Chapitre 4

Intégration sur un intervalle

Table des matières

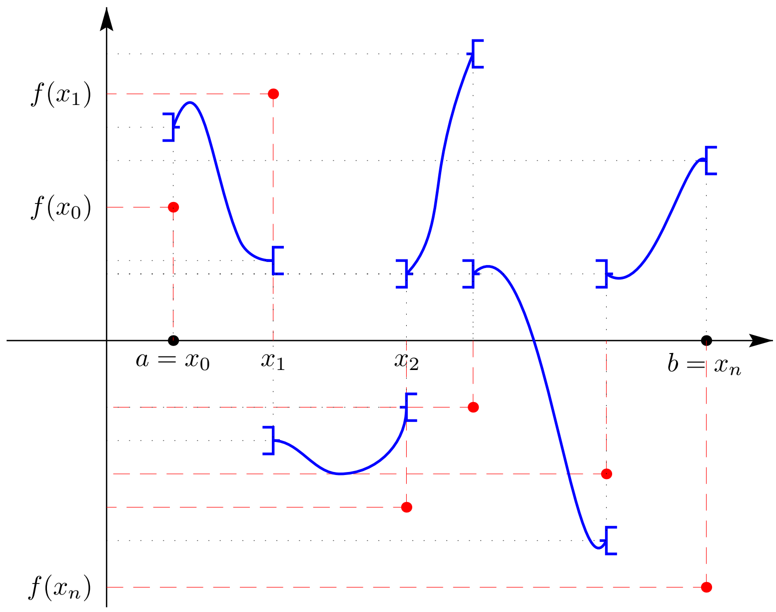
Dans tout le chapitre, I représente un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, pas forcément fermé et pas forcément borné. De plus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Fonctions continues par morceaux

4.1.1 Définitions

Dans cette section, a et b sont deux éléments de I. Rappelons qu'en première année, vous avez construit l'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction f continue sur $[a, b]$. À cette fin, vous aviez considéré l'intégrale d'une fonction en escaliers puis vous aviez montré que toute fonctions continues sur $[a, b]$ était limite par excès et par défaut de deux suites de fonctions en escaliers. L'intégrale de f sur $[a, b]$ était alors donnée comme la limite commune de l'intégrale de ces deux suites.

On peut aisément étendre la notion d'intégrale à des fonctions présentant des discontinuités pas trop « méchantes », les fonctions continues par morceaux :



_morceaux

FIGURE 4.1 – Fonction continue par morceaux

DÉFINITION 4.1 **Fonction continue par morceaux sur un segment**

— Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction *continue par morceaux* sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
2. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, φ restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie strictement à droite en x_k et strictement à gauche en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

— Une telle subdivision est dite *adaptée* ou *subordonnée* à φ.

Notons que l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b], \mathbb{R})$.
Pour une telle fonction f continue par morceaux, on pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons que les intégrales dans la somme sont toutes bien définies car pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.
Terminons en définissant ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle :

DÉFINITION 4.2 **Fonction continue par morceaux sur un intervalle**
Une fonction $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux sur l'intervalle* I si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est lui un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

4.1.2 Propriétés

Si f est une fonction continue par morceaux sur I alors pour tout $a, b \in \mathrm{I}$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et on étend alors facilement les propriétés de l'intégrale vues en première année pour les fonctions continues aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle :

PROPOSITION 4.1 **L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g}$$

PROPOSITION 4.2 ★★★ **Relation de Chasles**
Soit une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle I et trois réels $a, b, c \in \mathrm{I}$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

chasles

PROPOSITION 4.3 ★★★ **Croissance et positivité de l'intégrale**

— Soit φ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, $a < b$. On a :

$$\boxed{\varphi \geqslant 0 \implies \int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0}.$$

— Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, $a < b$. On a :

$$\boxed{\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \implies \int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]} \varphi_2}.$$

ctions_int

THÉORÈME 4.4 ★★★ **Inégalité de la moyenne**
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|}$$

al_abs_int

4.2 Intégrales généralisées

On s'intéresse dans cette section à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b[$. On suppose que :

— soit f est non bornée sur $[a, b[$.

— soit l'intervalle $[a, b[$ n'est pas borné, c'est-à-dire $b = +\infty$.

et on se pose la question de savoir si on peut généraliser la notion d'intégrale à ce cas de figure.

DÉFINITION 4.3 ★ **Intégrale généralisée**
Soit une fonction $f : [a, b[\mapsto \mathbb{K}$ continue par morceaux. Si la fonction

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

possède une limite lorsque $x \to b$ (en restant dans $[a, b[$), on note cette limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et on dit que l'intégrale *converge*.
Si cette limite n'existe pas, on dit que *l'intégrale diverge*.

Exemple 4.1 La fonction

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}\right.$$

est continue sur $\mathrm{I}=[0,1[$. De plus, pour tout $x\in[0,1[$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\arcsin x \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi}{2}$$

donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 4.1 La nature d'une intégrale généralisée est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

On obtient les mêmes propriétés que pour l'intégrale classique par passage à la limite dans les intégrales convergentes (linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, positivité, croissance ...)

THÉORÈME 4.5 ★★★ **Linéarité, relation de Chasles, croissance**
Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a,b[$ dont les intégrales sur $[a,b[$ convergent . On a

Linéarité Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\int_a^b(\alpha f+\beta g)$ est convergente et

$$\boxed{\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g}.$$

Relation de Chasles Pour $c\in[a,b[$, $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ convergent et

$$\boxed{\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f}.$$

Croissance

$$\boxed{f\leqslant g\implies\int_a^b f\leqslant\int_a^b g}.$$

Démonstration *Par exemple pour la linéarité, on procède ainsi. Pour $x\in[a,b[$, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^x\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,\mathrm{d}t &= \alpha\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ par linéarité de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment}\\ &\xrightarrow[x\to b]{} \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ par opérations sur les limites et car les intégrales de } f \text{ et } g \text{ sont convergentes.}\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 4.2 Il se peut que l'intégrale $\int_{\mathrm{I}}(f+g)$ existe sans que les intégrales $\int_{\mathrm{I}} f$ et $\int_{\mathrm{I}} g$ existent ! Par exemple,

$$\forall t\geqslant 2,\quad \frac{2}{t^2-1}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}$$

l'intégrale $\int_{[2,+\infty[}\dfrac{2}{t^2-1}$ existe et pourtant l'intégrale $\int_{[2,+\infty[}\dfrac{1}{t-1}$ n'existe pas.

Remarque 4.3

— Si $f:]a,b]\to\mathbb{K}$ (avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$) est continue par morceaux sur $]a,b]$ alors on dit que $\int_a^b f$ converge si la fonction

$$\mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

possède une limite lorsque $x\to a$ (en restant dans $[a,b[$). A nouveau, cette limite, quand elle existe, est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire l'intégrale est dite divergente.

