2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ *telle que :* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA})$. *Montrer que* φ *est proportionnelle à la trace.*

5 X ESPCI PC

Exercice 1.230 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : caractérisation de la trace

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$. *On suppose que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA})$ *et* $\varphi(\mathrm{I}_n) = n$. *Montrer que* $\varphi = \operatorname{Tr}$.

3 109 ENS PC

Exercice 1.231 ★ ***ENS PC 2013***

Mots-clés : forme linéaire invariante par similitude, caractérisation de la trace

Soit $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

1. *On suppose que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \Phi(\mathrm{AB}) = \Phi(\mathrm{BA})$. *Montrer que* Φ *est proportionnelle à la trace.*
2. *On suppose que* $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \Phi(\mathrm{A})$. *Montrer que* Φ *est proportionnelle à la trace.*

5 X ESPCI PC

Exercice 1.232 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Mots-clés : forme linéaire invariante par similitude, caractérisation de la trace

1. *Soit* $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})$. *Montrer qu'il existe une unique matrice* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que :* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(\mathrm{M}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{AM})$.
2. *Soit* $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ *invariante par similitude i.e. telle que :* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}) = \Phi(\mathrm{M})$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Phi = \lambda \operatorname{Tr}$.

Centrale PSI

Exercice 1.233 ★ ***Centrale PSI 2013***

Mots-clés : caractérisation de la trace

1. *Soit* f *une forme linéaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'il existe une unique* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que :* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(\mathrm{M}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{AM})$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ *telle que :* $\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad f(\mathrm{MN}) = f(\mathrm{NM})$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{Tr}(\mathrm{M})$.
3. *Soit* $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ *tel que :* $\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \psi(\mathrm{MN}) = \psi(\mathrm{M})\psi(\mathrm{N})$ *et* $\psi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$. *Montrer que* $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Tr}(\psi(\mathrm{M})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})$.

Centrale PC **Exercice 1.234** ★ **Centrale PC 2013 , Centrale PC 2014**

Mots-clés : caractérisation de la trace

Déterminer les $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ *telles que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(\mathrm{AB}) = \Phi(\mathrm{BA})$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.235** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : endomorphisme multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *tel que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})$. *Montrer que* f *est soit injectif, soit nul.*

2 X ESPCI PC **Exercice 1.236** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : forme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces de* $\mathbb{C}^n$ *de même dimension. Montrer qu'il existe* $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $f(\mathrm{F}) = \mathrm{G}$.
2. *Soit* F *un sous-espace de* $\mathbb{C}^n$ *de dimension* $r < n$. *Montrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent* f *de* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $\mathrm{Im} f = \mathrm{F}$.
3. *Soit* $\Phi \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *non constante telle que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad ,\Phi(\mathrm{AB}) = \Phi(\mathrm{A})\Phi(\mathrm{B})$. *Montrer que* $\Phi(\mathrm{A}) = 0$ *si et seulement si* A *n'est pas inversible.*

7 X ESPCI PC **Exercice 1.237** ★ **X ESPCI PC 2015 , Centrale PC 2015**

Mots-clés : forme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *non constante telle que* $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})$. *Montrer que* $f(\mathrm{A}) = 0$ *si et seulement si* A *est non inversible.*

71 ENSAM PSI **Exercice 1.238** ★ **ENSAM PSI 2008**

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $f : \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{AX} + \mathrm{XA}$. *Montrer que* f *est un endomorphisme et calculer sa trace.*

5 X ESPCI PC **Exercice 1.239** ★ **X ESPCI PC 2012 , 2013 305 X ESPCI PC, Centrale PC 2013**

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\Phi \colon \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{AMB}$. *Calculer la trace de* Φ.

Centrale PSI **Exercice 1.240** ★ **Centrale PSI 2007**

Mots-clés : déterminant et trace de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme* φ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par* $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.241** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : déterminant du produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\Phi \colon \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{AM} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* $\det \Phi$.

9 X ESPCI PC **Exercice 1.242** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : sous-algèbre commutative contenant les matrices diagonales, trace du crochet de Lie

Si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *on pose* $\mathrm{D}(\mathrm{M}) : \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Si* M *et* M′ *commutent, montrer que* $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{D}(\mathrm{M}')$ *commutent.*
2. *Soit* $\mathcal{H}$ *une sous-algèbre commutative de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *contenant l'ensemble* $\mathcal{D}$ *des matrices diagonales. Montrer que* $\mathcal{H} = \mathcal{D}$.
3. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Calculer la trace de* $\mathrm{D}(\mathrm{M})$.

960 CCP PSI **Exercice 1.243** ★ **CCP PSI 2013**

Mots-clés : hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit f *une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{AM})$. *En déduire que tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *contient une matrice inversible.*

1049 CCP PC **Exercice 1.244** ★ **CCP PC 2013**

Mots-clés : hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Montrer que le noyau d'une forme linéaire φ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *contient au moins une matrice inversible.*

nes Ponts PC **Exercice 1.245** ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *contenant les matrices nilpotentes*

Soit $n \geqslant 2$.

1. *Soit* F *un sous-espace de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *contenant toutes les matrices nilpotentes. Montrer que* F *contient au moins une matrice inversible.*
2. *Soit* H *un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* H *contient au moins une matrice inversible.*

1.3.14 Endomorphismes

Centrale PSI

Exercice 1.246 ★ ***Centrale PSI 2007***

Soient E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On suppose que* $E = F \oplus G$ *et on note* p *(respectivement* q*) le projecteur sur* F *(respectivement* G*) parallèlement à* G *(resp.* F*). Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que* F *est stable par* f *si et seulement si* $q \circ f \circ p = 0$.

7 X ESPCI PC

Exercice 1.247 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : caractérisation de l'inverse en dimension infinie

Soient E *un espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose qu'il existe un unique* $v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u \circ v = \mathrm{id}_E$.

1. *Montrer que* $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
2. *Donner un contre-exemple s'il n'y a pas unicité.*

310 ENSEA PC

Exercice 1.248 ★ ***ENSEA PC 2012***

Mots-clés : endomorphisme $\mathrm{id} - \Delta$ *sur l'espace des polynômes*

Soit $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. *Montrer que* f *est linéaire, déterminer* $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Im}\, f$.
2. *Montrer que si* $Q \in \mathbb{R}[X]$, *alors il existe un unique* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $f(P) = Q$ *et* $P(0) = 0$. *Simplifier alors* $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$.
3. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n} k^2$. *Généraliser.*

Centrale PC

Exercice 1.249 ★ ***Centrale PC 2009***

Mots-clés : noyaux itérés

Soient E *un espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $K_n = \mathrm{Ker}\, f^n$ *et* $I_n = \mathrm{Im}\, f^n$. *Soient* $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ *et* $I = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

1. *Montrer que* K *et* I *sont des sous-espaces vectoriels de* E.
2. *On suppose qu'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $I_q = I_{q+1}$. *Montrer que* $\forall n \geqslant q, \quad I_n = I_q$. *Montrer un résultat analogue pour les* K_n.
3. *On suppose que* E *est de dimension finie. Montrer que* $E = K \oplus I$.

Centrale PSI

Exercice 1.250 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : noyaux itérés

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels sur un même corps (*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

1. *Montrer que s'il existe une application linéaire de* E *dans* F *dont l'image et le noyau sont de dimensions finies, alors* E *est de dimension finie.*
2. *On suppose dans la suite que* f *est un endomorphisme de* E *dont le noyau est de dimension finie. Soit* K_n *le noyau de* f^n. *Montrer que* K_n *est aussi de dimension finie.*
3. *Montrer que la suite de terme général* $\dim(K_{n+1}) - \dim(K_n)$ *est décroissante. En déduire qu'il existe des entiers* a, b, N *tels que* $\forall n \geqslant N, \quad \dim(K_n) = an + b$.
4. *Pour* $p \in \mathbb{N}^*$, *donner un exemple avec* $\dim(K_n) \sim np$ *quand* n *tend vers l'infini.*

Centrale PSI

Exercice 1.251 ★ ***Centrale PSI 2010***

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Pour toute* $f \in E$, *on pose* $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. *L'application* Φ *est-elle injective ? Surjective ?*
2. *Déterminer le noyau de* Φ.

5 969 CCP PC **Exercice 1.252** ★ **CCP PC 2016**

Soient $a>0$ et $\mathrm{S}_a : \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe $\mathrm{S}_a(f) : x \mapsto \frac{1}{2}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$.

