

# Compléments d’algèbre linéaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Compléments d’algèbre linéaire</b>	<b>1</b>
1.1	Produit et somme d’espaces vectoriels	2
1.1.1	Produit d’un nombre fini de sev	2
1.1.2	Rappels de première année : somme de deux sev	3
1.1.3	Somme finie de sev	5
1.2	Matrices par blocs et sous-espaces stables	7
1.3	Déterminants	9
1.3.1	Déterminants par blocs	9
1.3.2	Déterminant de Vandermonde	10
1.4	Matrices semblables et trace	11
1.4.1	Trace d’une matrice carrée	11
1.4.2	Matrices semblables	12
1.5	Matrices équivalentes (Hors programme)	12
1.6	Polynômes d’endomorphismes et de matrices carrées	13
1.6.1	Polynômes d’endomorphismes	13
1.6.2	Polynômes de matrices carrées	15
1.7	Interpolation de Lagrange	16
1.8	Projecteurs et symétries (Rappels de première année)	17
1.8.1	Projecteurs	17
1.8.2	Symétries	19
1.9	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes HORS PROGRAMME	21
1.10	L’essentiel	22

Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l’évidence de leurs raisons : mais je ne remarquais point encore leur vrai usage ; et, pensant qu’elles ne servaient qu’aux arts mécaniques, je m’étonnais de ce que leurs fondements étant si fermes et si solides, on n’avait rien bâti dessus de plus relevé.

René Descartes, 31 mars 1596 - 11 février 1650

### Pour bien commencer l’année

Citons ce passage si important du discours de la méthode de Descartes :

Et comme la multitude des lois fournit souvent des excuses aux vices, en sorte qu'un État est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées ; ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

# 1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre et sauf mention du contraire,  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 1.1.1 Produit d'un nombre fini de sev

Commençons par le cas simple d'un produit de deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**PROPOSITION 1.1 Produit d'espaces vectoriels**  
 Soient  $(E_1, +, \cdot)$  et  $(E_2, +, \cdot)$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble  $E_1 \times E_2$

- une addition  $+$ 

$$+ : \begin{cases} (E_1 \times E_2)^2 & \longrightarrow E_1 \times E_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{cases}$$
- une multiplication par un scalaire  $\cdot$ 

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \longrightarrow E_1 \times E_2 \\ (\alpha, (x_1, x_2)) & \longmapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \end{cases}$$

Alors  $(E_1 \times E_2, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son vecteur nul est  $(0_{E_1}, 0_{E_2})$ .

□ **Démonstration** Vérifications faciles.  
 On généralise alors cette proposition à un produit fini de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

**PROPOSITION 1.2 ★ Produit d'espaces vectoriels**  
 Soit  $p \geq 2$ . On considère  $(E_1, +, \cdot), \dots, (E_p, +, \cdot)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble  $E = E_1 \times \dots \times E_p$

- une addition  $+$ 

$$+ : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow E \\ ((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \end{cases}$$
- une multiplication par un scalaire  $\cdot$ 

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\alpha, (x_1, \dots, x_p)) & \longmapsto (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_p) \end{cases}$$

Alors  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son vecteur nul est  $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$ .

**Démonstration** On effectue une récurrence sur  $p$ . Si  $p = 2$ , alors la proposition est une conséquence de la précédente. Soit  $p \geq 2$ . On suppose que la propriété est vraie pour un produit de  $p$  espaces vectoriels. On considère  $p+1$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_{p+1}$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $E_1 \times \dots \times E_p$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et d'après la proposition 1.1,  $E_1 \times \dots \times E_p \times E_{p+1} = (E_1 \times \dots \times E_p) \times E_{p+1}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et la propriété est prouvée par récurrence.

 **Notation 1.1** Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  est aussi noté  $\prod_{k=1}^p E_k$  ou  $\prod_{i \in I} E_i$  dans le cas d'espaces indicés par une famille finie  $I$ .

