

Chapitre 11

Calcul différentiel

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on considère une application $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^m$ est muni de sa base canonique $e = (e_1, \dots, e_m)$ et on identifiera un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$ avec ses coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$ dans la base e . Si $m = 2$ (resp. 3), on notera (x, y) plutôt que (x_1, x_2) (resp. (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2, x_3)). On considère sur E une de ses normes $\|\cdot\|$. Le sous-ensemble U est un ouvert de E .

11.1 Dérivées partielles, Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

DÉFINITION 11.1 ★ Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et un vecteur non nul $h \in E$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Alors pour $|t| < \frac{r}{\|h\|} = t_0$, $a + t.h \in U$. On dit que f possède une dérivée au point a selon le vecteur h s'il existe un vecteur $l \in F$ tel que

$$\frac{1}{t} [f(a + t.h) - f(a)] \xrightarrow{t \rightarrow 0} l$$

On note alors $l = D_h f(a)$.

Exemple 11.1 On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées selon tous les vecteurs $h = (h_1, h_2)$ non nuls en $a = (0, 0)$ et que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

DÉFINITION 11.2 ★ Dérivées partielles

Soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet une i ème dérivée partielle au point $a \in U$ si f admet une dérivée selon le vecteur e_i et on note alors

$$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

Remarque 11.1 En notant f_1 et f_2 les applications partielles au point $M_0 = (x_0, y_0)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + t) - f_1(x_0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(y_0 + t) - f_2(y_0)}{t} \end{cases}$$

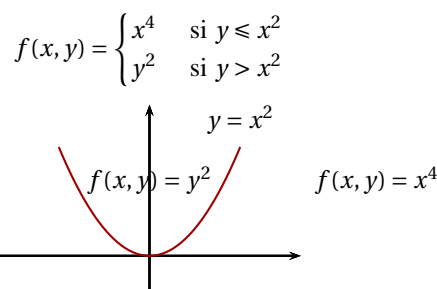
Ces limites existent si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables respectivement en x_0 et y_0 . De plus, dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0) \end{cases}$$

Par exemple, si $f(x, y) = x^2 \cos(y)$, pour calculer en un point (x, y) $\frac{\partial f}{\partial x}$, on fixe la variable y , la première fonction partielle en (x, y) est définie par $f_1(t) = f(t, y) = t^2 \cos(y)$, elle est dérivable en $t = x$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_1(x) = 2x \cos(y)$. La deuxième fonction partielle en (x, y) est définie par $f_2(t) = f(x, t) = x^2 \cos(t)$, elle est dérivable en $t = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_2(y) = -x^2 \sin(y)$.

On retient la règle de calcul suivante : pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on « gèle » la variable y (considérée comme constante) et on dérive par rapport à x . De même, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on fixe x et on dérive l'expression par rapport à y .

Exemple 11.2 Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par



Étudions l'existence de dérivées partielles de f en un point $M_0 = (x_0, y_0)$.

1. Si $y_0 < x_0^2$, sur un voisinage de M_0 , la fonction f est définie par $f(x, y) = x^2$. On peut appliquer la règle de calcul ci-dessus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
2. Si $y_0 > x_0^2$, sur un voisinage de M_0 , $f(x, y) = y^2$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$.
3. Si $M_0 = (x_0, x_0^2)$ avec $x_0 > 0$, on se trouve sur un point de la parabole et les applications partielles sont définies par :

$$f_1 : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} y_0^2 & \text{si } t < x_0 \\ t^4 & \text{si } t \geq x_0 \end{cases} \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} x_0^4 & \text{si } t < y_0 \\ t^2 & \text{si } t \geq y_0 \end{cases} \end{cases}$$

La fonction f_1 est dérivable à droite en x_0 , avec $f'_{1d}(x_0) = 4x_0^3$. Elle est dérivable à gauche en x_0 avec $f'_{1g}(x_0) = 0$.

On en déduit que f_1 n'est pas dérivable en x_0 donc que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0^2)$ n'existe pas. De la même façon, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0^2)$ n'existe pas.

4. Si $M_0 = (0, 0)$, les deux fonctions partielles en $(0, 0)$ sont définies par

$$f_1(t) = t^4, \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Puisque ces fonctions sont dérivables en 0, on en tire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

DÉFINITION 11.3 ★ Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : U \rightarrow F$ une fonction et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E . On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U (par rapport à la base e) lorsque :

1. Pour tout point $a \in U$, f possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.
2. Chacune des n fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{cases} U & \longrightarrow F \\ a & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases}$$

est continue sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Exemple 11.3 Considérons la fonction définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Étudions l'existence de dérivées partielles en M_0 .

- Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, sur un voisinage de M_0 , la première application partielle f_1 en M_0 est définie par

$$f_1(t) = \frac{\sin(t^3) - \sin(y_0^3)}{t^2 + y_0^2}$$

Elle est dérivable en x_0 et $f'_1(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2 \cos(x_0^3)}{x_0^2 + y_0^2} - 2x_0 \frac{\sin(x_0^3) - \sin(y_0^3)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$. On calcule de même $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

- Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, revenons à la définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et formons le taux d'accroissement

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sin(t^3)}{t^3} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 1. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.

Nous pouvons donc définir les deux fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{3x^2 \cos(x^3)}{x^2 + y^2} - 2x \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} -\frac{3y^2 \sin(y^3)}{x^2 + y^2} - 2y \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Étudions maintenant la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Cela suffit pour affirmer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 11.1 ★ Théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Alors :

- 1 si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :

$$\forall i = 1, 2, \quad \frac{\partial (\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

2 fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :

$$\forall i = 1, 2, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

3 si g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur U . De plus :

$$\forall i = 1, 2, \quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$$

Démonstration Pour tout $a \in U$ et pour un vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^m$, il suffit d'appliquer le théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en $t = 0$ aux fonctions $t \mapsto f(a + te_i)$ et $t \mapsto g(a + te_i)$.

COROLLAIRE 11.2 ★

- $(\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$
- $(\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$

Le théorème suivant est le résultat fondamental de ce chapitre :

THÉORÈME 11.3 ★★★ DI d'ordre 1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $a \in U$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage V de $0_{\mathbb{R}^m}$ telle que :

1 Pour tout accroissement $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $a + h \in U$, on a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

2 $\varepsilon(h) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

On dit alors que f admet un développement limité d'ordre 1 en a .