1. *Soit $f : t \mapsto \sin(\frac{\pi t}{a})$. Calculer $\mathrm{S}_a(f)$.*
2. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{S}_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.*
3. *Montrer que S_a n'est ni injective ni surjective.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que S_a induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, noté s_a.*
5. *Montrer que s_a est un automorphisme.*
6. *Montrer que dans une base bien choisie, la matrice de s_a est triangulaire supérieure.*
7. *L'endomorphisme s_a est-il diagonalisable ?*

Centrale PC **Exercice 1.253** ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : crochet de Lie égal à l'identité
Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et $f,g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $f\circ g - g\circ f = \mathrm{id}$.

1. *Montrer que E n'est pas de dimension finie.*
2. (a) *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$.*
   (b) *On suppose qu'il existe $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{P}(g)=0$. Montrer que $g=0$. Qu'en conclure ?*
3. *Soit $\mathrm{E}=\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $g : \mathrm{Q}\in\mathrm{E} \mapsto \mathrm{XQ}\in\mathrm{E}$.*
   (a) *Montrer qu'il n'existe pas de $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{P}(g)=0$.*
   (b) *Trouver $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $fg-gf=\mathrm{id}$.*

Centrale PC **Exercice 1.254** ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : somme de deux projecteurs qui commutent
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$ (éventuellement de dimension infinie), p et q deux projecteurs de E tels que $p\circ q = q\circ p$, et $f=p+q$. On suppose que p,q,f sont tous non nuls et différents de id.

1. *L'endomorphisme $p\circ q$ est-il un projecteur de E ?*
2. *Trouver un polynôme annulateur de f.*
3. *Montrer que E s'écrit comme somme directe des sous-espaces propres de f.*
4. *Donner les différentes possibilités pour le spectre de f. Dans chacun des cas, on donnera un exemple.*

1326 CCP PC **Exercice 1.255** ★ **CCP PC 2014**

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. *On suppose que f est surjective. Montrer que f^2 est surjective.*
2. *On suppose que $f^3=f$. Montrer que si f est injective alors f est surjective. Montrer que si f est surjective, alors f est injective.*

es Ponts PSI **Exercice 1.256** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que a_0 est non nul si et seulement si $\forall \mathrm{Q}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}],\quad \exists!\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}],\quad \mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{P}^{(k)}$.

1.3.15 Dimension finie : questions théoriques

897 CCP PSI **Exercice 1.257** ★ **CCP PSI 2016**

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{F}$ et $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{G}$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.258** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : noyau d'une composée
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, a et b dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que $\dim\mathrm{Ker}(a\circ b)\leqslant \dim\mathrm{Ker}\,a+\dim\mathrm{Ker}\,b$.

9 X ESPCI PC

Exercice 1.259 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient E *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 1$ *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On suppose qu'il existe* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *soit une base de* E.

1. *Montrer que* f *est un isomorphisme.*
2. *Soit* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $g \circ f = f \circ g$. *Montrer que* g *est un polynôme en* f.

nes Ponts PC

Exercice 1.260 ★ ***Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient E *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension* n, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $x \in \mathrm{E}$. *On suppose que* $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ *est une base de* E. *On pose* $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), \quad g \circ f = f \circ g\}$. *Soit* $\Phi\colon g \in \mathscr{C}(f) \mapsto g(x) \in \mathrm{E}$.

1. *Montrer que* Φ *est un isomorphisme.*
2. *Montrer que* $\mathscr{C}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[f]$.

Centrale PSI

Exercice 1.261 ★ ***Centrale PSI 2015***

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme cyclique

1. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$. *On suppose que la famille* $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que la famille* $(f^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$.
2. *Montrer que* $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *commute avec* f *si et seulement s'il existe* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *tel que* $g = \mathrm{P}(f)$.

4 X ESPCI PC

Exercice 1.262 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : endomorphisme stabilisant les droites

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *On suppose que la matrice de* u *dans toute base de* $\mathbb{R}^n$ *est diagonale. Que peut-on dire de* u *?*

1 X ESPCI PC

Exercice 1.263 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : endomorphisme stabilisant les hyperplans

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *laissant stable tout hyperplan de* E.

nes Ponts PC

Exercice 1.264 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : endomorphisme stabilisant un hyperplan

Soient $n \geqslant 2$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *non nulle et* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\Phi$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *Montrer que* f *stabilise* H *si et seulement s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

5 X ESPCI PC

Exercice 1.265 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : endomorphisme stabilisant deux sous-espaces vectoriels

Soient E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension finie,* A *et* B *deux sous-espaces de* E *tels que* $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{E}$. *Déterminer la dimension du sous-espace* L *de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *constitué des endomorphismes stabilisant* A *et* B.

es Ponts PSI

Exercice 1.266 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Mots-clés : endomorphisme stabilisant $\mathbb{Z}^n$

Trouver toutes les $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *telles que* $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

9 X ESPCI PC

Exercice 1.267 ★ ***X ESPCI PC 2012***

Mots-clés : changement de corps

Soit E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension finie. On voit* E *comme un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel et on le note alors* $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.

Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E})$ *que l'on voit aussi comme* $f_{\mathbb{R}} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_{\mathbb{R}})$.

1. *Vérifier que* $f_{\mathbb{R}}$ *est bien un endomorphisme de* $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.
2. *Exprimer* $\mathrm{Tr}(f_{\mathbb{R}})$ *en fonction de* $\mathrm{Tr}(f)$.
3. *Exprimer* $\det(f_{\mathbb{R}})$ *en fonction de* $\det(f)$.

7 X ESPCI PC

Exercice 1.268 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : trace d'un endomorphisme induit

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Soit* v *l'endomorphisme induit par* u *sur* $\mathrm{Im}(u)$.

Montrer que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(v)$.

nes Ponts PC

Exercice 1.269 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, F *un sous-espace de* E *de dimension* p *et* G *un sous-espace de* E *de dimension* q. *Soit* $\mathscr{E} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}\}$. *Montrer que* $\mathscr{E}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Calculer sa dimension.*

0 X ESPCI PC **Exercice 1.270** ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul. Déterminer la dimension de* $\{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{MX} = 0\}$.

Centrale PC **Exercice 1.271** ★ **Centrale PC 2009**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie* n, F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *et* Φ *l'application qui à* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *associe* $(u_{|\mathrm{F}}, u_{|\mathrm{G}})$ *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \times \mathscr{L}(\mathrm{G},\mathrm{E})$. *À quelle condition l'application* Φ *est-elle surjective ?*

Centrale PC **Exercice 1.272** ★ **Centrale PC 2013**

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On note* $\mathscr{F} = \left\{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \text{ et } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\right\}$. *Montrer que* $\mathscr{F}$ *est un sous-espace vectoriel* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Déterminer sa dimension.*

1 X ESPCI PC **Exercice 1.273** ★ **X ESPCI PC 2015**

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *On pose* $\mathscr{H} = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}), \quad f \circ g \circ f = 0\}$.

1. *Montrer que* $\mathscr{H}$ *est un espace vectoriel.*
2. *Montrer que* f *est un isomorphisme si et seulement si* $\mathscr{H} = \{0\}$.
3. *Déterminer la dimension de* $\mathscr{H}$ *lorsque* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$ *et* f *a pour matrice dans les bases canoniques* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. *Généraliser.*

1043 CCP PSI **Exercice 1.274** ★ **CCP PSI 2006**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = \mathrm{E} \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

1070 CCP PSI **Exercice 1.275** ★ **CCP PSI 2011**

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* E.

1. *Montrer :* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
2. *Montrer :* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Longrightarrow \mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
3. *Montrer :* $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Mines Ponts PC **Exercice 1.276** ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* f *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On suppose que* $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathrm{E}$. *Étudier la réciproque.*

978 CCP PSI **Exercice 1.277** ★ **CCP PSI 2010**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f + f^4 = 0$. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathrm{E}$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.278** ★ **X ESPCI PC 2015**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer* $\dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} f)$.

1039 CCP PC **Exercice 1.279** ★ **CCP PC 2010**

Mots-clés : rang d'une somme d'endomorphismes

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *deux endomorphismes de* E. *Montrer que* $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

1 X ESPCI PC **Exercice 1.280** ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : rang d'une somme de matrices

1. *Soient* A *et* B *dans* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. *Montrer que* $|\operatorname{rg}\mathrm{A} - \operatorname{rg}\mathrm{B}| \leqslant \operatorname{rg}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \operatorname{rg}\mathrm{A} + \operatorname{rg}\mathrm{B}$.
2. *Soient* $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_k$ *dans* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *tels que* $\mathrm{V}_1{\mathrm{V}_1}^{\mathrm{T}} + \cdots + \mathrm{V}_k{\mathrm{V}_k}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n$. *Montrer que* $k \geqslant n$.

1 X ESPCI PC **Exercice 1.281** ★ **X ESPCI PC 2013**

Soient E, F *et* G *trois espaces vectoriels de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *et* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$ *si et seulement si* $\mathrm{F} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} v$.