**Exemple 1.2** Une application immédiate, qui permet de retrouver un résultat classique de première année, est la suivante. On sait que  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Donc  $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ facteurs}}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**PROPOSITION 1.3 ★ Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finies**

Soient  $(E_1, +, \cdot), \dots, (E_p, +, \cdot)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respectives  $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$  et  $E = E_1 \times \dots \times E_p$ . Alors  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n = n_1 + \dots + n_p$  :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

**Démonstration**

On prouve déjà la proposition pour un produit de deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  de dimensions respectives  $n_1$  et  $n_2$ . Soient  $e = (e_1, \dots, e_{n_1})$  une base de  $E_1$  et  $e' = (e'_1, \dots, e'_{n_2})$  une base de  $E_2$ . Alors une base de  $E_1 \times E_2$  est donnée par

$$f = ((e_1, 0), \dots, (e_{n_1}, 0), (0, e'_1), \dots, (0, e'_{n_2})).$$

En effet :

- la famille  $f$  est libre : soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2} \in \mathbb{K}$  tels que  $\alpha_1(e_1, 0) + \dots + \alpha_{n_1}(e_{n_1}, 0) + \beta_1(0, e'_1) + \dots + \beta_{n_2}(0, e'_{n_2}) = 0$  alors  $(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n_1} e_{n_1}, \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_{n_2} e'_{n_2}) = (0_{E_1}, 0_{E_2})$  et donc  $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i = 0_{E_1}$  et  $\sum_{i=1}^{n_2} \beta_i e'_i = 0_{E_2}$ . Mais  $e$  et  $e'$  étant libres, il vient  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} = \beta_1 = \dots = \beta_{n_2} = 0$  et  $f$  est libre.
- la famille  $f$  est génératrice : soit  $(x, x') \in E_1 \times E_2$  alors comme  $e$  engendre  $E_1$  et que  $e'$  engendre  $E_2$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2} \in \mathbb{K}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i$  et  $x' = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j e'_j$  et  $(x, x') = (\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j e'_j) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j (0, e'_j)$  donc  $f$  engendre bien  $E_1 \times E_2$ .

En conclusion,  $E_1 \times E_2$  est bien de dimension finie et on a bien  $\dim(E_1 \times E_2) = \text{Card}(f) = n_1 + n_2$ . On s'attaque maintenant au cas général qu'on traite par récurrence sur  $p \geq 2$ . On vient d'initialiser cette récurrence. Soit  $p \geq 2$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $p$ . On considère  $p+1$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p, E_{p+1}$  de dimensions respectives  $n_1, \dots, n_p, n_{p+1}$ . On a :

$$E_1 \times \dots \times E_p \times E_{p+1} = \underbrace{(E_1 \times \dots \times E_p)}_{=E} \times E_{p+1} = E \times E_{p+1}$$

et d'après la première partie de la preuve, on sait que  $E \times E_{p+1}$  est de dimension finie et que  $\dim(E \times E_{p+1}) = \dim E + \dim E_{p+1}$ . Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on sait que  $\dim E = \dim(E_1 \times \dots \times E_p) = n_1 + \dots + n_p$  donc  $\dim E_1 \times \dots \times E_{p+1} = n_1 + \dots + n_p + n_{p+1}$  et la propriété est prouvée par récurrence.

**1.1.2 Rappels de première année : somme de deux sevs**

On rappelle que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors

1.  $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ . On peut montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel, c'est le plus petit à contenir à la fois  $F$  et  $G$ .
2.  $F$  et  $G$  sont dits en somme directe si  $F \cap G = \{0\}$ . La somme  $F + G$  s'écrit alors  $F \oplus G$ .

**THÉORÈME 1.4 Caractérisation de la somme directe**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . On a équivalence entre :

- 1  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
- 2  $\forall (x, y) \in F \times G, [x + y = 0 \implies x = y = 0]$ .