— Si $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ (avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$) est continue par morceaux sur $]a,b]$ alors on dit que $\int_a^b f$ converge s'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales $\int_c^b f$ et $\int_a^c f$ sont convergentes. Dans ce cas, les ces deux intégrales convergent pour toutes autres valeurs de $c \in]a,b[$. On pose alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente. Attention, quand $|a| = |b|$ cela ne revient pas à la convergence de la fonction $x \to \int_{-x}^x f$ quand $x \to |a|$, voir l'exercice **??**.

✎ *Notation 4.2* Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert, fermé, semi-ouvert, borné ou non. On note $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale de f sur I si celle-ci existe.

THÉORÈME 4.6 ★★★ **Quatre exemples fondamentaux**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Intégrale de Riemann en 0 :
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \alpha < 1,$$
2. Intégrale de Riemann en $+\infty$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \alpha > 1,$$
3. $$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \text{ converge,}$$
4. $$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \alpha > 0.$$

Démonstration *Les fonctions considérées ici sont bien continues par morceaux sur les intervalles où on cherche à les intégrer. La preuve est la même dans les quatre cas. On cherche une primitive et on regarde pour quelles valeurs de α celle-ci converge.*

1. *On a* $\int t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$. *Donc si $\alpha < 1$, l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge et elle diverge sinon.*
2. *Même calcul qu'avant.*
3. *On a* $\int \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t - t$ *mais* $t \ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ *donc l'intégrale* $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ *converge.*
4. *Si $\alpha = 0$, l'intégrale est clairement divergente. Si $\alpha \neq 0$, alors* $\int e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = e^{-\alpha t}/\alpha$ *qui admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.*

Remarque 4.4 Soit un réel $b \in \mathbb{R}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-b)^\alpha}$ admet une intégrale convergente sur l'intervalle $]b,c]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ admet une intégrale convergente sur l'intervalle $[c,b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

4.3 Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle

4.3.1 Critères d'intégrabilité pour des fonctions positives

t_impropre

THÉORÈME 4.7 ★ **Critère de convergence**
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et à valeurs positives. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Démonstration *Pour $a \leqslant x < y < b$, comme $f \geqslant 0$, d'après la relation de Chasles, on a $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Donc F est croissante sur $[a,b[$ et d'après le théorème de la limite monotone, elle converge quand $x \to b$ si et seulement si elle est majorée.*

_impropres

THÉORÈME 4.8 ★ **Critère de majoration**
Soient deux fonctions $f,\ g : [a,b[\mapsto \mathbb{R}$ continues par morceaux et **positives** sur l'intervalle $[a,b[$. On suppose que :

H1 $\forall x \in [a,b[,\ f(x) \leqslant g(x)$;

H2 $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration *On considère les fonction* $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\mathrm{G} : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. *Sur* $[a,b[$, *on a* $\mathrm{F} \leqslant \mathrm{G}$. *Si* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge alors* G *est majorée, donc d'après le théorème précédent,* F *est aussi majorée sur* $[a,b[$. *On en déduit, toujours grâce au théorème précédent que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. L'inégalité* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est alors conséquence du passage à la limite dans l'inégalité* $\mathrm{F} \leqslant \mathrm{G}$.

Par contraposée du théorème précédent, on obtient :

COROLLAIRE 4.9 ★★
Pour montrer qu'une intégrale diverge Soient deux fonctions $f,\ g : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ positives et continues par morceaux sur l'intervalle I. On suppose que :

- (H1) $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x)$;
- (H2) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Alors la fonction $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

_impropres

THÉORÈME 4.10 ★ **Utilisation de la domination et de la prépondérance**
Soient deux fonctions $f, g : [a,b[\mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) f et g sont deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a,b[$;
- (H2) $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ (ou que $f(x) = \underset{x\to b}{o}\big(g(x)\big)$) ;
- (H3) $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ;

alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration *On fait la démonstration dans le cas où* $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$. *Il existe alors* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $c \in \,]a,b[$ *tel que* $\forall x \in \,]c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}g(x)$. *Donc* $\forall x \in \,]c,b[$:

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{M}\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{M}\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

car f *et* g *sont positives. La fonction* $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est majorée d'après le théorème 4.7,* $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Par contraposée, on obtient :

COROLLAIRE 4.11 ★ **Utilisation de la domination et de la prépondérance**
Soient deux fonctions $f, g : [a,b[\mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) f et g sont deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a,b[$;
- (H2) $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ (ou que $f(x) = \underset{x\to b}{o}\big(g(x)\big)$) ;
- (H3) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente ;

alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

En pratique, on cherche à comparer la fonctions f qu'on veut intégrer avec la fonction $t \mapsto t^\alpha$ pour ensuite appliquer le critère de Riemann. On a la règle suivante, qui n'est pas explicitement au programme et dont on expliquera l'utilisation dans les exercices.

THÉORÈME 4.12 ★ **Règle $t^\alpha f(t)$**
Soit une fonction $f : [a,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a,+\infty[$.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ;
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Démonstration *Laissée en exercice.*

Exemple 4.3

— Étudions la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^2\right)$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

— Étudions la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\sin t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}\sin t}{\ln t}$ est positive et continue sur $[2,+\infty]$. De plus, $\frac{\operatorname{ch}\sin t}{\ln t} \geqslant \frac{1}{\ln t}$. Mais la fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ est positive et continue sur $[2,+\infty]$. De plus $\frac{t}{\ln t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ diverge et il en est alors de même de $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\sin t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 4.4 Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Sur $]0,1]$, la fonction f est de négative et donc de signe constant. De plus, $f(t) = \sqrt{t}\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{\ln t}{t^{5/2}} \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$ donc $f(t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et par critère d'inégalité sur fonctions de signe constant, $\int_0^1 f$ est convergente.