1113 CCP PC **Exercice 1.282** ★ **CCP PC 2011**

Mots-clés : commutant d'un projecteur

Soient $n \geqslant 2$ *et* p *un projecteur de* $\mathbb{R}^n$ *de rang* $r \in \{1, \dots, n-1\}$. *Déterminer la dimension du commutant de* p.

Mines Ponts PC **Exercice 1.283** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, f *et* g *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tels que* $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

958 CCP PSI **Exercice 1.284** ★ **CCP PSI 2013**

Soit E *un espace de dimension finie* n. *À quelle condition existe-t-il* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ *?*

961 CCP PSI **Exercice 1.285** ★ **CCP PSI 2013**

Soient E *un espace de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2)$. *Montrer que l'image et le noyau de* u *sont supplémentaires. Étudier la réciproque.*

1325 CCP PC **Exercice 1.286** ★ **CCP PC 2014**

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ *et* $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. *On suppose que* $\mathrm{rg}\, h = 2$ *et* $h = f \circ g$. *Montrer que* $\mathrm{rg}\, g = \mathrm{rg}\, f = 2$.

9 X ESPCI PC **Exercice 1.287** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : endomorphismes de rang 1

Soient E *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$, u *et* v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tels que* $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v$ *et* $\mathrm{rg}\, u = 1$.

1. *Existe-t-il toujours* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $v = \lambda u$ *?*
2. *On suppose que* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, v$. *Existe-t-il toujours* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $v = \lambda u$ *?*
3. *Soit* D *une droite vectorielle. On pose* $\mathrm{F} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), \quad \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{D}\}$. *Cet ensemble est-il un espace vectoriel ? Si oui, déterminer sa dimension.*

nes Ponts PC **Exercice 1.288** ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : crochet de Lie de rang 1

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ *soit de rang 1. Montrer que* $\mathrm{A}(\mathrm{Im}\,\mathrm{B}) \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{B}$ *ou* $\mathrm{A}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{B}) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$.

1.3.16 Dimension finie : endomorphismes particuliers

904 CCP PSI **Exercice 1.289** ★ **CCP PSI 2007**

Soient $n \geqslant 2$ *et* $f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *définie par* $f(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}(1) + (\mathrm{X}^2 - 4)\mathrm{P}(0)$. *Montrer que* f *est linéaire et trouver* $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ *et* $\dim(\mathrm{Im}\, f)$.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.290** ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0)\}$. *Soit* $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *qui à* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ *associe* $\Phi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{X}-1) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *Montrer que* Φ *est un isomorphisme.*

Centrale PC **Exercice 1.291** ★ **Centrale PC 2013**

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *soit* $\mathrm{L}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}+t)e^{-t}\mathrm{d}t$. *On rappelle que, si* $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k!$.

1. *Montrer que* L *est bien définie. Montrer que* L *est un automorphisme de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. *Montrer qu'il existe* $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{L}(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}^{(k)}$.

1.3.17 Projecteurs, symétries et leurs matrices

3 X ESPCI PC **Exercice 1.292** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : composée de deux projecteurs

Soient E *un espace vectoriel,* p *et* q *des projecteurs de* E *qui commutent. Montrer que* $p \circ q$ *et* $p + q - p \circ q$ *sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.*

1041 CCP PC **Exercice 1.293** ★ **CCP PC 2010**

Mots-clés : caractérisation des projecteurs de même noyau

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $u \circ v = u$ *et* $v \circ u = v$ *si et seulement si* u *et* v *sont des projecteurs de* E *et* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, v$.

0 X ESPCI PC **Exercice 1.294** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : caractérisation des matrices semblables de projecteurs

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{rg}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\mathrm{B}$. *Montrer que* A *est semblable à* B.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.295** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : déterminant d'une somme de deux projecteurs

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. *Montrer que* $\det(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \in \{-1, 0, 1\}$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.296** ★ **X ESPCI PC 2015**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *deux projecteurs tels que l'endomorphisme* $\mathrm{id} - u - v$ *soit inversible. Montrer que* $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, v$.

071 TPE PSI **Exercice 1.297** ★ **TPE PSI 2011**

Mots-clés : matrices de rang 1 et de trace 1

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $\mathrm{Tr}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\mathrm{A} = 1$. *Montrer que* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

es Ponts PC **_Exercice 1.298_** ★ **_Mines Ponts PC 2013_**

Mots-clés : caractérisation de l'égalité des rangs de deux projecteurs

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, p *et* q *deux projecteurs de* E. *Montrer que* p *et* q *ont même rang si et seulement s'il existe* $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ *tel que* $p = u \circ v$ *et* $q = v \circ u$.

es Ponts PC **_Exercice 1.299_** ★ **_Mines Ponts PC 2014 , Mines Ponts PC 2015_**

Mots-clés : caractéristation des couples de projecteurs associés

Soient E *un espace de dimension finie,* p *et* q *dans* $\mathscr{L}(E)$ *tels que* $p + q = \mathrm{id}$ *et* $\mathrm{rg}\, p + \mathrm{rg}\, q \leqslant \dim E$. *Montrer que* p *et* q *sont des projecteurs.*

es Ponts PSI **_Exercice 1.300_** ★ **_Mines Ponts PSI 2014_**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. *Soit* $\varphi : P \in E \mapsto P(1 - X) \in E$.

1. *L'endomorphisme* φ *est-il injectif, bijectif ?*
2. *Donner les valeurs propres de* φ *ainsi qu'une base de vecteurs propres.*

es Ponts PSI **_Exercice 1.301_** ★ **_Mines Ponts PSI 2013_**

Mots-clés : caractérisation de l'unipotence

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit* ω *une racine* $p-$*ième de l'unité telle que* $\omega - 1$ *ne soit pas valeur propre de* M. *Montrer :* $M^p = I_n \iff \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k M^k = 0_n$.

es Ponts PSI **_Exercice 1.302_** ★ **_Mines Ponts PSI 2015_**

Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $u^3 = u$. *Montrer que* u^2 *est un projecteur. Que peut-on dire si* $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ *?*

d'Al\'es PC **_Exercice 1.303_** ★ **_RMS 2015 1027 Mines d'Alès PC_**

Mots-clés : caractérisation de la similitude de deux symétries

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A^2 = B^2 = I_n$. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que* A *et* B *soient semblables.*

1.3.18 Nilpotence

9 X ESPCI PC **_Exercice 1.304_** ★ **_X ESPCI PC 2014_**

Mots-clés : ordre de nilpotence

Soient E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel,* $m \in \mathbb{N}^*$, $x \in E$ *et* $f \in \mathscr{L}(E)$. *On suppose que* $f^{m-1}(x) \neq 0$ *et* $f^m(x) = 0$. *Montrer que la famille* $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ *est libre.*

35 X ENS PSI **_Exercice 1.305_** ★ **_X ENS PSI 2009_**

Soient E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u \in \mathscr{L}(E)$ *nilpotent d'indice* m.

1. *Montrer que* $m \leqslant n$.
2. *Soit* $p \in \mathscr{L}(E)$ *un projecteur tel que* $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$. *Montrer :* $\forall j \geqslant 1, \quad p \circ u^j = (p \circ u)^j$.
3. *Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de* u *est triangulaire supérieure stricte.*

5 X ESPCI PC **_Exercice 1.306_** ★ **_X ESPCI PC 2009_**

Mots-clés : sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $u \in \mathscr{L}(E)$ *défini par :* $\forall i \in \{1, \ldots, n - 1\}, \quad u(e_i) = e_{i+1}$ *et* $u(e_n) = 0$.

1. *Montrer que* u *est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.*
2. *Caractériser les espaces* $\mathrm{Ker}(u^k)$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. *Déterminer les sous-espaces de* E *stables par* u.

5 X ESPCI PC **_Exercice 1.307_** ★ **_X ESPCI PC 2009_**

Mots-clés : caractérisation des endomorphismes nilpotents par la trace

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. *Montrer que* u *est nilpotent si et seulement si* $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ *pour tout* $k \geqslant 1$.

Centrale PSI **_Exercice 1.308_** ★ **_Centrale PSI 2015_**

Mots-clés : caractérisation des endomorphismes nilpotents par la trace

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si son spectre est réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^n) = 0$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{n-1}) = 0$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

7 X ESPCI PC **Exercice 1.309** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

Soient $n \geqslant 2$ et D dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ qui à P associe P'.

1. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathrm{Q}(\mathrm{D})$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de T dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ tel que $\mathrm{T}^2 = \mathrm{D}$.

5 X ESPCI PC **Exercice 1.310** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : éléments propres du crochet de Lie, caractérisation des endomorphismes nilpotents par la trace

1. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$. Montrer que A est nilpotente.
2. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{N} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On suppose que $\mathrm{AN} = \mathrm{NA}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}\,\mathrm{N}^k = 0$. En déduire que N est nilpotente.
3. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{N} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On suppose que $\mathrm{AN} = \mathrm{NA}$ et que N est nilpotente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^k$ est stable par AB. En déduire que AB est nilpotente.