Démonstration Afin d'alléger les calculs, on effectue la démonstration dans le cas $m = 2$. Quitte à remplacer f par l'application $h \mapsto f(x) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2$, on peut supposer que $a = f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0$. Il faut alors montrer que $f(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{(h) \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme les applications partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues en $0_{\mathbb{R}^2}$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(0, \eta) \subset U$ et pour tout $x \in B(a, \eta)$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right| \leq \varepsilon$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right| \leq \varepsilon$. Alors

$$|f(h_1, h_2)| = |f(h_1, h_2) - f(0, h_2) + f(0, h_2)| \leq |f(h_1, h_2) - f(0, h_2)| + |f(0, h_2)| \leq \varepsilon|h_1| + \varepsilon|h_2|$$

par application de l'inégalité des accroissements finis à $s \mapsto f(s, h_2)$ sur $[0, h_1]$ et à $t \mapsto f(0, t)$ sur $[0, h_2]$. Alors $|f(h_1, h_2)| \leq \varepsilon\|h\|_\infty$ d'où le résultat.

La définition de f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U ne suppose pas que f est continue sur U . C'est une conséquence du résultat suivant :

COROLLAIRE 11.4 ★ Une fonction $\mathcal{C}^1$ est continue

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est continue en tout point de U .

Démonstration On effectue à nouveau la démonstration dans le cas $m = 2$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ et $M = (x, y)$. Notons $h = M - M_0 = (x - x_0, y - y_0)$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , il existe ε définie sur un voisinage de $(0, 0)$ telle que $f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$. La fonction ε est bornée sur un voisinage de $(0, 0)$ donc si $\|M - M_0\| \leq \eta$, $|\varepsilon(M - M_0)| \leq K$ et comme $|x - x_0| \leq \|M - M_0\|$, $|y - y_0| \leq \|M - M_0\|$, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |x - x_0| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| + |y - y_0| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| + K\|M - M_0\| \leq C\|M - M_0\|$. Par conséquent, $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x_0, y_0)$.

Plus intéressant, si f admet des dérivées dans les deux directions de la base canonique, elle admet une dérivée dans toutes les directions qui se calcule comme combinaison linéaire des dérivées partielles comme le précise le résultat suivant :

COROLLAIRE 11.5 ★★ Une fonction $\mathcal{C}^1$ admet des dérivées selon tout vecteur

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U , alors pour tout point $M_0 \in U$ et tout vecteur non nul $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, f admet une dérivée selon le vecteur h au point M_0 et

$$D_h f(M_0) = \sum_{k=1}^m h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$$

Démonstration On effectue la démonstration dans le cas $m = 2$. Avec le DL à l'ordre 1, le taux d'accroissement s'écrit :
 $\frac{1}{t} [f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)] = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{|t|}{t} \|(h, k)\| \varepsilon(th, tk)$. Puisque $\|t\|/t = 1$ et que $\varepsilon(th, tk) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, on en déduit le résultat.

11.2 Différentielle

DÉFINITION 11.4 ★ Différentielle

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a = (x_1, \dots, x_m) \in U$ un point. On définit la forme linéaire :

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_m) & \longmapsto \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases}$$

C'est la *différentielle* de la fonction f au point a .

Remarque 11.2 Si f admet un DL(a,1) alors on peut écrire pour tout $x \in U$,

$$f(x) = f(a) + df(a).h + \varepsilon(h) \|h\|$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow{(h) \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}} 0$.

Remarque 11.3 L'application $df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto df(a).h \end{cases}$ est linéaire.

DÉFINITION - PROPOSITION 11.5 Gradient

On définit le *gradient* de f au point a comme étant le vecteur $\vec{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$. Alors pour tout accroissement $\vec{h} = (h_1, \dots, h_m)$,

$$D_{\vec{h}} f(a) = df(a)(\vec{h}) = \left(\vec{\nabla} f(a) \mid \vec{h} \right)$$

THÉORÈME 11.6 ★★★ Dérivation d'une composée, règle de la chaîne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_m : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $\varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto (u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}$. On suppose que :

- (H1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U .
- (H2) Les fonctions u_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
- (H3) $\forall t \in I, \varphi(t) \in U$.

On peut alors définir la fonction

$$g = f \circ \varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée vaut :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^m u'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_1(t), \dots, u_m(t))$$

Démonstration Afin à nouveau de simplifier les calculs, nous n'effectuons la démonstration que dans le cas $m = 2$. Soit $t_0 \in I$. Nous allons montrer que g admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au point $M_0 = (u(t_0), v(t_0))$. Pour $t \in I$, on peut écrire : $f(u(t_0 + h), v(t_0 + h)) = f(u(t_0), v(t_0)) + [u(t_0 + h) - u(t_0)] \frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + [v(t_0 + h) - v(t_0)] \frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) + \|(u(t_0 + h) - u(t_0), v(t_0 + h) - v(t_0))\| \varepsilon(u(t_0 + h) - u(t_0), v(t_0 + h) - v(t_0))$. Puisque les fonctions u et v sont dérivables en t_0 , elles possèdent un développement limité à l'ordre 1 : $u(t_0 + h) = u(t_0) + hu'(t_0) + h\varepsilon_1(h)$, $v(t_0 + h) = v(t_0) + hv'(t_0) + h\varepsilon_2(h)$. En reportant dans le DL de f , on trouve que $g(t_0 + h) = g(t_0) + h[u'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + v'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0))] + R(h)$ et par une majoration simple, on vérifie que $R(h) = o(h)$. Nous avons donc vérifié que g était dérivable en t_0 et obtenu l'expression de $g'(t_0)$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, u' et v' sont des fonctions continues, la fonction g' est également continue.

Remarque 11.4 On peut exprimer $g'(t_0)$ à l'aide de la différentielle et du gradient de f en M_0 : $g'(t) = df_{M_0}(\varphi'(t)) = (\vec{\nabla} f(M_0) | \varphi'(t))$.