— Sur $[1,+\infty[$, la fonction f est positive et $t^{3/2} f(t) = t^{3/2}\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(1/t^{3/2}\right)$ et par critère d'inégalité sur fonctions de signe constant comparaison, $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

_impropres

THÉORÈME 4.13 ★ Critère d'équivalence
On considère deux fonctions f et g continues par morceaux et *positives* sur l'intervalle $[a,b[$. On suppose que

(H1) $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$;

Alors

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}\right) \iff \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}\right)$$

Démonstration *Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $g(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(f(x)\right)$ et on applique le théorème précédent.*

Remarque 4.5 On peut encore énoncer le théorème précédent sous la forme : si f et g sont continues par morceaux, *positives* sur l'intervalle $[a,b[$ et telles que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exemple 4.5

1. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En effet $t \mapsto \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus $\frac{\sin t}{t\sqrt{t}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ dont l'intégrale converge sur $]0,1]$.
2. Étudions la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. L'intégrale de cette dernière fonction entre 1 et $+\infty$ donc il est de même de celle de f. En conclusion $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Bien que hors programme, indiquons le résultat classique suivant :

PROPOSITION 4.14 ★★★★ Intégrales de Bertrand Hors programme
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \left|\ln t\right|^\beta}$ est intégrable sur $[0,1/2[$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration

1. *La fonction f est continue et positive sur $\mathrm{I} = [2,+\infty[$.*
   (a) *Si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(f(t)\right)$, or $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur I (exemple de Riemann en $+\infty$) donc par critère de domination, f n'est pas intégrable sur I.*
   (b) *Si $\alpha > 1$ alors pour $\gamma \in]1,\alpha[$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$. Mais $t \mapsto 1/t^\gamma$ est intégrable sur I (exemple de Riemann en $+\infty$) donc par critère de domination sur fonctions intégrables, f est intégrable sur I.*

(c) *Si $\alpha = 1$, on effectue le changement de variable $u = \ln t$ qui est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant sur $[2, x]$,*

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u$$

qui converge si et seulement si $\beta > 1$.

2. *On effectue le changement de variable $u = 1/t$ qui est $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissant sur $[x, 1/2]$. Il vient*

$$\int_x^{1/2} \frac{1}{t|\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_2^{1/x} \frac{1}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}\,\mathrm{d}u$$

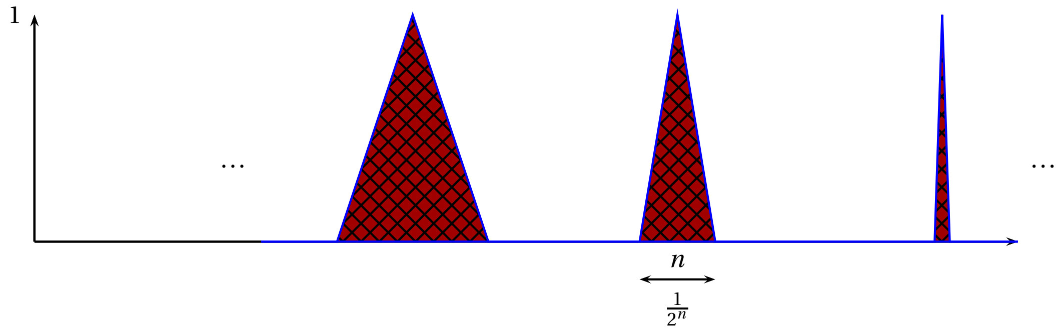
et on conclut en utilisant le résultat établit dans la question précédente.

PLAN 4.1 : Pour montrer que l'intégrale d'une fonction *positive* sur un intervalle I est convergente

Résumons la technique pour montrer que l'intégrale d'une fonction positive *sur un intervalle* I *est convergente*

1. *Vérifier que la fonction est* continue *(par morceaux) et* positive *sur l'intervalle* I.
2. *Si l'intervalle est ouvert aux deux bornes, étudier la convergence sur deux intervalles semi-ouverts.*
3. *Chercher à majorer la fonction, ou alors chercher un équivalent simple de la fonction lorsque la variable tend vers la borne ouverte de l'intervalle, et essayer d'utiliser le critère d'équivalence avec les intégrales de référence.*
4. *Si le critère d'équivalence ne marche pas, utiliser la règle $t^\alpha f(t)$.*

Attention 4.6 Si une fonction $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ est continue et d'intégrale convergente sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on n'a pas nécessairement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ comme le montre le contre-exemple de la figure suivante :



4.4 Intégrale absolument convergente

DÉFINITION 4.4 ★ **Intégrale absolument convergente**
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^b f$ est *absolument convergente* si $\int_a^b |f|$ est convergente.

Exemple 4.7 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. En effet pour $t \geqslant 1$, $\left|\cos t / t^2\right| \leqslant 1/t^2$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

THÉORÈME 4.15 ★★★★ **Une intégrale absolument convergente est convergente**
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\int_a^b f$ est absolument convergente alors $\int_a^b f$ est convergente. De plus, dans ce cas :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}.$$

Démonstration *On suppose que $\int_a^b |f|$ est convergente. On suppose aussi dans un premier temps que f est à valeurs réelles. Posons $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. On a $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$. De plus, f_+ et f_- sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme $f_+ \leqslant |f|$ et que $f_- \leqslant |f|$, par comparaison, $\int_a^b f_+$ et $\int_a^b f_-$ sont convergentes. Donc par linéarité, $\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- = \int_a^b f$ converge.*
Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $|\operatorname{Re} f| \leqslant |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leqslant |f|$. Donc $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux fonctions réelles dont l'intégrale est absolument convergente sur $[a, b]$. Alors les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont elles aussi convergentes sur $[a, b]$ et il en est alors de même de celle de $f = \operatorname{Re} f + \imath \operatorname{Im} f$.
Montrons maintenant l'inégalité. On sait que pour tout $x \in [a, b[$, $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Les intégrales de part et d'autre de l'inégalité sont convergentes. On obtient alors l'inégalité désirée en prenant la limite quand $x \to b$.

Exemple 4.8 Étudions la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|f(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. Donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{|\cos t|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge par critère d'inégalité sur fonctions positives. On en déduit que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc convergente.

Une intégrale convergente mais pas absolument convergente est dite semi-convergente. Voici un exemple fondamental.

THÉORÈME 4.16 ★ ***L'intégrale de Dirichlet*** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ **est semi-convergente**

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ « converge ».
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Démonstration

1. *Comme* $f(t) \xrightarrow[t\to0]{} 1$, *on peut prolonger* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 1$ *et* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *est définie. On note* l *sa valeur. Soit* $x \geqslant 1$, *en intégrant par parties :*

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{x} & u'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{cases} \qquad u, v \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1$$

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = l + \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Mais comme $\dfrac{|\cos t|}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ *avec la fonction* $t \mapsto 1/t^2$ *dont l'intégrale sur* $[1, +\infty[$ *est convergente,* $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} l' \in \mathbb{R}$. *Par conséquent,* $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l + \cos 1 - l' \in \mathbb{R}$.