1028 CCP PC **Exercice 1.311** ★ **CCP PC 2015**

Mots-clés : crochet de Lie avec un nilpotent

1. Soit E un espace vectoriel de dimension p. Donner la dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et de $\mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathrm{E}))$.
2. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotente. On définit $\mathrm{T} \colon v \mapsto u \circ v - v \circ u$. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathrm{E}))$.
3. On suppose ici que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et qu'il existe une base (e_1, e_2) telle que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.
   (a) Donner la matrice de u dans la base (e_1, e_2).
   (b) Montrer que u est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
   (c) Calculer T^2 et T^3.
   (d) Donner l'indice de nilpotence de T.
4. On revient au cas général (E de dimension p et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotente). Montrer que $\mathrm{T}^k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} \circ v \circ u^i$.
5. Montrer que T est nilpotente.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.312** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : sous-espace vectoriel de matrices nilpotentes

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes ?

7 X ESPCI PC **Exercice 1.313** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : somme de matrices nilpotentes

1. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes. La matrice $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est-elle nilpotente ?
2. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A, B et $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ sont nilpotentes. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = 0$.

9 X ESPCI PC **Exercice 1.314** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : endomorphismes nilpotents et somme de projecteurs

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent non nul. Montrer que u ne peut s'écrire comme somme de projecteurs.

1040 CCP PC **Exercice 1.315** ★ **CCP PC 2010**

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. On suppose que $f \circ f = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est bijective.
2. On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ telle que $f^p = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est bijective.

7 933 CCP PC **Exercice 1.316** ★ **CCP PC 2007**

Mots-clés : sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent

Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 3 et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f^2 \neq 0$ *et* $f^3 = 0$.

1. *Montrer qu'il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $(x, f(x), f^2(x))$ *soit une base de* E.
2. *Montrer que la seule droite de* E *stable par* f *est* $\mathbb{R}f^2(x)$.
3. *Montrer que le seul plan de* E *stable par* f *est* $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

15 X ENS PSI **Exercice 1.317** ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *telle que* $f \neq 0$ *et* $f^3 = 0$.

1. *On suppose que* $f^2 = 0$. *Déterminer le rang de* f, *les droites stables par* f *et les plans stables par* f.
2. *On suppose* $f^2 \neq 0$. *Déterminer le rang de* f *et les sous-espaces de* E *stables par* f.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.318** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : nilpotence et trace

Comparer $\mathscr{N} = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{A}^2 = 0\}$ *et* $\mathscr{T} = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0\}$.

Exercice 1.319 ★ **Mines Ponts PC 2009 , ENSAM PSI 2013 , X ESPCI PC 2014 , ENSAM PSI 2014**

nes Ponts PC *Soient* A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles qu'il existe* $n+1$ *complexes* r *tels que* $\mathrm{A} + r\mathrm{B}$ *soit nilpotente. Montrer que* A *et* B *sont nilpotentes.*

nes Ponts PC **Exercice 1.320** ★ **Mines Ponts PC 2009 , X ESPCI PC 2013 , Mines Ponts PC 2013**

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ *tel que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ *et* B *soit nilpotente d'indice* r. *Montrer que* $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})$.

nes Ponts PC **Exercice 1.321** ★ **Mines Ponts PC 2014 , Centrale PSI 2015**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ *et que* B *est nilpotente. Montrer que* A *est inversible si et seulement si* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ *est inversible.*

9 X ESPCI PC **Exercice 1.322** ★ **X ESPCI PC 2013 , Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : classes de similitude de matrices nilpotentes

Soit $\mathscr{S} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{M}^2 = 0\}$. *Trouver le cardinal maximal des sous-ensembles de* $\mathscr{S}$ *ne possédant pas deux matrices semblables.*

1 X ESPCI PC **Exercice 1.323** ★ **X ESPCI PC 2013**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *nilpotent,* S *un sous-espace de* E. *On suppose que* S *est stable par* u *et que* $\mathrm{S} + \mathrm{Im}(u) = \mathrm{E}$. *Montrer que* $\mathrm{S} = \mathrm{E}$.

nes Ponts MP **Exercice 1.324** ★ **Mines Ponts MP 2013**

Mots-clés : sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

Soient $n \geqslant 2$ *et* $\mathscr{N}$ *l'ensemble des matrices nilpotentes de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *L'ensemble* $\mathscr{N}$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. *Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{N}$.

es Ponts PSI **Exercice 1.325** ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : commutant d'un endomorphisme nilpotent

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $f^2 \neq 0$ *et* $f^3 = 0$. *Déterminer le commutant de* f.

1057 CCP PC **Exercice 1.326** ★ **CCP PC 2010 , Mines Ponts PSI 2013 , ENSAM PSI 2014**

Mots-clés : matrices nilpotentes qui commutent avec leur transposée

Déterminer les matrices $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotentes telles que* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

nes Ponts PC **Exercice 1.327** ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : caractérisation des nilpotents d'ordre au plus 2

Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $f \circ f = 0$ *si et seulement s'il existe un projecteur* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f = f \circ p - p \circ f$.

es Ponts PSI **Exercice 1.328** ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : caractérisation des nilpotents d'ordre au plus 2

Soient E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension finie et soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $f^2 = 0 \iff (\exists (g,h) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2, \quad g \circ h = f \text{ et } h \circ g = 0)$.

Centrale PSI **_Exercice 1.329_** ★ **_Centrale PSI 2013_**

Mots-clés : matrices triangulaires supérieures strictes

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que si* $i \geqslant j$, $a_{i,j} = 0$.

1. *Montrer que* $\mathrm{A}^n = 0$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *pour que* $\mathrm{A}^{n-1} \neq 0$.

Centrale PSI **_Exercice 1.330_** ★ **_Centrale PSI 2013_**

Mots-clés : caractérisation de la similitude des matrices nilpotentes d'ordre $\leqslant 2$

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = 0$. *Montrer que* A *et* B *sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.*

5 X ESPCI PC **_Exercice 1.331_** ★ **_X ESPCI PC 2014_**

Mots-clés : caractérisation des matrices scalaires

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que, pour toute matrice* $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotente, la matrice* AN *est nilpotente. Montrer que* $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$.

es Ponts PSI **_Exercice 1.332_** ★ **_Mines Ponts PSI 2014_**

Mots-clés : matrice semblable à tous les multiples non nuls, caractérisation des matrices nilpotentes

Soit M *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *non nilpotente. Montrer que l'ensemble des complexes* a *tels que* M *soit semblable à* aM *est fini. Qu'en est-il pour une matrice nilpotente ?*

4 X ESPCI PC **_Exercice 1.333_** ★ **_X ESPCI PC 2015_**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *On suppose que* $\mathrm{ABAB} = 0$. *Montrer que* $\mathrm{BABA} = 0$.

1.3.19 Matrices

Centrale PSI **_Exercice 1.334_** ★ **_Centrale PSI 2010_**

Déterminer les $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ *tels que* $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{MXN} = 0$.

0 X ESPCI PC **_Exercice 1.335_** ★ **_X ESPCI PC 2014_**

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Caractériser les* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{MBM} = \mathrm{M}$.

5 X ESPCI PC **_Exercice 1.336_** ★ **_X ESPCI PC 2014_**

Soit E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel,* $v_1, \ldots, v_n$ *dans* E *et* $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que :* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,1} v_1 + a_{i,2} v_2 + \cdots + a_{i,n} v_n = 0$. *Montrer que tous les* v_j *sont nuls.*

34 X ENS PSI **_Exercice 1.337_** ★ **_X ENS PSI 2009 , X ESPCI PC 2014 , TPE PSI 2014_**

Mots-clés : matrices semblables sur $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *semblables dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'elles sont semblables dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Centrale PC **_Exercice 1.338_** ★ **_Centrale PC 2014_**

Mots-clés : similitude des matrices élémentaires

Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *À quelle condition les matrices* $\mathrm{E}_{i,j}$ *et* $\mathrm{E}_{k,\ell}$ *sont-elles semblables ?*

4 X ESPCI PC **_Exercice 1.339_** ★ **_X ESPCI PC 2014_**

Mots-clés : matrices nilpotentes d'ordre 2

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{B} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$. *Montrer que les matrices* A *et* B *sont semblables.*

7 X ESPCI PC **_Exercice 1.340_** ★ **_X ESPCI PC 2015_**

Mots-clés : matrices symétriques nilpotentes complexes d'ordre 2

Déterminer les matrices symétriques et nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

4 X ESPCI PC **_Exercice 1.341_** ★ **_X ESPCI PC 2012_**

Mots-clés : caractérisation des matrices de permutation

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que tous les coefficients de* A *et de* A^{-1} *sont dans* $\mathbb{N}$. *Montrer que* A *est une matrice de permutation.*

72 X ENS PSI **_Exercice 1.342_** ★ **_X ENS PSI 2013_**

Soit $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que :* $\forall i$, $b_{i,i} > 0$, $\forall i \neq j$, $b_{i,j} \leqslant 0$ et $\forall i$, $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0$.