COROLLAIRE 11.7 ★ Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert convexe et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors f est constante sur U si et seulement si df est nulle sur U ou autrement dit si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont nulles sur U pour tout $i \in [1, m]$.

Démonstration Le sens direct est trivial. Prouvons la réciproque. On suppose que df est nulle sur U . Soient $a, b \in U$. Comme U est convexe, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = ta + (1 - t)b \in U$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, si $g(t) = f \circ \varphi(t)$ alors $g'(t) = df_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) = 0$. Donc g est constante sur $[0, 1]$ et $f(b) = f(a)$. Alors f est constante sur U .

THÉORÈME 11.8 ★★★ Dérivées partielles d'une composée

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x, y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall (u, v) \in V$, $(x(u, v), y(u, v)) \in U$. On peut alors définir la fonction

$$F : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto f(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}$$

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et en tout point $(u, v) \in V$,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}$$

Démonstration Soit un point $K = (u, v) \in V$, considérons la première fonction partielle de F en K définie par $F_1(t) = F(t, v) = f(x(t, v), y(t, v)) = f(g_1(t), g_2(t))$. Les fonctions g_1 et g_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $g'_1(t) = \frac{\partial x}{\partial u}(t, v)$, $g'_2(t) = \frac{\partial y}{\partial u}(t, v)$. On peut utiliser le théorème précédent : la fonction F_1 est dérivable en tout point t et $F'_1(t) = \frac{\partial x}{\partial u}(t, v) \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) + \frac{\partial y}{\partial u}(t, v) \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))$. On en déduit que F admet une première dérivée partielle au point (u, v) et que $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = F'_1(u) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$. On fait de même pour la deuxième dérivée partielle. Ces dérivées partielles s'expriment comme composées de fonctions continues donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

Remarque 11.5 On applique souvent ce résultat dans le cadre d'un changement de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

PROPOSITION 11.9 ★ Matrice jacobienne, Jacobien Hors programme

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1(U, F)$ et $a \in U$. Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F . Soit $a \in U$, et $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in E$ un vecteur décomposé sur la base e . On a

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot df_a(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

On décompose chaque vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot \varepsilon_j$$

sur la base f . La matrice de l'application linéaire df_a dans les bases e et ε s'appelle la matrice Jacobienne de f au point a et s'écrit :

$$\text{Mat}_{e,f}(df_a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Lorsque $E = F$ et $e = \varepsilon$, la matrice Jacobienne de f au point a est une matrice carrée et son déterminant s'appelle le Jacobien de f au point a :

$$Jf(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

PROPOSITION 11.10 ★★ Différentielle d'une application linéaire

Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Pour tout $a \in E$, φ est différentiable au point a et $d\varphi_a = \varphi$.

Démonstration Immédiat.

PROPOSITION 11.11 ★ Différentiable $\Rightarrow$ continue

Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable au point $a \in U$, alors f est continue au point a .

Démonstration $\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|df_a\| \|h\| + \|h\| \|\varepsilon(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

11.3 Applications géométriques

11.3.1 Courbes du plan définies par une équation $f(x, y) = 0$

Dans toute cette section U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On admet le théorème suivant :

THÉORÈME 11.12 ★ Théorème des fonctions implicites

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit Γ une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ et soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Γ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \mathbb{R})$ tels que si $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $W =]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ on a :

$$M(x, y) \in \Gamma \cap (U \times W) \iff x \in V \quad \text{et} \quad y = \varphi(x).$$

DÉFINITION 11.6 ★ Point régulier

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\Gamma : f(x, y) = 0$. On dit que M_0 est un point régulier de Γ si et seulement si $\vec{\nabla} f(M_0) \neq 0$.

COROLLAIRE 11.13 ★

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\Gamma : f(x, y) = 0$. Alors $\vec{\nabla} f(M_0)$ est normal à Γ (c'est-à-dire orthogonal au vecteur tangent à γ en M_0) et une équation de la tangente à Γ en M_0 est donnée par

$$\left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M \right) = \left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M_0 \right).$$

Démonstration Quitte à permuter e_1 et e_2 , on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$ alors Γ admet localement un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ de la forme $y = \varphi(x)$. Pour x assez près de x_0 , on a $f(x, \varphi(x)) = 0$ et donc en appliquant la règle de la chaîne, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

ce qui s'écrit aussi $\left(\vec{\nabla} f(M) \mid (1, \varphi'(x)) \right) = 0$. Donc les vecteurs $\vec{\nabla} f(M)$ et $(1, \varphi'(x))$ sont orthogonaux et non nuls et le gradient est bien normal à Γ en M_0 . Un point M est alors sur la tangente à Γ en M_0 si et seulement si $\overrightarrow{M_0 M}$ est orthogonal à $\vec{\nabla} f(M_0)$ ce qui amène la relation $\left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M \right) = \left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M_0 \right)$.

DÉFINITION 11.7 ★ Point régulier

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau* le sous-ensemble de U d'équation $f(M) = \lambda$.

PROPOSITION 11.14 ★ Le gradient, s'il est non nul, est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f

En un point où il est non nul, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau $f(M) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Démonstration On écrit le DL($M_0, 1$) à f pour $h \rightarrow 0^+$:

$$f\left(M_0 + h \vec{\nabla} f(M_0)\right) = f(M_0) + df(M_0) \cdot h \vec{\nabla} f(M_0) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|) = \lambda + h \left\| \vec{\nabla} f(M_0) \right\|^2 + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

On applique le corollaire précédent à $f - \lambda$.

11.3.2 Surfaces définies par une équation $f(x, y, z) = 0$

□ Dans cette section U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

DÉFINITION 11.8 ★ Courbe tracée sur une surface, courbe régulière

Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et Σ la surface d'équation $f(M) = 0$. On appelle *courbe tracée sur Σ* toute application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Une telle courbe est dite *régulière* si et seulement si γ' ne s'annule jamais.

DÉFINITION 11.9 ★ Point régulier d'une surface

Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et Σ la surface d'équation $f(M) = 0$. Un point M de Σ est dit *régulier* si et seulement si $\vec{\nabla} f(M) \neq 0$.