2. *Par l'absurde, on suppose que l'intégrale sur* $[1, +\infty[$ *de* $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ *est convergente, alors on a :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}.$$

On calcule, en utilisant le changement de variable $u = t - k\pi$,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(n\pi) &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u + k\pi}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{k\pi} + 1}\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u + 1}\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \frac{\mathrm{C}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Mais puisque $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$,

$$\mathrm{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \geqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui montre que $\mathrm{F}(n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, *une absurdité.*

THÉORÈME 4.17 ★ **Théorème de majoration**

Soit g une fonction *positive* continue par morceaux sur $[a, b]$ et telle que $\int_a^b g$ est convergente. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ telle que

H1 $\quad 0 \leqslant \left|f\right| \leqslant g$ sur $[a, b[$;

Alors $\int_a^b f$ est convergente et

$$\boxed{\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b g}.$$

Démonstration *L'intégrale de f sur $[a,b[$ est donc absolument convergente et par là convergente. De plus $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ d'où l'inégalité.*

4.5 Intégrale sur un intervalle quelconque

4.5.1 Définitions et propriétés

DÉFINITION 4.5 ★★★ **Fonction intégrable sur un intervalle quelconque**
Une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle I est dite *intégrable sur* I si $\int_{\mathrm{I}} f$ est absolument convergente.

DÉFINITION 4.6
Soit une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle I et intégrable sur I. On appellera *intégrale de f sur* I et on notera $\int_{\mathrm{I}} f$:
- l'intégrale de f sur I si I est un segment.
- l'intégrale généralisée de f sur I si I n'est pas un segment.

PLAN 4.2 : Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction quelconque sur un intervalle I :

1. *Vérifier que la fonction est continue (par morceaux) sur* I.
2. *Si la fonction n'est pas à valeurs réelles positives, étudier l'intégrabilité de la fonction $|f|$ qui est réelle positive.*
3. *Utiliser les critères d'intégrabilité d'une fonction positive.*

Exemple 4.9

1. Etudions l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est continue sur I et positive. De plus, $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t/\sqrt{t}$ et d'après l'exemple de Riemann, $\int_0^1 1/\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. Par ailleurs $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^{5/2}$ et toujours d'après l'exemple de Riemann, $\int_1^{+\infty} 1/t^{5/2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\int_1^{+\infty} 1/t^{5/2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi. On a montré que f est intégrable sur I.
2. Etudions l'intégrabilité pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_-\}$ de $f_z : t \mapsto \frac{1}{(z+t)\sqrt{1+t}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_-\}$ alors f_z est bien définie et continue sur I. De plus $f_z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^{3/2}$ et d'après l'exemple de Riemann, $\int_1^{+\infty} 1/t^{3/2}\,\mathrm{d}t$ converge donc il en est de même de $\int_1^{+\infty} f_z(t)\,\mathrm{d}t$. Alors f_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On étend les théorèmes 4.8, 4.10 et 4.13 aux fonctions intégrables :

THÉORÈME 4.18 ★★★ **Critères d'intégrabilités**
Si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$:
1. si $|f| \leqslant |g|$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f.
2. si $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ (resp. $f(x) = \underset{x\to b}{o}\big(g(x)\big)$) alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f.
3. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ est équivalente à celle de g.

Démonstration *On procède à la démonstration dans le cas où $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$. Elle est identique dans les autres cas. Si $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ alors $|f(x)| = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\big(|g(x)|\big)$. Mais comme g est intégrable sur $[a,b[$ alors $\int_a^b |g|$ converge et d'après le théorème 4.10, il en est de même de $\int_a^b |f|$. Donc f est intégrable sur $[a,b[$.*

tion_nulle

THÉORÈME 4.19 ★★★ $\int_{\mathrm{I}} |f| = 0 \implies f = 0$
Soit f une fonction intégrable et $\boxed{\text{continue}}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\int_{\mathrm{I}} |f| = 0 \implies f = 0}.$$

Démonstration *On suppose que* $I = [a,b[$. *Soit* $c \in I$. *On sait que pour tout* $x \in I$, *si* $F(x) = \int_a^x |f|$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \int_a^b f = 0$. *Donc* $F = 0$. *Mais si* $x > c$ *alors de* $\int_a^x |f| = 0$ *on tire que* $f_{|[a,x]} = 0$ *et en particulier* $f(c) = 0$. *Donc* f *est nulle sur* I.

THÉORÈME 4.20 ★★★ **Espace vectoriel des fonctions intégrables**
On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur I, alors $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est intégrable sur l'intervalle I et

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

Démonstration *Passer par* $\displaystyle\int_a^x |\lambda f + \mu g|(t)\,\mathrm{d}t \leqslant |\lambda| \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t + |\mu| \int_a^x |g(t)|\,\mathrm{d}t$ *et passer à la limite lorsque* $x \to b$ *en utilisant l'intégrabilité des fonctions.*

DÉFINITION 4.7 ★ **L'espace** $L^1(I)$
On note $L^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions (réelles ou complexes) $\boxed{\text{continues}}$ et intégrables sur l'intervalle I. On note pour $f \in L^1(I)$, $\|f\|_1 = \mathcal{N}_1(f) = \displaystyle\int_I |f|$. On verra dans le chapitre **??** que $\left(L^1(I), \|\|_1\right)$ est un espace vectoriel normé.

DÉFINITION - PROPOSITION 4.8 ★★ **Espace des fonctions de carré intégrable** $\left(L^2(I), \|.\|_2\right)$
On note

$$L^2(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{C} \mid f \ \boxed{\text{continue}} \text{ sur I et } |f|^2 \text{ intégrable sur I}\}$$

l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur I. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration
- *Remarquons que la fonction nulle sur* I *est de carré intégrable donc* $L^2(I)$ *est non vide.*
- *Si* $f, g \in L^2(I)$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *alors*

$$|\alpha f + \beta g|^2 \leqslant (|\alpha f| + |\beta g|)^2 \leqslant 2\left(|\alpha f|^2 + |\beta g|^2\right)$$

car pour tous réels x, y, $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$. *Mais* $|\alpha f|^2$ *et* $|\beta g|^2$ *sont intégrables sur* I *donc il en est de même de* $|\alpha f + \beta g|^2$. *Donc* $L^2(I)$ *est un sev de* $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ *et est donc un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

✎ *Notation 4.10* On note $L^2_0(I)$ le sous-espace de $L^2(I)$ des fonctions $\boxed{\text{continues}}$ sur I et de carré intégrable sur I.

THÉORÈME 4.21 ★★★ **Le sous-espace vectoriel** $L^2_0(I)$ **de** $L^2(I)$ **des fonctions** $\boxed{\textbf{continues}}$ **sur** I **de carré intégrable sur** I **muni du produit scalaire** $(.\mid.)$ **est un espace préhilbertien**
Le produit de deux fonctions de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable aussi pour $f, g \in L^2_0(I)^2$, on peut introduire

$$\boxed{(f \mid g) = \int_I fg}$$

qui définit un produit scalaire sur $L^2_0(I)$. Autrement dit, $\left(L^2_0(I), (.\mid.)\right)$ est un espace préhilbertien.