1. *Montrer que* B *est inversible.*
2. *Soit* X *un vecteur dont toutes les coordonnées sont positives. Montrer qu'il en est de même pour* $\mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{X}$.
3. *En déduire que tous les coefficients de* B^{-1} *sont positifs.*

2 X ESPCI PC **Exercice 1.343** ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *à coefficients rationnels. On suppose que* $\mathrm{AX} = 0$ *possède des solutions non nulles. Montrer que cette équation possède des solutions non nulles rationnelles.*

1 X ESPCI PC **Exercice 1.344** ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : coefficients d'une matrice inverse

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont non nuls. Montrer que* M^{-1} *a au plus* $n^2 - 2n$ *coefficients nuls.*

0 X ESPCI PC **Exercice 1.345** ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : sous-algèbres intègres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{A}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *stable par produit et tel que* $\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{A}^2, \quad \mathrm{MN} = 0 \Rightarrow \mathrm{M} = 0$ *ou* $\mathrm{N} = 0$.

1. *Pour quels* $n \in \mathbb{N}^*$ *peut-on avoir* $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*
2. *On suppose que* $\mathrm{I}_n \in \mathcal{A}$. *Montrer que toute matrice* M *non nulle de* $\mathcal{A}$ *est inversible et que son inverse est dans* $\mathcal{A}$. Ind. *Considérer* $f : \mathrm{N} \in \mathcal{A} \mapsto \mathrm{MN}$.

   Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{A}$ *?*
3. *Donner un exemple de sous-espace* $\mathcal{A}$ *ne contenant pas l'identité.*

1 X ESPCI PC **Exercice 1.346** ★ **X ESPCI PC 2009**

Mots-clés : caractérisation des matrices scalaires

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que l'on a équivalence entre :*

(i) $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$;

(ii) $\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \mathrm{A} = \mathrm{MN} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{NM}$.

1 X ESPCI PC **Exercice 1.347** ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : caractérisation des des homothéties

Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *non nul. Montrer l'équivalence entre :*

(1) u *est une homothétie ;*

(2) $\forall (v,w) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E}))^2, \quad u = v \circ w \Rightarrow u = w \circ v$.

nes Ponts PC **Exercice 1.348** ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : matrices semblables et commutant à une matrice à valeurs propres simples

Soit $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale ayant comme coefficients diagonaux* $1, 2, \ldots, n$. *Combien y a-t-il de matrices* M *qui commutent avec* D *et qui sont semblables à* D *?*

nes Ponts PC **Exercice 1.349** ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : base de matrices diagonalisables

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *constituée de matrices diagonalisables dans* $\mathbb{R}$ *?*

4 X ESPCI PC **Exercice 1.350** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : commutant du groupe linéaire

Déterminer les $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{AM} = \mathrm{MA}$.

3 X ESPCI PC **Exercice 1.351** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : problème de Hurwitz-Radon, sous-espace vectoriel contenu dans le groupe des similitudes à zéro près

Soit $\mathcal{C}_n$ *l'ensemble des* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles qu'il existe* $r \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = r\mathrm{I}_n$. *Soit* d_n *la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *inclus dans* $\mathcal{C}_n$. *Calculer* d_1, d_2 *et* d_3.

es Ponts PSI **Exercice 1.352** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Mots-clés : sous-espace vectoriel contenu dans le groupe des similitudes à zéro près

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $\mathrm{E}_n = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n\}$.

1. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_n \setminus \{0\}$. *Montrer que* M *est inversible.*
2. *Soient* $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}_n$ *tel que* E *soit un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{A} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. *On note* $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E})$ *l'ensemble* $\{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}, \quad \mathrm{M} \in \mathrm{E}\}$. *Montrer que* $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *que* $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}_n$ *et que* $\dim \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{E}$.

0 X ESPCI PC **Exercice 1.353** ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : sous-espace vectoriel contenu dans le groupe linéaire à zéro près

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{M} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \{0\}$.

1. *À quelle condition sur* n *l'ensemble* $\mathcal{M}$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

2. *Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *inclus dans* $\mathcal{M}$.

nes Ponts PC

Exercice 1.354 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : théorème de l'amitié, théorème d'Erdös, Rényi et Sós

Soient $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficients dans* $\{0,1\}$, $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose que* $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}} = s\mathrm{I}_n + \mathrm{J}$ *avec* $s \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* A *est inversible.*
2. *Montrer que* AJ *est proportionnelle à* J.
3. *Montrer que* JA *est proportionnelle à* J.
4. *Montrer que* A *et* A^{T} *commutent.*

Centrale PSI

Exercice 1.355 ★ ***Centrale PSI 2010***

Mots-clés : sous-algèbre stable par inverse

Soit $\mathcal{A}$ *une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On suppose que* $\mathrm{M} \in \mathcal{A}$ *est inversible. Montrer que* $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{A}$.

1 X ESPCI PC

Exercice 1.356 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : sous-algèbre stable par inverse

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* A^{-1} *est un polynôme en* A.

5 X ESPCI PC

Exercice 1.357 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : sous-algèbre stable par inverse

Soient $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *n'appartenant pas au spectre de* M. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *tel que* $(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{M})$.

nes Ponts PC

Exercice 1.358 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $(*)$ *la condition* $\mathrm{A}^2\mathrm{B} = \mathrm{A} \iff \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A}$.

1. *Si* A *et* B *sont dans* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *la condition* $(*)$ *est-elle vérifiée ?*
2. *Donner une condition suffisante pour que* $(*)$ *soit vérifiée.*
3. *Donner un exemple de couple* (A, B) *tel que* $\mathrm{A}^2\mathrm{B} = \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{BA}^2 \neq \mathrm{A}$.

nes Ponts PC

Exercice 1.359 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Mots-clés : matrice dont le carré est triangulaire

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* A^2 *est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont tous distincts. Montrer que* A *est triangulaire supérieure.*

6 X ENS PSI

Exercice 1.360 ★ ***X ENS PSI 2014***

Mots-clés : formules de traces et de déterminants d'ordres $\leqslant 3$

1. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *Montrer que* $\mathrm{A}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}^2(\mathrm{A}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2))\mathrm{I}_2 = 0$.
2. *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *Montrer que* $\mathrm{AB} + \mathrm{BA} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{B} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})\mathrm{A} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})\mathrm{I}_2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})\mathrm{I}_2 = 0$.
3. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. *Montrer que* $6\det(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}^3(\mathrm{A}) + 2\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^3) - 3\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)$.
4. *Soit* $\mathrm{E} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 0\}$. *Montrer que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, $\quad \mathrm{A}^3 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)\mathrm{A} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^3)\mathrm{I}_3 = 0$.

3 X ESPCI PC

Exercice 1.361 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* $\mathrm{AB} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$. *Montrer que* A *et* B *commutent.*

57 ENSAM PSI

Exercice 1.362 ★ ***ENSAM PSI 2014***

Mots-clés : comatrices qui commutent

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* A *et* B *commutent. Montrer que* $\mathrm{com}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{com}(\mathrm{B})$ *commutent.*

Centrale PC

Exercice 1.363 ★ ***Centrale PC 2014***

Mots-clés : crochet de Lie avec une matrice diagonale, matrice de trace nulle, matrice semblable à une matrice de diagonale nulle, commutateur

1. *Soient* $d_1, \ldots, d_n$ *des réels distincts,* $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ *et* $\Phi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{MD} - \mathrm{DM} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Déterminer l'image et le noyau de* Φ.
2. *Montrer qu'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.*
3. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle. Montrer qu'il existe* X *et* Y *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$.

54 X ENS PSI

Exercice 1.364 ★ ***X ENS PSI 2015***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* A *est idempotente si* $A^2 = A$.

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *idempotente. Montrer que* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.
2. *Soit* G *un sous-groupe fini de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *de cardinal* p. *Soit* $A = \sum_{M \in G} M$.
   (a) *Vérifier que* A/p *est idempotente.*
   (b) *On suppose que* $\mathrm{Tr}(A) = 0$. *Montrer que* $A = 0$.
   (c) *Montrer que* $\mathrm{Tr}(A)$ *est un entier divisible par* p.
3. *Soit* $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall M \in G, \quad Mx = x\}$.
   (a) *Montrer que* F *est un sous-espace de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension égale à* $\mathrm{Tr}(A)/p$.
   (b) *Pour* $p \in \mathbb{N}^*$, *expliciter un sous-groupe* G *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *de cardinal* p.