**Démonstration**

- $\implies$  Supposons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. Soit  $(x, y) \in F \times G$  tel que  $x + y = 0$  alors  $x = -y$  et donc, comme  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels, il vient que  $x \in F \cap G$  et  $y \in F \cap G$ . Mais  $F \cap G = \{0\}$  donc  $x = y = 0$ .
- $\impliedby$  Réciproquement si  $x \in F \cap G$  alors on a  $x - x = 0$  avec  $x \in F$  et  $-x \in G$  donc  $x = 0$  et  $F \cap G = \{0\}$ .

**THÉORÈME 1.5 Caractérisation de la somme directe**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . On a équivalence entre :

- 1  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
- 2  $\forall x \in F + G, \exists !(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$  (c'est-à-dire, **tout** vecteur de  $F + G$  se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .)

### Démonstration

- ⇒ Supposons que  $F$  et  $G$  soient en somme directe et soit  $x \in F+G$ . Par définition, il existe  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . Supposons qu'il existe  $x'_1 \in F$  et  $x'_2 \in G$  tels qu'on ait encore  $x = x'_1 + x'_2$ . Comme  $x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ , on a l'égalité :  $(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) = 0$ . Comme  $F_1$  et  $F_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on sait que  $x_1 - x'_1 \in F_1$  et  $x_2 - x'_2 \in F_2$ . On applique alors la proposition précédente et on obtient :  $x_1 - x'_1 = 0$  et  $x_2 - x'_2 = 0$ . Par conséquent,  $x_1 = x'_1$  et  $x_2 = x'_2$  et l'unicité est prouvée.
- ⇐ Prouvons maintenant la réciproque. On sait qu'il existe une unique façon de décomposer un vecteur de  $E$  en la somme d'un vecteur de  $F_1$  et d'un vecteur de  $F_2$ . C'est en particulier vrai pour le vecteur nul. Par conséquent, les sous-espaces  $F$  et  $G$  sont en somme directe d'après la proposition précédente.

### DÉFINITION 1.1 ★ Sous-espaces supplémentaires

Deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  d'un espace  $E$  sont dits *supplémentaires* dans  $E$  lorsque :

1.  $E = E_1 + E_2$
2. la somme de  $E_1$  et  $E_2$  est directe.

On note alors  $E = E_1 \oplus E_2$ .

Si on dispose dans un espace vectoriel  $E$  de deux sous-espaces supplémentaires  $F$  et  $G$  alors tout vecteur de  $E$  peut être décomposé de manière unique en la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .

### THÉORÈME 1.6 Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . On a équivalence entre :

1.  $E = F \oplus G$  (c'est-à-dire  $F$  et  $G$  sont supplémentaires).
2.  $\forall x \in E, \exists !(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$  (c'est-à-dire, **tout** vecteur de  $E$  se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .)

### Démonstration

- ⇒ Supposons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires. Soit  $x \in E$ . Comme  $E = F + G$ , il existe  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . En appliquant le théorème 1.5, comme  $F$  et  $G$  sont en somme directe, cette décomposition est unique.
- ⇐ Réciproquement, si pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(x_1, x_2) \in F \times G$  tel que  $x = x_1 + x_2$  alors on a nécessairement  $E = F + G$ . On peut de plus appliquer à nouveau le théorème 1.5 et affirmer que les deux sous-espaces  $F$  et  $G$  sont supplémentaires. On a ainsi montré que  $E = F \oplus G$ .

On a aussi la caractérisation suivante de la supplémentarité en terme de bases.

### THÉORÈME 1.7 ★★★ Caractérisation de la supplémentarité en terme de bases

Soient  $F, G$  sont deux sev de  $E$  de dimension finie. On a équivalence entre :

- $E = F \oplus G$ .
- La réunion d'une base de  $F$  avec une base de  $G$  est une base de  $E$ .