Démonstration
- *si* $f, g \in L^2(I)$ *alors comme pour tous réels* x, y, *on a* $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, *on peut écrire*

$$|fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$$

et donc $f.g \in L^1(I)$.
- *L'application* $(.\mid.)$ *est bien bilinéaire. C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.*
- *Si* $f, g \in L^2(I)$, *on vérifie facilement que* $(f \mid g) = (g \mid f)$ *donc* $(.\mid.)$ *est une forme bilinéaire symétrique.*
- *Si* $f \in Ł^2_0[2](I)$, *alors* $(f \mid f) = \int_I f^2 \geqslant 0$ *ce qui amène* $f^2 = 0$ *car* f *est continue sur* I *et on peut appliquer le théorème 4.19 et donc* $f = 0$. *Aussi* $(.\mid.)$ *est positive. Remarquons que cette propriété est fausse dans* $L^2(I)$.
- *Enfin, si* $f \in L^2(I)$ *est tel que* $(f \mid f) = 0$ *alors* $\int_I f^2 = 0$ *ce qui n'est possible d'après le théorème 4.19, on a* $f = 0$ *et* $(.\mid.)$ *est définie.*

Remarque 4.6 On introduit alors pour tout $f \in L^2_0(I)$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f \mid f)} = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

On verra dans le chapitre **??** que $\left(L^2(I), \|.\|_2\right)$ est un espace vectoriel normé.

COROLLAIRE 4.22 ★★★ Inégalité de Cauchy-Schwarz

_impropres

Soient $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I})$. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{\left|\int_{\mathrm{I}} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathrm{I}} |f|^2}\sqrt{\int_{\mathrm{I}} |g|^2}}$$

avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Démonstration *C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue en première année.*

4.5.2 Changement de variable et intégration par parties

THÉORÈME 4.23 ★ Changement de variable

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ continue (par morceaux) sur l'intervalle I et $\varphi : \mathrm{J} \mapsto \mathrm{I}$ une bijection strictement monotone et de classe $\mathscr{C}^1$ de J vers I. Alors les intégrales $\int_{\mathrm{I}} f$ et $\int_{\mathrm{J}} f \circ \varphi \times |\varphi'|$ sont de même nature et lorsqu'elles existent,

$$\int_{\mathrm{I}} f = \int_{\mathrm{J}} (f \circ \varphi) \times |\varphi'|$$

Démonstration *On suppose que $\mathrm{I} = [a, b[$ et que f est positive sur I. Si ce n'est pas le cas, on travaille avec $|f|$. On suppose de plus que $\varphi : \mathrm{J} = [c, d[\to [a, b[= \mathrm{I}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur I donc $\varphi' \geqslant 0$.*

— *$(ii) \implies (i)$: On suppose que $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J. Donc $\int_c^d f \circ \varphi \times (t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Soit $u \in [a, b[$, on a*

$$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{x=\varphi(t)} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(u)} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{\varphi^{-1}(u)} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[u \to b]{} \int_c^d f \circ \varphi \times (t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b[$ et que $\int_{\mathrm{I}} f = \int_{\mathrm{J}} f \circ \varphi \times \varphi'$.

— *$(i) \implies (ii)$: On suppose que f est intégrable sur I. Donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Soit $s \in [c, d[$, on a :*

$$\int_{[c,s]} f \circ \varphi \times \varphi' = \int_c^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{x=\varphi(t)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(s)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[x \to b, s \to d]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui montre que $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J et que $\int_{\mathrm{J}} f \circ \varphi \times \varphi' = \int_{\mathrm{I}} f$.

PLAN 4.3 : Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale

On veut effectuer un changement de variable défini par une fonction $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ dans une intégrale généralisée $\int_{\mathrm{I}} f$.

1. *On s'assure que φ est une bijection strictement monotone et $\mathscr{C}^1$ de I sur J ;*
2. *On établit la convergence de $\int_{\mathrm{I}} f$ ou $\int_{\mathrm{J}} (f \circ \varphi) \times |\varphi'|$;*
3. *Alors les deux intégrales sont convergentes et égales.*

Exemple 4.11 Étudions la nature de $\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \sin\left(e^t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose $u = e^t$ qui est monotone de classe $\mathscr{C}^1$. De plus $\sin(e^t)\mathrm{d}t = \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et donc $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ qui est convergente.

Indiquons deux changements de variable intéressants et non triviaux :

PLAN 4.4 : Pour transformer une expression $\mathrm{F}\left(\cos^2 t, \sin^2 t, \tan^2 t\right)$ en une fraction rationnelle

On pose

$$\begin{cases} x &= \tan t \\ \mathrm{d}x &= (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t &= \arctan x \\ \mathrm{d}t &= \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \end{cases}.$$

On obtient alors $\tan^2 t = x^2$, $\cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 t = \frac{x^2}{1+x^2}$.

PLAN 4.5 : Pour transformer une expression $\mathrm{F}(\cos t, \sin t, \tan t)$ en une fraction rationnelle

On pose

$$\begin{cases} x &= \tan\frac{t}{2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 2\arctan x \\ \mathrm{d}t &= \dfrac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \end{cases}.$$

On obtient alors $\tan t = \frac{2x}{1-x^2}$, $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ *et* $\sin t = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Remarque 4.7 Pour effectuer une intégration, par parties, on peut :

— Effectuer directement l'intégration par parties avec les notations

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Ici, le crochet désigne une différence de limites (vérifier qu'elles existent) et l'intégrale de droite est une intégrale généralisée (vérifier qu'elle est définie). Ce n'est pas toujours le cas !

— Chercher une primitive $\mathrm{F}(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties, alors

$$\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{t\to b}\mathrm{F}(t) - \lim_{t\to a}\mathrm{F}(t)$$

Exemple 4.12 Montrons que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty]$. Posons $\begin{cases} u(t) &= 1/t \\ u'(t) &= -1/t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) &= \sin t \\ v(t)(t) &= -\cos t \end{cases}$. Grâce au théorème d'encadrement, on montre que $\lim_{t\to+\infty}\cos t/t = 0$. On en déduit que les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Mais $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente et il en est de même de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