0 X ESPCI PC

Exercice 1.365 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente.*

5 131 ENS PC

Exercice 1.366 ★ ***ENS PC 2016***

Mots-clés : quaternions

Soit $H = \left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{C}^2\right\}$.

1. *On voit* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *comme un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel. Montrer que* H *est un sous-espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *Montrer que* H *contient* I_2, *est stable par produit et que toute matrice non nulle de* H *est inversible avec un inverse dans* H.
2. *Déterminer une base* $(1 = I_2, I, J, K)$ *de* H *avec* $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = K = -JI$.
3. *Déterminer le centre de* H *c'est-à-dire les* $M \in H$ *telles que* $\forall A \in H, \quad AM = MA$.
4. *Soit* $H_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K)$. *Montrer que l'application* $(M, N) \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(MN))$, *définit un produit scalaire sur* H_0.
5. *Soit* $f \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $\forall A, B \in H, \quad f(AB) = f(A)f(B)$ *et* $f(1) = 1$. *Montrer que* $f(H_0) \subset H_0$. *Soit* F *la matrice de la restriction de* f *à* H_0 *dans la base* (I, J, K). *Montrer que* F *est une matrice de rotation.*

1.3.20 Matrices génériques : puissances, rang, inversibilité

Centrale PC

Exercice 1.367 ★ ***Centrale PC 2009***

Mots-clés : caractérisation du rang

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $r \leqslant n$. *Montrer que* A *est de rang* r *si et seulement s'il existe* $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, *de rang* r, *telles que* $A = BC$.

es Ponts PSI

Exercice 1.368 ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

Mots-clés : caractérisation du rang

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{rg}(M) = \min\{k \in \mathbb{N}, \quad M = AB, \quad A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})\}$.

Centrale PSI

Exercice 1.369 ★ ***Centrale PSI 2013***

Mots-clés : matrices de rang 1, somme de telles matrices

1. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{rg}\,M = 1$. *Montrer qu'il existe* $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *telles que* $M = XY^T$.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{rg}\,M = p \geqslant 2$. *Montrer qu'il existe* $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *telles que* $M = X_1{Y_1}^T + \cdots + X_p{Y_p}^T$.
   Ind. Utiliser le fait que M *est équivalente à* J_p.

nes Ponts PC

Exercice 1.370 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : matrices de rang 1, somme de telles matrices, caractérisation des matrices de rang majoré

1. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de rang* r. *Montrer qu'il existe* $X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *tels que* $M = Y_1{X_1}^T + \cdots + Y_r{X^T}_r$.

2. *Réciproquement, si* $\mathrm{M} = \mathrm{Y}_1{\mathrm{X}_1}^{\mathrm{T}} + \cdots + \mathrm{Y}_r{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}_r$ *avec* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_r \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*, que peut-on dire du rang de* M *?*

entrale PSI **_Exercice 1.371_** ★ **_Centrale PSI 2015_**

Mots-clés : caractérisation du rang, matrices de rang 1, somme de telles matrices
Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Si* $\mathrm{rg(M)} = 1$*, montrer qu'il existe deux vecteurs* X *et* Y *de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\mathrm{M} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$*. Étudier la réciproque.*
2. *Si* $\mathrm{rg(M)} = 2$*, montrer qu'il existe un couple de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *indépendants* (X, Z) *et un autre couple de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *indépendants* (Y, T) *tels que* $\mathrm{M} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} + \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{T}$*. Étudier la réciproque.*
3. *Généraliser au cas* $\mathrm{rg(M)} = k$ *avec* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

nes Ponts PC **_Exercice 1.372_** ★ **_Mines Ponts PC 2009_**

Mots-clés : commutateur de rang 1
On considère A *et* $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\mathrm{rg(AB - BA)} = 1$*. Calculer* $(\mathrm{AB} - \mathrm{BA})^2$.

Centrale PC **_Exercice 1.373_** ★ **_Centrale PC 2013_**

Mots-clés : matrices de rang 1 ayant même image et même noyau
Soient M *et* N *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de rang 1 et telles que* $\mathrm{Ker\,M} = \mathrm{Ker\,N}$, $\mathrm{Im\,M} = \mathrm{Im\,N}$.

1. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{N}$.
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{MAM} = \alpha\mathrm{M}$.

177 CCP PSI **_Exercice 1.374_** ★ **_CCP PSI 2014_**

Mots-clés : matrices de rang 1, puissances et polynôme caractéristique
Soit H *une matrice carrée complexe de rang 1.*

1. *Montrer qu'il existe une matrice colonne* A *et une matrice ligne* B *telles que* $\mathrm{H} = \mathrm{AB}$.
2. *Montrer que* $\mathrm{H}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H})\mathrm{H}$.
3. *Donner le polynôme caractéristique de* H.
4. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathrm{H} + \mathrm{I}_n$ *soit inversible. Calculer alors son inverse.*

Centrale PC **_Exercice 1.375_** ★ **_Centrale PC 2007_**

Mots-clés : rang d'une matrice par blocs, inverse d'une matrice par blocs
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Déterminer le rang de la matrice* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix}$.

entrale PSI **_Exercice 1.376_** ★ **_Centrale PSI 2007 , Centrale PSI 2013_**

Mots-clés : rang d'une matrice par blocs, inverse d'une matrice par blocs
Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$*. Déterminer le rang de* M *en fonction de* A *et* B*. Calculer* M^{-1} *quand elle existe.*

nes Ponts PC **_Exercice 1.377_** ★ **_Mines Ponts PC 2013_**

Mots-clés : rang d'une matrice par blocs, inverse d'une matrice par blocs
Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*. Déterminer le rang de* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

978 INT PSI **_Exercice 1.378_** ★ **_INT PSI 2015_**

Mots-clés : rang d'une matrice par blocs
Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$*. Montrer que le rang de* M *est égal à* p *si et seulement si* $\mathrm{D} = \mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}$.

es Ponts PSI **_Exercice 1.379_** ★ **_Mines Ponts PSI 2014_**

Mots-clés : inverse d'une matrice par blocs
Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$*. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* B *pour que* A *soit inversible. Expliciter l'inverse de* A *lorsque cette condition est remplie.*

3 X ESPCI PC **_Exercice 1.380_** ★ **_X ESPCI PC 2009 , X ESPCI PC 2015_**

Mots-clés : matrice à diagonale dominante
Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| < 1$ *pour tout* i*. Montrer que* $\mathrm{I}_n - \mathrm{M}$ *est inversible.*

9 X ESPCI PC

Exercice 1.381* ★ *X ESPCI PC 2014

Mots-clés : matrices symétriques de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *symétrique. Montrer que* A *est de rang* $\leqslant 1$ *si et seulement s'il existe* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *tel que* $A = XX^T$.

nes Ponts PC

Exercice 1.382* ★ *Mines Ponts PC 2014 , X ESPCI PC 2014

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *non inversible.*

1. *Existe-t-il* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *non nulle telle que* $AB = 0$ *et* $BA = 0$ *?*
2. *Déterminer la dimension de* $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB = 0 \text{ et } BA = 0\}$.

Centrale PC

Exercice 1.383* ★ *Centrale PC 2014

Soient $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$ *et* $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. *Soit* B *la matrice obtenue en échangeant les colonnes* i *et* j *de* A*. La matrice* B *est-elle inversible ? Si oui, exprimer* B^{-1} *à l'aide de* A^{-1}.
2. *Soit* C *la matrice obtenue en ajoutant deux fois la* i*-ième colonne à la* j*-ième colonne. La matrice* C *est-elle inversible ? Si oui, exprimer* C^{-1} *à l'aide de* A^{-1}.

1.3.21 Matrices particulières : puissances, rang, inversibilité

nes Ponts PC

Exercice 1.384* ★ *Mines Ponts PC 2009

Mots-clés : matrice de Hurwitz

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Calculer* M^{10}.

34 ENSAM PSI

Exercice 1.385* ★ *ENSAM PSI 2014

Mots-clés : matrice de Hurwitz

Soit M *une matrice carrée avec des* a *sur la diagonale et des* b *partout ailleurs. Montrer que* M *est diagonalisable. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* a *et* b *pour que* M *soit inversible. Expliciter alors* M^{-1}*, puis* M^k *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

es Ponts PSI

Exercice 1.386* ★ *Mines Ponts PSI 2013 , Mines Ponts PSI 2015

Mots-clés : matrice circulante

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *comportant des* a *sur la diagonale, des* b *en coefficients sur-diagonaux et sous-diagonaux, un* b *tout en haut à droite et un* b *tout en bas à gauche, des zéros partout ailleurs. La matrice* A *est-elle inversible ?*

es Ponts PSI

Exercice 1.387* ★ *Mines Ponts PSI 2013

Mots-clés : matrice tridiagonale

Soient $n \geqslant 2$, $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $M(z) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *où* $m_{i,j} = z^{i-j}$ *si* $i \geqslant j$, $m_{i,j} = z^{j-i}$ *si* $i < j$.