### Démonstration

- Prouvons le sens direct. On suppose que  $E = F \oplus G$ .
  - Montrons que  $\mathcal{B}$  est libre : soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$  des scalaires de  $\mathbb{K}$  tels que  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q = 0$ . D'après le théorème 1.4, comme  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in F$  et  $\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q \in G$ , on a alors :  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = (\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q) = 0$ . Comme  $e$  est une base de  $F$  et  $f$  une base de  $G$ , ceci implique que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = 0$  et donc que  $\mathcal{B}$  est libre.
  - Montrons que  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Comme  $E = F \oplus G$ , il existe un vecteur  $x_1 \in F$  et un vecteur  $x_2 \in G$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . De plus :
    - Comme  $e$  est une base de  $F$  et que  $x_1 \in F$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$  tels que  $x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$ .
    - Comme  $f$  est une base de  $G$  et que  $x_2 \in G$ , il existe  $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$  tels que  $x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q f_q$ .
 Par conséquent :  $x = x_1 + x_2 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q f_q \in \text{Vect}(\mathcal{B})$  et  $\mathcal{B}$  est donc bien génératrice de  $E$ . On a ainsi prouvé que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
- Prouvons la réciproque. On suppose que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
  - On a alors unicité de la décomposition du vecteur nul de  $E$  dans  $\mathcal{B}$  et donc unicité de la décomposition du vecteur nul comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ . Ainsi  $F$  et  $G$  sont en somme directe d'après le théorème 1.4.
  - On a  $E = F + G$ . En effet, si  $x \in E$  alors comme  $\mathcal{B}$  engendre  $E$ , il existe  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$  et  $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{K}$  tels que

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_p e_p}_{\in F} + \underbrace{y_1 f_1 + \dots + y_q f_q}_{\in G} \in F + G.$$

Donc  $E = F \oplus G$ .

Une conséquence importante de ce résultat est qu'on peut caractériser le fait d'être en somme directe en terme de dimension.

**THÉORÈME 1.8 ★★★ Caractérisation de la somme directe grâce à la dimension**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors on a équivalence entre :

- 1 les sous-espaces  $F$  et  $G$  sont en somme directe ;
- 2  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ .

**Démonstration**

$\Rightarrow$  Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe alors on peut trouver une base  $f$  de  $F$ , une base  $g$  de  $G$  telle que la réunion de ces deux bases forme une base de  $F + G$ . Alors  $\dim(F + G) = \text{Card}(e) = \text{Card}(f) + \text{Card}(g) = \dim F + \dim G$ .

$\Leftarrow$  Réciproquement, si  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ , on considère une base  $f$  de  $F$  et une base  $g$  de  $G$ . On note  $e$  la réunion de ces deux bases. On a  $F + G = \text{Vect}(e)$  donc  $e$  engendre  $F + G$ . De plus,  $\text{Card}(e) = \text{Card}(f) + \text{Card}(g) = \dim F + \dim G = \dim(F + G)$  donc  $e$  est une base de  $F + G$ . On montre ainsi que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

On rappelle en conclusion de cette section la formule de Grassmann :

**THÉORÈME 1.9 ★ Dimension d'une somme, Formule de Grassmann**

Si  $F_1, F_2$  sont deux sev de  $E$  de dimension finie,

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$$

**1.1.3 Somme finie de sevs**

Les notions et résultats précédents sont généralisables quand on considère plus que deux sevs.

**DÉFINITION 1.2 ★★ Somme d'une famille finie de sevs**

On considère  $p$  sous espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  d'un espace vectoriel  $E$ . On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$E_1 + \dots + E_p = \{x_1 + \dots + x_p; (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

Lorsque  $(E_i)_{i \in I}$  est une famille finie de sevs, on note  $\sum_{i \in I} E_i$  la somme de cette famille de sevs.

**Remarque 1.1** On montre facilement que la somme d'une famille finie de sevs de  $E$  est encore un sev de  $E$ . C'est d'ailleurs le plus petit sev de  $E$  contenant chacun des sevs  $E_i$ .