4.6 L'essentiel

1. Les intégrales de Riemann sont à connaître par coeur (en particulier l'intégrabilité de $t\mapsto\dfrac{1}{(a-t)^\alpha}$ en une borne finie).
2. Savoir montrer proprement qu'une fonction est intégrable sur un intervalle :
   — Poser la fonction et son intervalle de définition et dire qu'elle est *continue (par morceaux)* (repérer les bornes à problème).
   — Si la fonction ne garde pas un signe constant, étudier sa *valeur absolue* et se ramener aux critères valables *uniquement* pour les fonctions à valeurs *positives*.
   — Si l'intervalle est ouvert aux deux extrémités, scinder l'étude en deux parties.
   — Chercher un équivalent à la borne ouverte et utiliser les intégrales de Riemann ou la règle $t^\alpha f(t)$.
3. Les intégrales de Bertrand sont hors-programme mais à connaître et à savoir redémontrer.
4. Bien comprendre qu'une fonction intégrable sur $[a,+\infty[$ ne tend pas forcément vers 0 en $+\infty$ (étudier le contre-exemple des pics).
5. Bien comprendre la relation entre f intégrable et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} l$. C'est une équivalence pour les fonctions positives, mais pas pour les fonctions quelconques.
6. Bien étudier l'exemple typique de « semi-intégrabilité » donné par $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
7. Comprendre la technique d'intégration par parties pour étudier une intégrale semi-convergente.
8. Pour calculer une intégrale généralisée :
   — Le changement de variables ne modifie pas la nature d'une intégrale et peut se faire sans précautions particulières.
   — L'intégration par parties peut poser des problèmes. Dans tous les cas, vérifier que le crochet a une limite et que les nouvelles fonctions sont intégrables. Dans une étude théorique, effectuer l'intégration par parties sur un segment puis passer ensuite à la limite.

4.7 Étude d'une fonction définie par une intégrale

4.7.1 Préambule

Dans cette section, $A \subset \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Nous citons les résultats pour des fonctions réelles. Ils s'étendent pour les fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 4.9 ★ **Hypothèse de domination**
On dit qu'une fonction

$$F : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{cases}$$

vérifie *l'hypothèse de domination* si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

- H1 φ est continue par morceaux sur I ;
- H2 φ est intégrable sur I ;
- H3 $\forall (x,t) \in A \times I,\ |F(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

4.7.2 Continuité sous le signe somme

igne_somme

THÉORÈME 4.24 ★★★ **Continuité sous le signe somme**
On considère une fonction

$$F : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur A ;
- H3 F vérifie l'hypothèse de domination.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\,dt \end{cases}$$

est continue sur A.

Démonstration *La connaissance de cette preuve n'est pas exigible des étudiants.*

— *La fonction f est bien définie sur A. En effet, si $x \in A$, alors $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I en raison de l'hypothèse de domination. Donc $f(x) = \int_I F(x,t)\,dt$ existe.*

— *Montrons que f est continue sur A. Pour ce faire, il suffit de considérer $a \in A$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et de montrer que $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Soit donc $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in A$. Alors introduisons une suite (F_n) d'applications de I dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $F_n : t \mapsto F(a_n, t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue par morceaux sur I et elle vérifie l'hypothèse de domination. Comme F_n converge simplement vers $F(a,.)$, qui est elle aussi continue par morceaux sur I, on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée. Cela se traduit en $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$ comme voulue et f est continue en a. Comme a est quelconque dans A, f est continue sur A.*

n:14:31:35

Exemple 4.13 Montrons que la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Posons pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,1[$,

$$F(x,t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t(1-t)}}$$

1. Soit $t_0 \in]0,1[$ fixé. La fonction $x \mapsto F(x,t_0) = \dfrac{\cos(xt_0)}{\sqrt{t_0(1-t_0)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto F(x_0, t) = \dfrac{\cos(x_0 t)}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$.
3. **domination** : pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0,1[$,
$$|F(x,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \varphi(t)$$
avec la fonction φ qui est intégrable sur $]0,1[$ (positive, continue, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et $\varphi(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$).

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.10 ★ **Hypothèse de domination locale**
On dit qu'une fonction
$$F : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{cases}$$
vérifie *l'hypothèse de domination locale* si et seulement si pour tout segment $K \subset A$, il existe une fonction $\varphi_K : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

- H1 φ_K est continue par morceaux sur I ;
- H2 φ_K est positive sur I ;
- H3 φ_K est intégrable sur I :
- H4 $\forall (x,t) \in K \times I,\ |F(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$

THÉORÈME 4.25 ★ **Théorème de continuité, extension à la domination locale**
On considère une fonction
$$F : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{cases}$$
et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur A ;
- H3 F vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction
$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\,dt \end{cases}$$
est continue sur A.

Démonstration *Soit $a \in A$. On applique le théorème de continuité sur un segment K contenant a et f est alors continue en a.*

Exemple 4.14 On considère la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t}\,dt$.

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f lorsque $x \to +\infty$.

COROLLAIRE 4.26 ★ **Fonction définie par une intégrale sur un segment**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un *segment*. Soit
$$F : \begin{cases} I \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{cases}.$$
On suppose que :

H1 F est une fonction continue sur $\mathrm{I} \times [a, b]$.

Alors la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b \mathrm{F}(x, t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est continue sur I.

Démonstration *On domine localement sur $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$: comme $\mathrm{K} = [\alpha, \beta] \times [a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, la fonction F est bornée sur ce compact et*

$$\forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b], \quad |\mathrm{F}(x, t)| \leqslant \|\mathrm{F}\|_{\infty, \mathrm{K}} = \varphi(t)$$

où φ est une fonction constante intégrable sur le segment $[a, b]$.

4.7.3 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

THÉORÈME 4.27 ★ **Théorème de convergence dominée à paramètre continu**

On considère une fonction

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} \times \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \mathrm{F}(x, t) \end{array} \right.$$

et soit a une borne de A (éventuellement infinie). On suppose que :

H1 Pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{F}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

H2 Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $\mathrm{F}(x, t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;

H3 La fonction $t \mapsto \ell(t)$ est continue par morceaux sur I ;

H4 F vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$.

Alors,

1. la fonction ℓ est intégrable sur I ;
2. On a

$$\int_{\mathrm{I}} f(x, t)\, t \xrightarrow[x \to a]{} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\, t.$$

Démonstration
Posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{F}(x, t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Soit $(x_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathrm{I}$, $f_n(t) = \mathrm{F}(x_n, t)$. On vérifie alors que :

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;

H2 Pour $t \in \mathrm{I}$, $f_n(t) = \mathrm{F}(x_n, t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(t)$ par composition de limite d'une suite par une fonction ;

H3 La fonction ℓ est continue par morceaux sur I ;

H4 Comme F vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, il existe $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I})$ telle que pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I}$, on a :

$$|f_n(t)| = |\mathrm{F}(x_n, t)| \leqslant \varphi(t).$$

Donc par théorème de convergence dominée, $\ell \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I})$ et $\lim \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \ell$. On a ainsi montré que $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathrm{I}} \ell$. Comme la suite (x_n) est une suite quelconque qui tend vers a, on obtient alors par caractérisation séquentielle de la limite que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \int_{\mathrm{I}} \ell$.