1. *Pour quels* z *la matrice* $M(z)$ *est-elle inversible ?*
2. *Lorsque cette condition est réalisée, calculer l'inverse de* $M(z)$.

9 X ESPCI PC

Exercice 1.388* ★ *X ESPCI PC 2009

Soit $(a_, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$*. Quel est le rang de :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ?$$

173 CCP PSI

Exercice 1.389* ★ *CCP PSI 2014

Soient $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ *et* $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ *telle que* $a_{i,1} = a_{1,i} = \alpha_{i-1}$ *pour* $i \in \{2, \ldots, n+1\}$ *et 0 sinon. Déterminer le rang de* A*, puis celui de* A^2 *en fonction des* α_i.

4 ENSAM PSI

Exercice 1.390 ★ ***ENSAM PSI 2014***

Soient A *la matrice dont la dernière ligne et la dernière colonne valent* $(1\ 2\ 3\dots n)$, *avec des 0 partout ailleurs, et* f *un endomorphisme représenté par* A. *Quel est le rang de* f ? *Écrire la matrice de la restriction de* f *à* $\mathrm{Im}(f)$ *dans une base judicieuse.*

Sud Paris PC

Exercice 1.391 ★ ***RMS 2006 1111 Télécom Sud Paris PC***

Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ *et* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *définie par :* $a_{i,j} = \mathrm{P}(x+i+j-2)$ *pour* $1 \leqslant i,j \leqslant n+1$. *Démontrer que* A *n'est pas inversible.*

Centrale PSI

Exercice 1.392 ★ ***Centrale PSI 2014***

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $a_{i,j} = (i+j)^p$. *Déterminer* $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ *en commençant par traiter les cas où* $p = 1$ *ou 2.*

Centrale PC

Exercice 1.393 ★ ***Centrale PC 2013***

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire supérieure et telle que* $\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad a_{k,k} = e^{i(2k+1)\pi/n}$. *Déterminer* A^n.

Centrale PC

Exercice 1.394 ★ ***Centrale PC 2013***

Soit $n \geqslant 2$ *et* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *où* $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} = -1$ *si* $2 \leqslant i \leqslant n$, *les autres coefficients étant nuls. Montrer que* A *est inversible. Déterminer son inverse.*

X ESPCI PC

Exercice 1.395 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Déterminer l'inverse de* M.

X ESPCI PC

Exercice 1.396 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : matrice de coefficients binomiaux

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{i,j} = \binom{i}{j}$ *si* $i \leqslant j$ *et* $a_{i,j} = 0$ *sinon. Calculer* A^{-1}.

1327 CCP PC

Exercice 1.397 ★ ***CCP PC 2014***

Mots-clés : matrice de coefficients binomiaux

Soit $\varphi : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. *Déterminer la matrice* A *de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. *La matrice* A *est-elle inversible ? Dans l'affirmative, déterminer* A^{-1} .

X ESPCI PC

Exercice 1.398 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* M *ne possède qu'un coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que* M *est inversible.*

nes Ponts PC

Exercice 1.399 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Déterminer* A^{100}.

959 CCP PSI

Exercice 1.400 ★ ***CCP PSI 2013***

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

X ESPCI PC

Exercice 1.401 ★ ***X ESPCI PC 2014 , Mines Ponts PSI 2015***

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ *et* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n.

nes Ponts PC

Exercice 1.402 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Trouver* BA.

Centrale PSI

Exercice 1.403 ★ ***Centrale PSI 2014***

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* $(\mathrm{AB})^2$ *et en déduire* BA.

es Mines PSI

Exercice 1.404 ★ ***RMS 2014 1176 Écoles des Mines PSI***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. *Trouver toutes les matrices* $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A)$ *et* $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$.

1.3.22 Déterminants

) X ESPCI PC

Exercice 1.405 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : déterminant d'une somme de carrés
Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *On suppose que* $AB = BA$. *Montrer que* $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
2. *Donner un exemple où* A *et* B *sont inversibles, vérifient* $AB = BA$ *et* $\det(A^2 + B^2) = 0$.
3. *Donner un exemple où* $\det(A^2 + B^2) < 0$.

Centrale PC

Exercice 1.406 ★ ***Centrale PC 2013***

Mots-clés : déterminant d'une somme de carrés
Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$.

1. *Montrer que* $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$. *Si* $k \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $\det(A^{2k} + B^{2k}) \geqslant 0$.
2. *On suppose de plus que* $\det(A + B) \geqslant 0$. *Montrer que* $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \det(A^{2k+1} + B^{2k+1}) \geqslant 0$.

nes Ponts PC

Exercice 1.407 ★ ***Mines Ponts PC 2014 , Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : déterminant d'une somme de carrés
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(A^2 + I_n) \geqslant 0$.

nes Ponts PC

Exercice 1.408 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : déterminant d'une différence de carrés
Soient A *et* X *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* X *est de rang 1. Montrer que* $\det(A + X)\det(A - X) \leqslant \det(A^2)$.

nes Ponts PC

Exercice 1.409 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $u^2 = -\mathrm{id}$. *Montrer que* E *est de dimension paire et qu'il n'existe pas d'hyperplan stable par* u.

3 X ESPCI PC

Exercice 1.410 ★ ***X ESPCI PC 2014***

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique. Montrer que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \det(I_n + \alpha A^2) \geqslant 0$.

5 X ESPCI PC

Exercice 1.411 ★ ***X ESPCI PC 2010***

Mots-clés : caractérisation des matrices de $GL_2(\mathbb{Z})$
À quelle condition une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ *a-t-elle son inverse dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ *?*

Centrale PC

Exercice 1.412 ★ ***Centrale PC 2009***

Mots-clés : définition axiomatique du déterminant
Soient E *un espace vectoriel de dimension* n *sur un corps* $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ *une base de* E, *et* $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. *Montrer qu'il existe* $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ *tel que*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha_1 \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

2. *Montrer qu'il existe* $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ *tel que*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, u(x_i), \dots, u(x_j), \dots, x_n) = \alpha_2 \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

1072 CCP PSI

Exercice 1.413 ★ ***CCP PSI 2011***

Mots-clés : définition axiomatique du déterminant
Soient E *un espace vectoriel de dimension 3,* $\mathscr{B}$ *une base de* E, *et* $u \in \mathscr{L}(E)$. *Soit* $A : (x, y, z) \in E^3 \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(x), y, z) + \det_{\mathscr{B}}(x, u(y), z) + \det_{\mathscr{B}}(x, y, u(z))$. *Montrer que* A *est tri-linéaire alternée, puis que* $A = (\mathrm{Tr}\, u) \det_{\mathscr{B}}$.

nes Ponts PC **_Exercice 1.414_** ★ **_Mines Ponts PC 2014_**

Mots-clés : définition axiomatique du déterminant

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, J *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer, pour* $t \in \mathbb{R}$, *que* $\det(\mathrm{A}+t\mathrm{J})\det(\mathrm{A}-t\mathrm{J}) \leqslant \det(\mathrm{A}^2)$.

ud Paris PSI **_Exercice 1.415_** ★ **_RMS 2010 985 Télécom Sud Paris PSI_**

Soient E *un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. *Montrer que* n *est pair.*

36 Navale PC **_Exercice 1.416_** ★ **_Navale PC 2010 , Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2015_**

Mots-clés : non invariance du déterminant par translation

1. *Soit* $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{C}+\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$. *Montrer que* $\mathrm{C} = 0$.
2. *Soient* A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{A}+\mathrm{M}) = \det(\mathrm{B}+\mathrm{M})$. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
3. *Soient* A *et* B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que* $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{A}+\mathrm{M}) = \det(\mathrm{B}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}})$. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$.

tes Mines PC **_Exercice 1.417_** ★ **_Petites Mines PC 2012_**

Mots-clés : non invariance du déterminant par translation

Soient $n \geqslant 2$ *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(\mathrm{A}+\mathrm{X}) = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{X})$. *Montrer que* $\det \mathrm{A} = 0$ *puis que* $\mathrm{A} = 0$.

nes Ponts PC **_Exercice 1.418_** ★ **_Mines Ponts PC 2013_**

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $2 \leqslant p < q$, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. *Calculer* $\det(\mathrm{AB})\det(\mathrm{BA})$.