**DÉFINITION 1.3 ★ Somme directe**

On dit qu'une somme  $E_1 + \dots + E_p$  est *directe* si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

On note alors  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  une telle somme directe, ou  $\bigoplus_{i \in I} E_i$  dans le cas d'une famille finie  $I$ .

**Remarque 1.2** Le théorème 1.5 nous garantit que cette définition est cohérente avec la notion de somme directe vue en première année qui ne concernait que deux sevs ( $p = 2$ ).

Par ailleurs si pour  $p \geq 3$ , la somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe alors il en est de même de la somme  $E_1 + \dots + E_{p-1}$ . En effet, si  $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in E_1 \times \dots \times E_{p-1}$  est tel que  $x_1 + \dots + x_{p-1} = 0$  alors  $x_1 + \dots + x_{p-1} + 0_{E_p} = 0$  et donc  $x_1 = \dots = x_{p-1} = 0$ .

**PROPOSITION 1.10 ★★ Caractérisation de la somme directe par une application linéaire**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $E_1, \dots, E_p$  des sevs de  $E$ . On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto x_1 + \dots + x_p \end{cases}$$

Alors :

- 1 l'application  $\varphi$  est linéaire.
- 2 l'application  $\varphi$  est injective si et seulement si la somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe.
- 3 l'application  $\varphi$  est surjective si et seulement si  $E = E_1 + \dots + E_p$ .

### Démonstration

- 1 On montre facilement que  $\varphi$  est linéaire.
- 2 La somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe si et seulement si  $\varphi$  est injective. En effet, si la somme est directe et si  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \text{Ker } \varphi$  alors  $x_1 + \dots + x_p = 0$  ce qui n'est possible que si  $x_1 = \dots = x_p = 0$  et donc que si  $x = 0$ . Donc  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective. Réciproquement, si  $\varphi$  est injective et si  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  est tel que  $x_1 + \dots + x_p = 0$  alors  $\varphi(x) = 0$  mais  $\varphi$  étant injective, il vient  $x = 0$  donc  $x_1 = \dots = x_p = 0$  et la somme est directe.
- 3 Si  $E = E_1 + \dots + E_p$  alors pour tout  $x \in E$ , il existe  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $x = x_1 + \dots + x_p$  et donc  $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x$  ce qui prouve que  $\varphi$  est surjective. Réciproquement, si  $\varphi$  est surjective, pour tout  $x \in E$ , il existe  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x$  soit  $x = x_1 + \dots + x_p$  et donc  $E \subset E_1 + \dots + E_p$ . Par ailleurs  $E_1 + \dots + E_p \subset E$  donc  $E = E_1 + \dots + E_p$ .

### THÉORÈME 1.11 ★★★ Caractérisations d'une somme directe, unicité de la décomposition d'un vecteur dans une somme directe

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $E_1, \dots, E_p$  des sevs de  $E$ . On a équivalence entre :

1. La somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe.
2. (Unicité de la décomposition sur une somme directe) Tout vecteur  $x \in E_1 + \dots + E_p$  se décompose de façon unique en  $x = x_1 + \dots + x_p$  où  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ .
- 3.

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad E_i \cap \left( \sum_{j \neq i} E_j \right) = \{0_E\}$$

### Démonstration

1.  $\Leftrightarrow$  2. Cette équivalence est juste une retranscription du fait que l'application  $\varphi$  précédente est injective.

1.  $\Rightarrow$  3. On suppose que la somme est directe. Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et soit  $x \in E_i \cap \left( \sum_{j \neq i} E_j \right)$  alors  $x \in E_i$  et  $x \in \sum_{j \neq i} E_j$ . Donc pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i\}$ , il existe  $x_j \in E_j$  tels que  $x = \sum_{j \neq i} x_j$ . De  $x = x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_p$ , on tire

$$\underbrace{x_1}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{x_{i-1}}_{\in E_{i-1}} + \underbrace{-x}_{\in E_i} + \underbrace{x_{i+1}}_{\in E_{i+1}} + \dots + \underbrace{x_p}_{\in E_p} = 0$$

et comme la somme est directe il vient  $x_1 = \dots = x_{i-1} = -x = x_{i+1} = \dots = x_p = 0$  et  $E_i \cap \left( \sum_{j \neq i} E_j \right) = \{0_E\}$ .