PROPOSITION 11.15

Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et Σ la surface d'équation $f(M) = 0$. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une courbe tracée sur Σ . Alors pour tout $t \in I$, la droite passant par $\gamma(t)$ et dirigée par $\gamma'(t)$ est tangente à la courbe en $\gamma(t)$.

De plus, si M_0 est un point régulier de Σ , alors $\vec{\nabla} f(M_0)$ est normal en M_0 à toute courbe tracée sur Σ et passant par ce point.

Démonstration La fonction $f \circ \gamma$ est nulle sur I donc d'après la règle de la chaîne, $\left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid \gamma'(t) \right) = 0$.

DÉFINITION 11.10 ★ Plan tangent

Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et Σ la surface d'équation $f(M) = 0$. On appelle *plan tangent* en le point régulier $M_0 \in \Sigma$ le plan passant par ce point et orthogonal à $\vec{\nabla} f(M_0)$.

PROPOSITION 11.16

Avec les notations précédentes, une équation du plan tangent à Σ en M_0 est

$$\left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M \right) = \left(\vec{\nabla} f(M_0) \mid M_0 \right).$$

11.4 Dérivées partielles d'ordre 2

DÉFINITION 11.11 ★ **Dérivées partielles d'ordre 2**

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On peut donc définir les fonctions dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{cases}$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ lorsque les 2 fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(a),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

BIO 1 Hermann Schwarz né le 25 Janvier 1843 à Hermsdorf (Silésie) et mort le 30 Novembre 1921 à Berlin

Hermann Schwarz a commencé ses études à l'université de Berlin pour apprendre la chimie mais les cours de Kümmer et de Weierstrass lui font abandonner son idée première et il décide de se consacrer aux mathématiques. Il effectue sa thèse sous la direction de Weierstrass.

Il est nommé maître de conférence à Halle en 1867, puis professeur à Zurich en 1869 et rejoint l'université de Göttingen en 1875 pour finalement prendre un poste à Berlin en 1892. Schwarz est au départ très intéressé par la géométrie et, au contact de Weierstrass, il apprend à traduire ses idées avec les outils de l'analyse. En 1870, il résout le problème de Dirichlet qui consiste à trouver une fonction harmonique définie sur un ouvert prolongeant une fonction continue définie sur la frontière de l'ouvert. La plus importante de ses contributions a été celle aux surfaces minimales (les surfaces minimisant leur aire relativement à une contrainte donnée). C'est dans un travail relatif à ce sujet qu'il publie, pour des intégrales doubles, l'inégalité ?? page ?? qui porte maintenant son nom. Elle est en fait due à Bunyakowsky qui l'énonça le premier pour des intégrales simples. Notons que Cauchy, dans son cours à Polytechnique, l'avait aussi énoncé dans le cas des suites.

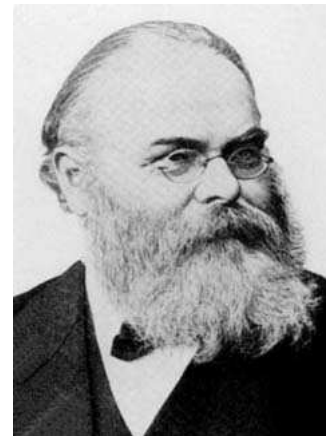


fig:Hermann_S

THÉORÈME 11.17 ★ **Théorème de Schwarz**

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Alors en tout point $a \in U$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

nm:schwarz

Démonstration Voir l'exercice ?? page ??.

Exemple 11.4 Considérons la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x(yx^3 - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2y(yx^3 - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Formons le taux d'accroissement :

$$\frac{1}{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = -1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$$

ce qui montre que $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$. De même, formons le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

ce qui montre que $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$. Les deux dérivées partielles secondes croisées sont différentes. On peut vérifier l'existence des quatre fonctions dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$, mais on vérifie qu'elles ne sont pas continues en $(0, 0)$.

THÉORÈME 11.18 Formule de Taylor intégrale à l'ordre 2 **Hors programme**

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que U est un ouvert convexe. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ et un accroissement $\vec{H} = (h, k)$ tel que $M_0 + \vec{H} \in U$. On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\left[h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]}_{df_{M_0}(\vec{H})} + R(h, k)$$

où

$$R(h, k) = \int_0^1 (1-t) \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk) \right] dt$$

Démonstration ★★ La preuve est instructive. On se ramène aux théorèmes déjà prouvés pour les fonctions d'une variable en considérant la fonction

$$\varphi: \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(x_0 + th, y_0 + tk) \end{cases}$$

Cette fonction est définie sur $[0, 1]$ car on a supposé que l'ouvert U était convexe. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de dérivée d'une composée (??) et $\forall t \in [0, 1]$,

$$\varphi'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)$$

En ré-appliquant le même théorème, on vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ avec $\varphi''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) + kh \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk)$. Avec le théorème de Schwarz, $\varphi''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk)$. Il suffit alors d'écrire la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 pour la fonction φ entre 0 et 1 :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt$$

pour obtenir le résultat.

THÉORÈME 11.19 ★★★ Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$, pour $(x_0, y_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] + \|(h, k)\|^2 R(h, k)$$

avec $R(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$.

Démonstration Reprenons la formule de Taylor-intégrale et travaillons sur le reste. Écrivons $\int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) dt = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \int_0^1 (1-t) dt + \varepsilon_1(h, k)$ où $\varepsilon_1(h, k) = \int_0^1 (1-t) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \right] dt$. Puisque $\int_0^1 (1-t) dt = 1/2$, on fait apparaître dans $R(h, k)$, $\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Puisque la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en (x_0, y_0) , on montre avec ε que $\varepsilon_1(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$. On fait de même avec les deux autres termes du reste pour obtenir le résultat.

Remarque 11.6 La partie entre crochet est une forme quadratique $q(h, k)$ en l'accroissement (h, k) . Le reste peut s'écrire $o(\|(h, k)\|^2)$. La formule de Taylor-Young permettra d'étudier la nature d'un point critique dans le paragraphe suivant.

THÉORÈME 11.20 ★★★ Formule de Taylor-Young à l'ordre 2, cas général

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^p$, pour $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + (\text{grad } f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

où $H_f(a) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est définie, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, par

$$[H_f(a)]_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

La matrice $H_f(a)$ est appelée *matrice Hessienne* de f en a .