Centrale PC **_Exercice 1.419_** ★ **_Centrale PC 2013_**

1. *Soient* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $\det(t\mathrm{A}+\mathrm{B})$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.
2. *Soit* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. *Montrer que* $t \mapsto \det(t\mathrm{A}+\mathrm{B})$ *est polynomiale de degré* $\leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.
3. *Si* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *montrer qu'il existe* $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $t \mapsto \det(t\mathrm{A}+\mathrm{B})$ *soit polynomiale de degré égal à* $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

3 X ESPCI PC **_Exercice 1.420_** ★ **_X ESPCI PC 2014 , Mines Ponts PSI 2015_**

Soient A *et* B *dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{B} = \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 0$. *Montrer que, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \det(x\mathrm{A}+y\mathrm{B}) = 0$.

nes Ponts PC **_Exercice 1.421_** ★ **_Mines Ponts PC 2015_**

Mots-clés : inégalité de Hadamard

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $a^2+b^2+c^2 = 1$ *et* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$. *Montrer que* $|\det \mathrm{M}| \leqslant 1$.

1.3.23 Calculs de déterminants particuliers

9 X ESPCI PC **_Exercice 1.422_** ★ **_X ESPCI PC 2009_**

Mots-clés : déterminant de Hurwitz

Soit $(a_1,\dots,a_n,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Calculer*

$$\det\begin{pmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x+a_n \end{pmatrix}.$$

TPE EIVP PSI **_Exercice 1.423_** ★ **_TPE EIVP PSI 2013_**

Mots-clés : déterminant de Hurwitz

Soient $(a,b,c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $m_{i,i} = c_i$, $m_{i,j} = a$ *si* $i > j$, $m_{i,j} = b$ *si* $i < j$. *On note* J *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

1. *Que peut-on dire de* $\Delta : x \mapsto \det(\mathrm{M}+x\mathrm{J})$?

2. *En déduire la valeur de* $\det M$ *si* $a \neq b$.

es Ponts PC

Exercice 1.424 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : déterminant de Hurwitz

Soient $n \geqslant 2$ et $P_n = X^n - X + 1$.

1. *Montrer que* P_n *possède* n *racines distinctes dans* $\mathbb{C}$, *notées* $z_1, \dots, z_n$.
2. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *où* $a_{i,j} = 1$ *si* $i \neq j$ *et* $a_{i,i} = 1 + z_i$, *pour* (i,j) *dans* $\{1, \dots, n\}^2$. *Calculer* $\det A$.

1110 CCP PC

Exercice 1.425 ★ **CCP PC 2011**

Mots-clés : déterminant de Vandermonde

Calculer, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *le déterminant* $V(x_1, \dots, x_n) = \det((x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$.

Indication. *Considérer* $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$.

Centrale PSI

Exercice 1.426 ★ **Centrale PSI 2009**

Mots-clés : déterminant de Vandermonde

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $a_{i,j} = x_i^{j-1}$ *si* $j < n$ et $a_{i,n} = (\sum_{k \neq i} x_k)^{n-1}$.

Centrale PC

Exercice 1.427 ★ **Centrale PC 2015**

Mots-clés : déterminant de Vandermonde

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{C}$, *soit* $A_p(\theta)$ *la matrice* $(\theta^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.

1. *Calculer* $\det A_p(\theta)$ *pour* $2 \leqslant p \leqslant 8$.
2. *Déterminer les* $\theta \in \mathbb{C}$ *tels que* $\det A_p(\theta) = 0$.

Centrale PC

Exercice 1.428 ★ **Centrale PC 2010**

Mots-clés : déterminant de Vandermonde généralisé

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ *et de degré* $\geqslant 1$, *on note* $N(P)$ *le nombre de coefficients non nuls de* P *et* $r^+(P)$ *le nombre de racines distinctes de* P *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

1. *Que dire de* $r^+(P)$ *si* $N(P) = 1$ *ou si* $N(P) = 2$?
2. *Montrer que* $r^+(P) \leqslant 1 + r^+(P')$.
3. *On suppose que* $P(0) = 0$. *Montrer que* $r^+(P) \leqslant r^+(P')$.
4. *Montrer que* $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$.
5. *Soient* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *avec* $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *et* $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ *avec* $0 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. *Montrer que* $\det((x_i^{p_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) > 0$.

) Navale PSI

Exercice 1.429 ★ **Navale PSI 2016**

Mots-clés : déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. *Calculer*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2(1+a_1) & \cdots & n(a_1^{n-2} + a_1^{n-1}) \\ 1 & 2(1+a_2) & \cdots & n(a_2^{n-2} + a_2^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2(1+a_n) & \cdots & n(a_n^{n-2} + a_n^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

1112 CCP PC

Exercice 1.430 ★ **CCP PC 2011**

Mots-clés : déterminant tridiagonal

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $M_n = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $m_{1,1} = \cos\alpha$, $m_{i,i} = 2\cos\alpha$ *si* $i \geqslant 2$, $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 1$ *si* $i \in \{1, \dots, n-1\}$, *les autres coefficients étant nuls. Calculer* $D_n = \det(M_n)$.

2 X ESPCI PC

Exercice 1.431 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : déterminant tridiagonal

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice tridiagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à* a, *les coefficients sur-diagonaux et sous-diagonaux égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Calculer le déterminant de* A.

Centrale PC

Exercice 1.432 ★ **Centrale PC 2009**

Mots-clés : déterminant tridiagonal

Calculer, pour $z \in \mathbb{C}^*$, le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} z+\frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+\frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

4 X ESPCI PC

Exercice 1.433 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{C}(z)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $z+1/z$, les coefficients en dehors de la diagonale étant égaux à des $c_{i,j}$ fixés dans $\mathbb{C}$.

1. *Montrer qu'il existe $\mathrm{R}>0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| \leqslant \mathrm{R}$, la matrice $\mathrm{C}(z)$ soit inversible.*
2. *Trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^{\mathrm{N}} \det \mathrm{C}(z)$ ait une limite quand $|z| \to 0$. On déterminera la valeur de la limite.*

2 X ESPCI PC

Exercice 1.434 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j}=\sin(a_i+a_j)$. Calculer $\det(\mathrm{A})$.

Sud Paris PC

Exercice 1.435 ★ **RMS 2011 1111 Télécom Sud Paris PC**

Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $\mathrm{A}=\mathrm{I}_n+\mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$.

nes Ponts PC

Exercice 1.436 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$. On pose $a=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Déterminer $\det(e_1+b_1 a,\dots,e_n+b_n a)$, où $\det$ désigne le déterminant dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

.172 CCP PSI

Exercice 1.437 ★ **CCP PSI 2014**

Soient $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ et $\mathrm{M}=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $m_{i,j}=a_i$ si $i\neq j$, $m_{i,i}=a_i+b_i$. Calculer $\det \mathrm{M}$.

es Ponts PSI

Exercice 1.438 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Soient $n\geqslant 2$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A}=(|a_i-a_j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \mathrm{A}$.

nes Ponts MP

Exercice 1.439 ★ **Mines Ponts MP 2013**

Soient $a_1<\ldots<a_p$ et $b_1<\ldots<b_p$ des nombres réels.

1. *Pour $(c_1,\dots,c_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\dots,0)\}$, on pose $\varphi\colon x \mapsto \sum_{i=1}^p c_i e^{a_i x}$. Montrer que φ s'annule au plus $p-1$ fois sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $\mathrm{M}=(e^{a_i b_j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Montrer que $\det \mathrm{M}>0$.*

es Ponts PSI

Exercice 1.440 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Calculer le déterminant de la matrice $(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

.069 CCP PSI

Exercice 1.441 ★ **CCP PSI 2011**

Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $\tilde{\mathrm{P}}(x)=\int_x^{x+1}\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f induit un endomorphisme f_n sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*
2. *Calculer le déterminant de f_n.*

.045 TPE PSI

Exercice 1.442 ★ **TPE PSI 2006**

Calculer, lorsque k et n sont des entiers tels que $0\leqslant k<n-1$, et x un nombre réel, le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

1110 TPE PC

Exercice 1.443 ★ **TPE PC 2006**

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Sud Paris PC

Exercice 1.444 ★ **RMS 2010 1037 Télécom Sud Paris PC**

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *où* $a_{i,j} = (-1)^{\max\{i,j\}}$. *Calculer* $\det(\mathrm{A})$.

2 X ESPCI PC

Exercice 1.445 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : déterminant à coefficients ± 1

Si $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $\mathscr{E}_n$ *l'ensemble des matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont dans* $\{-1, 1\}$.

1. *Déterminer le cardinal de* $\mathscr{E}_n$.
2. *Si* $\mathrm{A} \in \mathscr{E}_n$, *montrer que* $\det \mathrm{A}$ *est un multiple de* 2^{n-1}.
3. *Donner les valeurs de* $\det \mathrm{A}$ *lorsque* A *décrit* $\mathscr{E}_n$, *pour* $n = 2, 3, 4$.