Remarque 4.8 Ce théorème est une simple extension du théorème de convergence dominée pour les suites de fonction.

4.7.4 Dérivation sous le signe somme

igne_somme

THÉORÈME 4.28 ★ **Dérivation sous le signe somme**
On considère une fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array} \right.$$

et on suppose que :

H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est dérivable sur A.

H3 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.

H4 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

H5 La fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$.

Alors :

1. La fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

2. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I.
3. $\forall x \in A,\ f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration *La connaissance de cette preuve n'est pas exigible des étudiants.*

— *La première hypothèse nous garantie que f est bien définie sur A*

— *Les trois dernières nous permettent d'appliquer le théorème de continuité sous le signe somme à $\dfrac{\partial F}{\partial x}$. Donc pour tout x in A, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \to \int_I \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.*

— *On vérifie maintenant que f est dérivable sur A et que pour tout $a \in A$, $f'(a) = \int_I \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$. Soit $a \in A$, notons, pour tout $x \in A \setminus \{a\}$, $\Delta(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le taux d'accroissement de f en a. Il faut montrer que $\Delta(x)$ a une limite quand $x \to a$ et que cette limite est $\displaystyle\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.*

L'idée est, comme dans la démonstration du théorème de continuité sous le signe somme, de se ramener au théorème de convergence dominée.

Remarquons au préalable que comme $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$, il existe $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$. Alors pour tout $t \in I$, pour tout $b \in A \setminus \{a\}$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto F(x,t)$ sur $[a,b]$ livre :

$$|F(b,t) - F(a,t)| \leqslant \psi(t)\,|b-a|.$$

Introduisons alors une suite (a_n) d'éléments de $A \setminus \{a\}$ convergeant vers a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la suite (F_n) de fonctions

$$F_n : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{F(a_n,t) - F(a,t)}{a_n - t} \end{array} \right. .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. *F_n est définie et continue par morceaux sur I ;*
2. *la suite (F_n) converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,t)$;*
3. *l'application $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
4. *F_n vérifie l'hypothèse de domination $\forall t \in I, \quad |F_n| \leqslant \psi(t)$.*

donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n ainsi que $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,t)$ sont intégrable sur I et

$$\int_I F_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\Delta(a_n) = \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \int_{\mathrm{I}} \frac{\mathrm{F}(a_n, t) - f(a,t)}{a_n - t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre ainsi que $\Delta(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$. *Comme la suite* (a_n) *est quelconque, on a montré que* f *est dérivable en* a *et que* $f'(a) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

En conclusion f *est bien* $\mathscr{C}^1$ *sur* A.

Remarque 4.9 On peut résumer les trois dernières hypothèse du théorème de dérivation sous le signe somme en disant que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du théorème 4.24 de continuité sous le signe somme.
On peut aussi résumer les hypothèses 2 et 3 en disant que pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Exemple 4.15 On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire pour $x \in \mathbb{R}$ le calcul de $\mathrm{F}(x)$.

1. Posons pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{t}$.

   1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Puisque $|f(x_0,t)| \leqslant \dfrac{e^{-t}|x_0 t|}{t} = |x_0|e^{-t} = \psi(t)$ et que la fonction ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x_0,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   2. La fonction f possède une dérivée partielle par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$$
   3. Soit $t_0 \in]0,+\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t_0) = e^{-t_0}\cos(t_0 x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) = e^{-t}\cos(x_0 t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   5. **domination locale** : soit $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$,
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$$
   avec la fonction φ qui est continue positive et intégrable sur $]0,+\infty[$.

   D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

2. On calcule $\mathrm{F}'(x)$:
   $$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{e^{ixt}+e^{-ixt}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{e^{-(1+ix)t}}{1+ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$
   Par conséquent, il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \arctan x + \mathrm{C}$. Puisque $\mathrm{F}(0) = 0$, il vient finalement que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \arctan(x)$$

THÉORÈME 4.29 ★★ **Dérivation sous le signe somme, extension à la domination locale**
On considère une fonction

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A}\times\mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{F}(x,t) \end{array} \right.$$

et on suppose que :

H1 Pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $\mathrm{F}_2 : t \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(H2) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x, t)$ est dérivable sur A.

(H3) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A.

(H4) Pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I.

(H5) La fonction $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$.

Alors :

1. Pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction
$$f : \begin{cases} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{F}(x, t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.
3. $\forall x \in \mathrm{A},\ f'(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration *Pour $a \in \mathrm{A}$ fixé, il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme sur un segment* K *contenant a.*

4.7.5 Dérivations successives sous le signe somme

THÉORÈME 4.30 ★ **Dérivations successives sous le signe somme**
On considère une fonction
$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathrm{A} \times \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \mathrm{F}(x, t) \end{cases}$$
et on suppose que :

(H1) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A ;

(H2) Pour tout $x \in \mathrm{A}$, les fonctions $t \mapsto \mathrm{F}(x, t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, t)$, ..., $t \mapsto \dfrac{\partial^{n-1} \mathrm{F}}{\partial x^{n-1}}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I.

(H3) Pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n \mathrm{F}}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux sur I.

(H4) La fonction $\dfrac{\partial^n \mathrm{F}}{\partial x^n}$ vérifie l'hypothèse de domination (locale).

Alors :

1. La fonction
$$f : \begin{cases} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{F}(x, t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
est définie et de classe $\mathscr{C}^n$ sur A.
2. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in \mathrm{A}$,
$$f^{(i)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^i \mathrm{F}}{\partial x^i}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration *Par une récurrence simple.*

Remarque 4.10 En pratique, on désire souvent montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A. On vérifie pour cela que F et toutes ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^{\mathrm{F}} k}{\partial x^{\mathrm{F}}}$ vérifient les trois hypothèses du théorème de continuité sous le signe somme.

Remarque 4.11 On peut appliquer ces théorèmes dans le cas d'une fonction définie par une intégrale de Riemann :
$$f(x) = \int_a^b \mathrm{F}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

avec la fonction $F : I \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ qui est continue (ou $\mathscr{C}^1$) sur le compact $I \times [a,b]$. L'hypothèse de domination locale est alors évidente puisque si $[\alpha,\beta] \subset I$, $K = [\alpha,\beta] \times [a,b]$ est un compact et alors

$$\forall (x,t) \in K, \quad |F(x,t)| \leqslant \|F\|_{\infty,K}$$

(une fonction continue sur un compact est bornée).