Démonstration Admise.

Remarque 11.7 Comme f est $\mathcal{C}^2$, on a même que $H_f(a) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ par le théorème de Schwarz.

Remarque 11.8 On a $\text{Tr}(H_f(a)) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \Delta(f)(a)$ le Laplacien de f en a .

11.5 Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION 11.12 ★ Maximum, minimum, extremum

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $M_0 \in U$. On dit que M_0 est :

- un **maximum local** (respectivement un maximum local strict) de f si et seulement si il existe un voisinage V de M_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in V \cap U, \quad f(x) \leq f(M_0) \quad (\text{respectivement } f(x) < f(M_0))$$

- un **minimum local** (respectivement un minimum local strict) de f si et seulement si il existe un voisinage V de M_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in V \cap U, \quad f(x) \geq f(M_0) \quad (\text{respectivement } f(x) > f(M_0))$$

- un **extremum local** si M_0 est un maximum ou un minimum local.
- un **maximum global** si :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leq f(M_0)$$

- un **minimum global** si :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(M_0)$$

- un **extremum global** si M_0 est un maximum ou un minimum global.

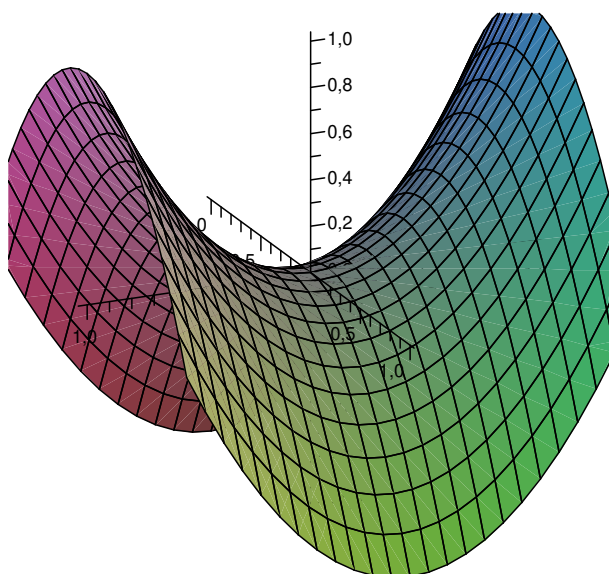
THÉORÈME 11.21 ★★★ La différentielle est nulle en un extremum local

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Si M_0 est un extremum local de f alors $df_{M_0} = 0$ c'est-à-dire : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Démonstration Supposons par exemple qu'il existe un voisinage V de M_0 tel que M_0 est un maximum de f sur V . Considérons la première fonction partielle f_1 de f au point M_0 définie sur un voisinage de x_0 par $f_1(t) = f(t, y_0)$. Puisque x_0 est un maximum de f_1 , on sait que $f_1'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. On fait de même avec la deuxième fonction partielle pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Remarque 11.9 Un point où la différentielle s'annule s'appelle un *point critique* de la fonction.

⚠ Attention 11.5 La réciproque est en général fausse, même pour des fonctions d'une variable : la fonction définie par $f(x) = x^3$ a une dérivée nulle en 0 et pourtant 0 n'est pas un extremum local. Pour des fonctions de deux variables, on peut également avoir des *points selles*. Si f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ et pourtant le point $(0, 0)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local : $f_1(t) = f(t, 0) = t^2$ et $f_2(t) = f(0, t) = -t^2$.



Exemple 11.6 Cherchons les extrema de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x + y)^2 + x^4 + y^4$$

Commençons par chercher les points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) + 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x + y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Le seul point critique est $(0, 0)$. Puisque $f(x, y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$, l'origine est un minimum global de la fonction f est c'est le seul extrémum.

Exemple 11.7 On considère une boîte rectangulaire sans son couvercle de volume V . Déterminer les dimensions de cette boîte pour la fabriquer avec le moins de carton possible.

Notons x, y les longueurs de la base et h sa hauteur. Puisque le volume est fixé, on a $x y h = V$. L'aire des parois en carton que l'on cherche à minimiser vaut :

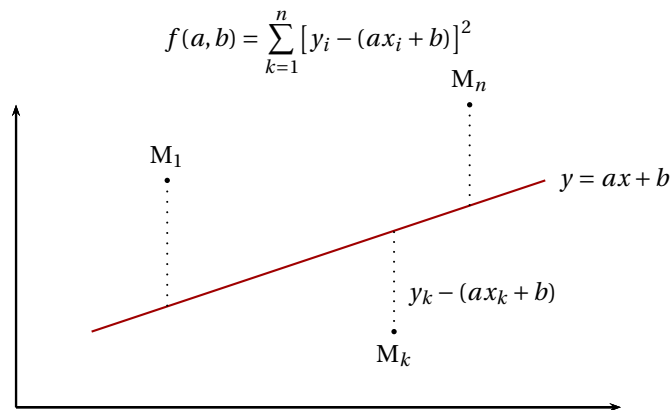
$$f(x, y) = 2xh + 2yh + xy = \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} + xy$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2V}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{2V}{y^2} \end{cases}$$

Un point critique doit vérifier $xy = \frac{2V}{x} = \frac{2V}{y}$ d'où l'on tire $x = y = (2V)^{1/3}$ et $h = V^{1/3}/2^{2/3}$. Il est clair dans notre contexte que cet unique point critique est le minimum global de la fonction.