3.  $\Leftarrow$  1. Réciproquement, on suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $E_i \cap \left( \sum_{j \neq i} E_j \right) = \{0_E\}$ . Fixons  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $x_1 + \dots + x_p = 0_E$ . On a donc  $x := \underbrace{-x_i}_{\in E_i} = \underbrace{x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_p}_{\in \sum_{j \neq i} E_j}$  et donc  $x = 0$ , c'est-à-dire

$x_i = 0$ . Comme  $i$  est quelconque, il vient alors  $x_1 = \dots = x_p = 0_E$ .

**Remarque 1.3** Attention à la caractérisation d'une somme directe dans le cas de plus de deux sevs ! Dans  $E = \mathbb{R}^2$ , trois droites vectorielles  $D_1, D_2, D_3$  distinctes (figure 1.1) sont en somme directe deux à deux, mais la somme  $D_1 + D_2 + D_3$  n'est pas directe !

Par contre, trois droites non coplanaires de  $\mathbb{R}^3$  sont en somme directe.

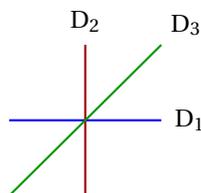


FIGURE 1.1 – Une somme non directe dans  $\mathbb{R}^2$

### DÉFINITION 1.4 ★ Base adaptée à un sev, à une somme directe

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soient  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  en somme directe. On dit qu'une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est :

- adaptée à  $F$  si et seulement si on peut extraire de  $e$  une base de  $F$ .
- adaptée à la somme directe  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  si on peut extraire de  $e$  des bases  $e^1, \dots, e^p$  de  $E_1, \dots, E_p$ .

**Remarque 1.4** Si  $E$  est de dimension finie et si  $F$  est un sev de  $E$  alors il existe une base de  $E$  adaptée à  $F$ . Pour la construire, il suffit de considérer une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  (qui existe car  $F$  est lui aussi de dimension finie) puis de la compléter, grâce au théorème de la base incomplète, en une base  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .  
Remarquons que cette construction permet d'obtenir un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $E$  donné par  $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ .

**THÉORÈME 1.12 ★ Dimension d'une somme directe, caractérisation de la somme directe grâce à la dimension**  
Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, on considère un nombre fini de sevs  $E_1, \dots, E_p$ . Alors

$$\dim(E_1 + \dots + E_p) \leq \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

et on a égalité si et seulement si  $E_1, \dots, E_p$  sont en somme directe :

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

**Démonstration** Considérons l'application  $\varphi : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow & V = E_1 + \dots + E_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_p \end{cases}$  de la proposition 1.10. On a  $\text{Im } \varphi = E_1 + \dots + E_p$  et donc en vertu de la formule de rang appliquée à  $\varphi$ ,

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi \geq \dim \text{Im } \varphi = \dim(E_1 + \dots + E_p)$$

et on a égalité si et seulement si  $\varphi$  est injective, c'est-à-dire, toujours d'après la proposition 1.10, si et seulement si la somme est directe.

**Remarque 1.5** Avec les notations des familles finies, l'inégalité précédente devient :

$$\dim \sum_{i \in I} E_i \leq \sum_{i \in I} \dim E_i$$

**THÉORÈME 1.13 Base adaptée à une somme directe, caractérisation de la somme directe en terme de bases**  
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $E_1, \dots, E_p$  des sevs de  $E$  admettant comme bases respectives  $e^1, \dots, e^p$ . On a équivalence entre :

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  ;
- La réunion  $e$  des bases  $e^i$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  est une base de  $E$ .