4.7.6 La fonction Γ d'Euler Hors programme

PROPOSITION 4.31 ★ **Fonction Γ**
Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Démonstration *Soit $x > 0$. Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array} \right.$. La fonction f est continue et positive sur $I =]0,+\infty[$.*

1. ***intégrabilité sur** $]0,1]$:*

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

avec $1 - x < 1$ donc f est intégrable sur $]0,1]$.

2. ***intégrabilité sur** $[1,+\infty[$:*

$$t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \implies f(t) = o(1/t^2)$$

et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

La fonction f est intégrable sur I pour tout $x > 0$ ce qui montre que la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

PROPOSITION 4.32 ★ **Continuité de Γ**
La fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

Démonstration *Utilisons le théorème de continuité sous le signe somme. Posons*

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array} \right.$$

- *Soit $t_0 \in]0,+\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto F(x,t_0) = e^{-t_0}e^{(x-1)\ln t_0}$ est continue sur $]0,+\infty[$.*
- *Soit $x_0 \in]0,+\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto F(x_0,t) = e^{(x_0-1)\ln t}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.*
- ***domination locale** : soit $0 < A < B$. Pour $(x,t) \in [A,B]\times]0,+\infty[$,*

$$|F(x,t)| = e^{(x-1)\ln t}e^{-t} \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} e^{(A-1)\ln t} = \dfrac{1}{t^{1-A}} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{B-1}e^{-t} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{array} \right.$$

La fonction $|F|$ est dominée par la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{t^{1-A}} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{B-1}e^{-1} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction φ est continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$ et on montre qu'elle est intégrable comme à la proposition précédente.

THÉORÈME 4.33 ★ **La fonction Γ interpole la factorielle**

1. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$;
3. $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Démonstration

1. *Soit* $(\varepsilon,\mathrm{T})\in]0,1]\times[1,+\infty[$. *Par parties,*

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{T}} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t=\left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^{\mathrm{T}}+\int_\varepsilon^{\mathrm{T}} x t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\varepsilon^x e^{-\varepsilon}-\mathrm{T}^x e^{-\mathrm{T}}+x\int_\varepsilon^{\mathrm{T}} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et lorsque $\varepsilon\to 0$ *puis* $\mathrm{T}\to+\infty$, *on trouve le résultat.*

2. *Par récurrence sur* n *et la relation du 1, puisque*

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1=0!$$

3. $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\Gamma(1)}{x}=\dfrac{1}{x}$ *Puisque* Γ *est continue en* 1.

THÉORÈME 4.34 ★ **Dérivées de** Γ
La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration *Posons* $\mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t}\end{array}\right.$. $\mathrm{F}(x,t)=e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$.

— *Les fonctions* F, $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},\dots\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ *existent sur* $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ *et valent :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$$

Elles sont toutes continues par rapport à la première et à la deuxième variable.

— ***domination locale*** *: soit* $k\in\mathbb{N}$, *soit* $(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$ *où* $0<a<1<b$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\begin{cases}|\ln t|^k t^{a-1} & \text{si } t\in]0,1]\\ |\ln t|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}=\varphi(t)$$

On montre comme à la première proposition que la fonction φ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$.

On conclut avec le théorème de dérivations successives sous le signe somme.

THÉORÈME 4.35 ★ $\Gamma(1/2)$
On a $\Gamma(1/2)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$

Démonstration *Par le changement de variables* $u=\sqrt{t}$, $t=2u\,\mathrm{d}u$,

$$\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}2u\,\mathrm{d}u$$

On calcule la dernière intégrale par plusieurs méthodes vues en exercice.

Remarque 4.12

— Comme $\Gamma''>0$, La fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

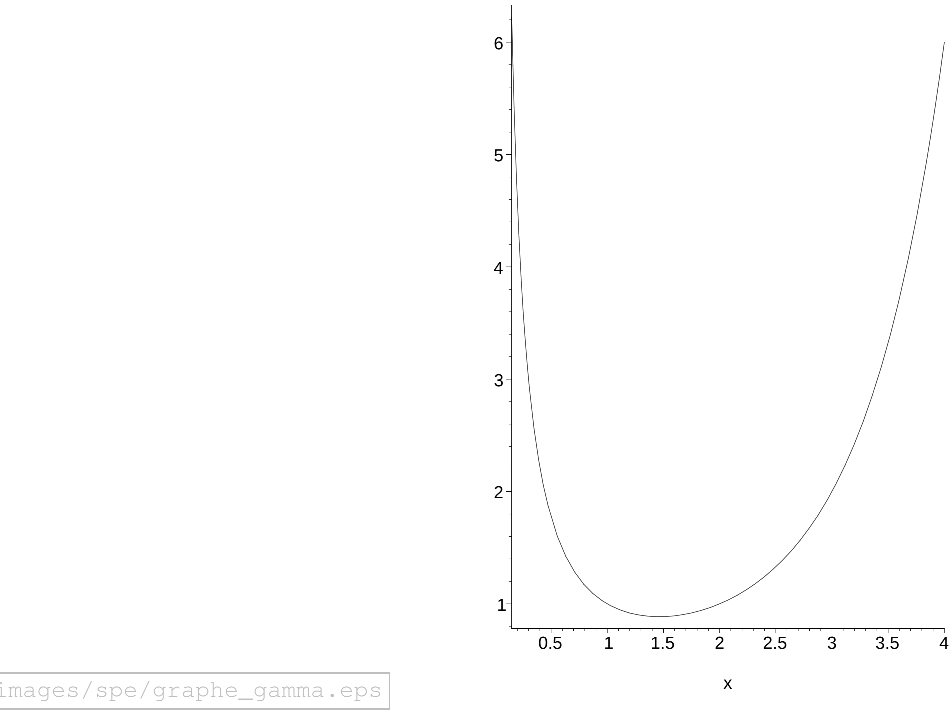
— Γ possède un minimum en $x_0\in[1,2]$ ($\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$).

— On a $\Gamma(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. En effet, comme $\Gamma''>0$, on sait que Γ' est croissante. Mais Γ' s'annule en x_0 donc Γ' est négative sur $]0,x_0[$ et positive sur $]x_0,+\infty[$. Ainsi Γ est croissante sur $]x_0,+\infty[$. Par le théorème de la limite monotone, elle est soit bornée et convergente soit elle tend vers $+\infty$. Comme $\Gamma(n)=(n-1)!\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, on obtient que $\Gamma(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. On remarque d'ailleurs que pour $x>1$,

$$\frac{\Gamma(x)}{x}=\frac{x-1}{x}\Gamma(x-1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\Gamma(x-1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

donc Γ admet une branche parabolique de direction $(\mathrm{O}y)$.

— On sait calculer $\Gamma(n+1)=n!$ et $\Gamma(n+1/2)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ pour $n\in\mathbb{N}$.



Graphe de Γ