Exemple 11.8 On considère un nuage de points dans le plan : $M_1 = (x_1, y_1), \dots, M_n = (x_n, y_n)$ que l'on suppose non alignés sur une même verticale. On recherche la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité :



La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = - \sum_{k=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = a \sum_{k=1}^n x_i^2 + b \sum_{k=1}^n x_i - \sum_{k=1}^n x_i y_i \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = - \sum_{k=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = a \sum_{k=1}^n x_i + nb - \sum_{k=1}^n y_i \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, définissons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants : $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et $N = (1, \dots, 1)$. Les points critiques (a, b) vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} \|X\|^2 a + (N | X) b = (X | Y) \\ (N | X) a + \|N\|^2 b = (N | Y) \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut $\det(S) = \|X\|^2 \|N\|^2 - (N | X)^2 \geq 0$. Il est positif d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et s'il était nul, d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les deux vecteurs N et X seraient liés et tous les points seraient sur une même verticale, ce qui est faux. Le système possède donc une solution unique et on trouve que

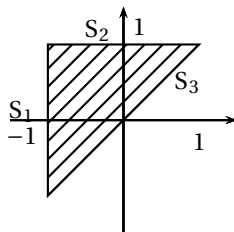
$$\begin{cases} a = \frac{n(X | Y) - (N | X)(N | Y)}{n\|X\|^2 - (N | X)^2} \\ b = \frac{\|X\|^2 (N | Y) - (N | X)(X | Y)}{n\|X\|^2 - (N | X)^2} \end{cases}$$

Le seul point critique est ici le minimum global de la fonction.

Remarque 11.10 En pratique, on définit souvent des fonctions $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ où K n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver les extrema de f , on procède comme suit :

- Déterminer les points critiques *intérieurs* à K , c'est-à-dire les points $M \in K$ tels qu'il existe une boule ouverte centrée en M incluse dans K avec $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$.
- Étudier la nature de ces points critiques intérieurs (maximum, minimum local, ou point selle). Cette partie est difficile à traiter avec les connaissances de math. sup. En deuxième année, vous disposerez d'un outil agréable pour déterminer la nature d'un point critique.
- Étudier f sur le *bord* de K .

Exemple 11.9 On considère le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et la fonction f définie sur Δ par $f(x, y) = (y - x)^3 + 6xy$. Déterminer son maximum et son minimum global.
Le domaine Δ est un triangle :



La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur du domaine : $\overset{\circ}{\Delta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1\}$ et on calcule

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6y - 3(y - x)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x + 3(y - x)^2 \end{cases}$$

On trouve les points critiques intérieurs (x, y) qui doivent vérifier $(y - x)^2 = 2y = -2x$ d'où $y = -x$ puis $y = -x = 1/2$. On calcule $f(-1/2, 1/2) = -1/2$. Étudions ensuite la restriction de f sur les trois segments qui forment le bord du domaine. Sur le segment S_1 , $g(t) = f(-1, t) = (1 + t)^3 - 6t$. On étudie la fonction g définie sur $[-1, 1]$ et on trouve que g atteint son minimum en $t = \sqrt{2} - 1$ et ce minimum vaut $6 - 4\sqrt{2}$ et atteint son maximum en $t = -1$ avec $g(-1) = 6$. On fait de même pour la restriction de f à S_2 en étudiant $h(t) = f(t, 1)$ puis sur S_3 avec $k(t) = f(t, t)$ pour $t \in [-1, 1]$. On trouve finalement que f admet son minimum global au point critique intérieur et que ce minimum vaut $-1/2$ et que f admet son maximum global sur la frontière qui vaut 6.

THÉORÈME 11.22 ★ Nature d'un extrémum local, cas de deux variables

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in U$ un point critique de f . On considère la matrice Hessienne de f au point (a, b) : $H(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Lorsque $\det(H) = rt - s^2 \neq 0$, on peut en déduire la nature du point critique a :

1. Si $rt - s^2 > 0$,
 - (a) Lorsque $r > 0$, on a un minimum local strict en (a, b) .
 - (b) Lorsque $r < 0$, on a un maximum local strict en (a, b) .
2. Si $rt - s^2 < 0$, on n'a pas de minimum ni de maximum local en a : a est un point col.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Démonstration Formule de Taylor-Young :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{2} [rh^2 + 2shk + tk^2] + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

Lorsque $\det(H) > 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ sont de même signe. Si $r > 0$, $H_f(a)$ est définie positive, si $r < 0$, elle est définie négative. On peut prendre comme norme équivalente sur $\mathbb{R}^2$, $\|(h, k)\| = \sqrt{|q(h, k)|}$ avec $q(h, k) = H^T H_f(a) H$ et $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Alors $f(a + h, b + k) - f(a, b) = \pm \|(h, k)\|^2 [1 + \varepsilon_1(h, k)]$ d'où le signe de $f(a + h, b + k)$ sur un voisinage de (a, b) . Si $\det(H) < 0$, la forme quadratique possède deux valeurs propres de signe opposé. On se place dans une base de vecteurs propres.

$$f(a + H, b + K) = \lambda H^2 - \mu K^2 + o((H^2 + K^2))$$

et sur la droite dirigée par ε_1 , $q < 0$ et sur l'autre, $q > 0$. Il y a un point col.

THÉORÈME 11.23 ★ Nature d'un extrémum local, cas général

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $a \in U \subset \mathbb{R}^p$ un point critique de f . On considère la matrice Hessienne $H(f)(a)$ de f au point a :

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un minimum local strict en a .
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum local en a .

Démonstration Comme f est $\mathcal{C}^2$ sur U , pour tout $a \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a par formule de Taylor-Young :

$$f(a + h) = f(a) + (\text{grad } f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

avec $\text{grad } f(a) = 0$ car a est un point critique.

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors $H_f(a)$ est diagonalisable dans une base orthonormale ε de $\mathbb{R}^p$ et $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$. Si on note $(h_1, \dots, h_p)$ les coordonnées de h dans la base ε et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres strictement positives de $H_f(a)$ (comptées avec multiplicité), il vient :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \lambda_k h_k^2 + o(\|h\|^2).$$

On pose alors pour un vecteur $x = \sum_{k=1}^p x_k \varepsilon_k \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_H = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2$. On vérifie qu'on définit ainsi bien une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Comme les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont toutes équivalentes, on peut écrire :

$$f(a+h) - f(a) = \|h\|_H^2 + o(\|h\|_H^2) \underset{\|h\|_H \rightarrow 0}{\sim} \|h\|_H^2 \geq 0$$

et on a bien $f(a+h) > f(a)$ dans un voisinage de 0 privé de 0 c'est-à-dire a est un minimum strict.

- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors $H_f(a)$ reste diagonalisable dans une base orthonormale de vecteur propre ε de $\mathbb{R}^p$ par théorème spectral mais certaines valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives. On reprend alors les notations du point précédent. On suppose quitte à permuter les vecteurs de la base de vecteurs propres ε que c'est le cas de λ_1 . Il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $a + t\varepsilon_1 \in U$:

$$f(a + t\varepsilon_1) - f(a) = \lambda_1 t^2 + o(t^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \lambda_1 t^2 < 0.$$

On en déduit que dans tout voisinage de a , $f(x) - f(a)$ prend des valeurs négatives. Donc a n'est pas un minimum local de f .

Remarque 11.11

- En remplaçant f par $-f$ dans le théorème précédent, si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives alors f présente un maximum local strict en a .
- Si $H_f(a)$ possède des valeurs propres strictement négatives et d'autres strictement positives alors le point deux du théorème permet d'affirmer que f ne présente pas d'extremum en a .

11.6 Changements de variables classiques

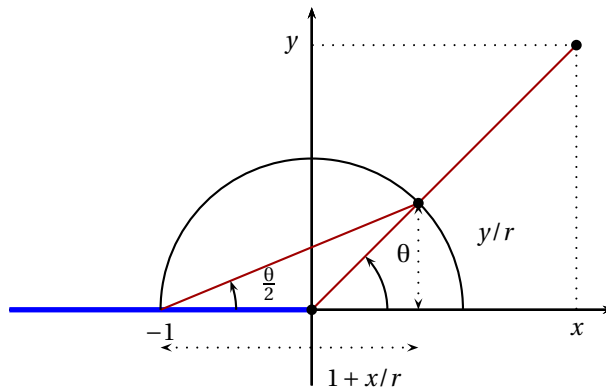
11.6.1 Changement de variables affine

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, on considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto a + u(x) \end{cases}$$

C'est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et $J\varphi(x) = Ju(x) = \det(u) \neq 0$.

11.6.2 Coordonnées polaires



On définit les deux ouverts de $\mathbb{R}^2$: $\Delta =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $U = \mathbb{R}^2 \setminus D^-$ où $D^- = \{(x, 0); x \leq 0\}$. L'application

$$\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow U \\ (r, \theta) & \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

définit un changement de variables en coordonnées polaires. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection de Δ vers U . Sa matrice Jacobienne en un point (r, θ) vaut :

$$M\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et le Jacobien vaut $J\varphi(r, \theta) = r > 0$. Par conséquent, φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de Δ vers U . On peut calculer φ^{-1} en se restreignant à des ouverts de Δ : On a toujours $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

— Si $(x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

— Si on se place sur $\Delta \setminus D^-$ où D^- est la demi-droite $\{(\lambda, 0), \lambda \leq 0\}$, on a $\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Si f est une fonction scalaire $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, on définit un changement de variables polaires :

$$g = f \circ \varphi : \Delta \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

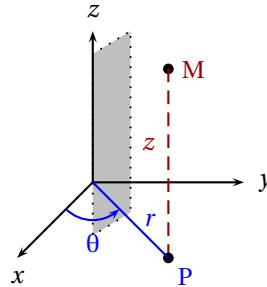
Soit $X = (x, y) \in U$ et $P = (r, \theta) \in \Delta$ le couple de coordonnées polaires correspondant : $X = \varphi(P)$. Comme $g = f \circ \varphi$ et $f = g \circ \varphi^{-1}$,

$$dg_P = df_X \circ d\varphi_P \quad df_X = dg_P \circ (d\varphi_P)^{-1}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(P) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(X) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(P) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(X) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(X) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(P) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(P) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(P) \end{cases}$$

11.6.3 Coordonnées cylindriques



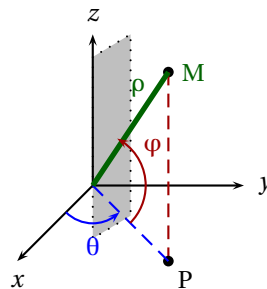
$\Delta =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z); x \leq 0\}$.

$$\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow U \\ (r, \theta, Z) & \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, Z) \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et

$$J\varphi(r, \theta, Z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

11.6.4 Coordonnées sphériques



$\Delta =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]\pi/2, \pi/2[$, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z), x \leq 0\}$.

$$\psi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow U \\ (\rho, \theta, \varphi) & \longmapsto (\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi) \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et

$$J\psi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \varphi$$

11.7 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Le but de ce paragraphe est de résoudre quelques équations aux dérivées partielles simples. Pour simplifier l'étude, on considère un ouvert de la forme $U =]a, b[\times]c, d[$. Commençons par résoudre des équations aux dérivées partielles fondamentales :

PROPOSITION 11.24 ★ EDP $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$(E_1) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_1) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in \mathcal{C}^1(]c, d[, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = k(y)$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_1) . Fixons $y \in]c, d[$. La fonction : $\varphi : \begin{cases}]a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(t, y) \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle. Elle est donc constante : $\forall t \in]a, b[, \varphi(t) = \varphi(0)$ et on a donc : $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = k(y)$ avec $k : \begin{cases}]c, d[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto f(0, y) \end{cases}$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c, d[$ d'après le théorème de composée ??.

$\Leftarrow$ Réciproquement, une fonction $k \in \mathcal{C}^1(]c, d[, \mathbb{R})$ est clairement solution de (E_1) .

PROPOSITION 11.25 ★ EDP $\frac{\partial f}{\partial x} = h$

Soit $h \in \mathcal{C}^0(]a, b[, \mathbb{R})$.

$$(E_2) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x)$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_2) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in \mathcal{C}^1(]c, d[, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = H(x) + k(y)$ où H est une primitive de h sur $]a, b[$.

Démonstration D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme h est continue sur $]a, b[$, elle possède une primitive H sur $]a, b[$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Introduisons la fonction $\psi : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(x, y) - H(x) \end{cases}$. Supposons que f est solution de (E_2) , alors :

$$\begin{aligned} & \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x) \\ \Rightarrow & \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial (f - H)}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \Rightarrow & \psi \text{ est solution de } (E_0) \\ \Rightarrow & \forall (x, y) \in U, \quad \psi(x, y) = k(y) \text{ avec } k : \begin{cases}]c, d[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto f(0, y) \end{cases} \\ \Rightarrow & \forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = H(x) + k(y) \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_2) .

PROPOSITION 11.26 ★ EDP $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$$(E_3) : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_3) si et seulement s'il existe deux fonctions $H \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R})$ et $K \in \mathcal{C}^2(]c, d[, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = H(x) + K(y)$$

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Supposons que f est solution de (E_3) . Alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est solution de } (E_1) \\ \Rightarrow & \exists k \in \mathcal{C}^1(]c, d[, \mathbb{R}) : \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k(y) \\ \Rightarrow & f \text{ est solution de } (E_2) \\ \Rightarrow & \forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = H(x) + K(y) \end{aligned}$$

où K est une primitive de k et est donc de classe $\mathcal{C}^2$ et où $K \in \mathcal{C}^1(]c, d[, \mathbb{R})$. Comme : $\forall (x, y) \in U, \quad K(y) = H(x) - f(x, y)$, K est de classe $\mathcal{C}^2$ comme différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_3) .

PROPOSITION 11.27 ★ EDP $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$(E_4) : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_4) si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = y\varphi(x) + \psi(x)$$

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Supposons que f est solution de (E_4) alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est solution de } (E_1) \\ \Rightarrow & \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R}) : \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x) \\ \Rightarrow & \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial (f - y\varphi)}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \Rightarrow & f - y\varphi \text{ est solution de } (E_1) \\ \Rightarrow & \exists \psi \in \mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R}) : \forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) - y\varphi(x) = \psi(x) \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_4) .

DÉFINITION 11.13 ★★★ Difféomorphisme

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$. On dit qu'une application $\varphi : U \rightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme lorsque :

1. φ est une bijection de U vers V ;
2. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
3. $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

Exemple 11.10 Considérons une application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (ax + by, cx + dy) \end{cases}$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et est bijective si et seulement si $\det(\varphi) = ad - bc \neq 0$. La bijection réciproque est encore une application de classe $\mathcal{C}^1$ et donc φ définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Exemple 11.11 Considérons l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Tout point $M = (x, y) \in U$ peut être décrit à l'aide de coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $(r, \theta) \in V =]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$. Vérifions que l'application

$$\varphi : \begin{cases} V & \longrightarrow U \\ (r, \theta) & \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V vers U . L'application φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et on calcule facilement sa bijection réciproque :

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} U & \longrightarrow V \\ (x, y) & \longmapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)) \end{cases}$$

qui est également de classe $\mathcal{C}^1$.

- 1 On utilise un changement de variables pour se ramener à une EDP plus simple. Soit $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.
- 2 On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$, $f = g \circ \varphi$. f est une fonction $\mathcal{C}^k(U_1, \mathbb{R})$ solution d'une EDP (E_1) si et seulement si g est une fonction $\mathcal{C}^k(U_2, \mathbb{R})$ solution d'une EDP (E_2) .

Exemple 11.12 On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Résoudre sur U les équations aux dérivées partielles

- a. $(E_1) : y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$
- b. $(E_2) : x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$
- c. $(E) : x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) - (x^2 + y^2).$

Considérons le changement de variables polaires, c'est-à-dire le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme φ de la remarque précédente. Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $g = f \circ \varphi$:

$$g : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\rho, \theta) & \longmapsto f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{cases}$$

et on calcule :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{cases}$$

- a Si f est solution de (E_1) , on doit avoir $\forall (\rho, \theta) \in V$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = 0$ et donc il existe une fonction $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(\rho, \theta) = h(\rho)$. Par conséquent, $f(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$. Définissons une nouvelle fonction $H :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $H(u) = h(\sqrt{u})$ (elle est encore $\mathcal{C}^1$), $f(x, y) = H(x^2 + y^2)$. On vérifie réciproquement que pour toute fonction $H \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, f ainsi définie est solution de (E_1) .
- b Si f est solution de (E_2) , la fonction g doit vérifier $\frac{\partial g}{\partial \rho} = 0$ et donc il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[)$ telle que $\forall (\rho, \theta) \in V$, $g(\rho, \theta) = h(\theta)$. On en déduit alors que $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = g(\arctan(y/x))$ et en définissant une nouvelle fonction par $G(u) = g(\arctan u)$, $f(x, y) = G(y/x)$. Réciproquement, pour toute fonction $G \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R})$, f ainsi définie est solution de (E_2) .
- c Si f est solution de (E_3) ,

$$\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - g(\rho, \theta) = -\rho^2$$

En posant $h(\rho, \theta) = e^{-\ln \rho} g(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} g(\rho, \theta)$, $\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) = -1$ d'où $g(\rho, \theta) = -\rho^2 + \rho k(\theta)$ avec $k \in \mathcal{C}^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$.

Finalement,

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2} k\left(2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Exemple 11.13 Résoudre sur $U = \mathbb{R}^2$ l'équation des ondes :

$$(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

On pose $\varphi : (x, t) \rightarrow (u, v) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)) = (x - t, x + t)$. Si $f = g \circ \varphi$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) & \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, t)) & \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x, t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, t) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, t) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, t) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, t)) & \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x, t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

et (E) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{E}$) : $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ qui est du type (E_3). Les solutions de ($\tilde{E}$) sont donc de la forme : $g : (u, v) \mapsto H(u) + K(v)$ où $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. et les solutions de (E) sont alors de la forme : $f : (x, t) \mapsto H\left(\frac{x+y}{2}\right) + K\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Exemple 11.14 Résoudre sur $U =]0, +\infty[^2$ l'équation

$$(E) : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On pose

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow U \\ (u, v) & \longmapsto (e^u, e^v) \end{cases}$$

On vérifie facilement que φ est un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme et on posant $g = f \circ \varphi$, on a $f(x, y) = g(\ln x, \ln y)$. Après calculs, la fonction g vérifie l'équation des ondes donc il existe deux fonctions d'une variable de classe $\mathcal{C}^2$ H et K telles que $g(u, v) = H(u + v) + K(u - v)$ d'où l'existence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une variable telles que

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x/y)$$

On vérifie réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de l'EDP.