**Démonstration**

$\Rightarrow$  On note  $e^j = (e^j_1, \dots, e^j_{i_j})$  une base de  $E_j$ . Montrons que  $e = e^1 \cup \dots \cup e^p$  est une base de  $V$ .

- La famille  $e$  est libre. En effet, si  $\sum_{v \in e} \alpha_v v = 0$  alors  $\sum_{i=1}^p \sum_{v \in e^i} \alpha_v v = 0$  mais  $\sum_{v \in e^i} \alpha_v v \in E_i$  donc d'après la proposition 1.11, il vient  $\sum_{v \in e^i} \alpha_v v = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et donc, comme  $e^i$  est une base de  $E_i$ , on a  $\alpha_v = 0$  pour tout  $v \in e^i$  et la famille est bien libre.
- La famille  $e$  est génératrice de  $V$ . En effet, comme  $V = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ , alors si  $x \in V$ , il existe  $x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p$  tels que  $x = x_1 + \dots + x_p$  mais les familles  $e^i$  étant génératrices de  $E_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $x_i = \sum_{v \in e^i} \alpha_v v$  et donc  $x = \sum_{i=1}^p \sum_{v \in e^i} \alpha_v v = \sum_{v \in e} \alpha_v v$ .

$\Leftarrow$  Supposons réciproquement que  $e = e^1 \cup \dots \cup e^p$  est une base de  $E$ . Alors

$$\dim E = \text{Card}(e) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(e^i) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

et donc, d'après le théorème précédent, la somme  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  est directe et égale à  $E$ .

**Remarque 1.6** Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  et si  $E$  est de dimension finie alors il existe toujours une base de  $E$  adaptée à la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ . En effet, il suffit de considérer, pour chaque  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  une base  $e^i$  de  $E_i$  (qui existe car  $E_i$  est de dimension finie). Alors d'après le théorème ??, la réunion  $e$  des bases  $e^i$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  est une base de  $E$  qui, par construction, est adaptée à la somme directe.

## 1.2 Matrices par blocs et sous-espaces stables

**DÉFINITION 1.5 ★ Sous-espace stable par un endomorphisme**

Soit un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  et un sous-espace vectoriel  $F \subset E$ . On dit que le sev  $F$  est *stable* par  $u$  si et seulement si :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

ce qui est équivalent à dire que  $u(F) \subset F$ .

**Remarque 1.7** On dit aussi que  $u$  *stabilise*  $F$ .

**Remarque 1.8**

- En particulier, pour tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont stables par  $u$ .
- Certains endomorphismes n'ont pas d'autre sev stable, par exemple les rotations vectorielles du plan.
- À l'inverse, une homothétie vectorielle stabilise n'importe quel sev de  $E$ . On démontre dans l'exercice ?? que cette propriété caractérise les homothéties.

**LEMME 1.14 ★ Endomorphismes qui commutent**

Soient deux endomorphismes  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$  qui commutent :  $u \circ v = v \circ u$ . Alors  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont stables par  $v$ .

**Démonstration**

- Montrons que  $v(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$ . Soit  $x \in \text{Ker } u$  alors comme  $u$  et  $v$  commutent,  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$  donc  $v(x) \in \text{Ker } u$  et donc  $\text{Ker } u$  est stable par  $v$ .
- Montrons que  $v(\text{Im } u) \subset \text{Im } u$ . Soit  $y \in \text{Im } u$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  donc  $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im } u$ . Donc  $\text{Im } u$  est bien stable par  $v$ .

**PROPOSITION 1.15 ★ Restriction d'un endomorphisme à un sev stable**

Si  $F \subset E$  est un sous-espace stable par un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la restriction de  $u$  à  $F$  notée  $u|_F$  définit un endomorphisme de  $F$  :

$$u|_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$$

**Démonstration** C'est immédiat, la linéarité de  $u|_F$  provient directement de celle de  $u$  sur  $E$ .

**THÉORÈME 1.16 ★★★ Caractérisation matricielle d'un sev stable**

On suppose que  $E$  est un espace de dimension finie  $n$ , que  $F \subset E$  est un sev de dimension  $1 \leq p \leq n$ . On considère une base de  $F$  de la forme  $e' = (e_1, \dots, e_p)$  que l'on complète en une base de  $E$  :  $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Alors  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ .

**Démonstration**

- $\Rightarrow$  Si  $F$  est stable pour  $u$ , les vecteurs images par  $u$  de ceux de la famille  $e' = (e_1, \dots, e_p)$  se décomposent encore dans  $e'$  d'où la forme de la matrice.
- $\Leftarrow$  Réciproquement, si  $u$  admet une telle matrice dans la base  $e$  alors les vecteurs  $u(e_1), \dots, u(e_p)$  se décomposent dans  $e'$  et donc  $F$  est stable par  $u$ .

**Remarque 1.9** On dit qu'une telle matrice est *triangulaire par blocs*. Son déterminant vaut  $\det(A) \times \det(C)$ .

**THÉORÈME 1.17 ★ Somme directe de sous-espaces stables**

Soient  $E$  un espace de dimension finie et des sev  $F_1, \dots, F_p$  en somme directe :

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

On considère une base  $e$  adaptée à cette somme directe. Soit un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors chaque sev  $F_i$  est stable par  $u$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans la base  $e$  est *diagonale par blocs* :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbb{O} \\ & A_2 & \\ \mathbb{O} & & \ddots \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

où  $A_j$  est une matrice carrée de taille  $\dim F_j$ .

**Démonstration** Par récurrence sur  $p$ .

**Remarque 1.10** Reprenons les définitions de la proposition précédente et supposons que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\dim F_i = 1$  alors la matrice de  $u$  dans la base  $e$  adaptée à la somme directe  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  est diagonale :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbb{O} & & \ddots \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ . Prenant un peu d'avance sur le prochain chapitre d'algèbre linéaire, indiquons qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  de dimension 1 stable pour  $u$  est un cas particulier de sous-espace propre de  $u$ .

r

**THÉORÈME 1.18 ★ Produit par blocs**

Soient des matrices  $A, A' \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $D, D' \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ ,  $B, B' \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $C, C' \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ . On calcule « par blocs » le produit matriciel des matrices  $(p+q) \times (p+q)$  :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

On peut généraliser ce calcul à d'autres découpages par blocs, à condition que les tailles des différentes matrices soient compatibles avec le produit matriciel.

**Démonstration** Il faut revenir à la définition du produit matriciel et vérifier les différentes relations.

## 1.3 Déterminants

### 1.3.1 Déterminants par blocs

**PROPOSITION 1.19 ★★★ Formule du déterminant par blocs**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$  deux matrices carrées et  $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$  une matrice rectangulaire. On définit la matrice carrée par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

On sait calculer un déterminant avec un bloc de zéros en bas à gauche :

$$\det(M) = \det(A) \det(C)$$

522102951

**Démonstration**

On effectue le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}.$$

En développant successivement selon les colonnes  $C_1, \dots, C_p$ , on calcule facilement

$$\det \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} = \det(C).$$

et en développant successivement selon les lignes  $L_{n-p+1}, \dots, L_n$ , on calcule facilement

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A).$$

Il suffit ensuite d'utiliser que le déterminant du produit de deux matrices carrées est le produit de leurs déterminants.

522103113

**Remarque 1.11** Attention à ne pas utiliser d'autres formules que celle du théorème. Par exemple, si  $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , en général  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \dots$

**PROPOSITION 1.20 ★ Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & \ddots & A_{p-1,p} \\ & & & A_{p,p} \end{pmatrix} = \det(A_{1,1}) \times \dots \times \det(A_{p,p}).$$

**Démonstration** Par une récurrence simple sur  $p$

**Exemple 1.3** Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ , Formons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

Pour calculer son déterminant, essayons de faire apparaître un bloc de zéros en bas à gauche.

1. Si  $d \neq 0$ , en effectuant les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes :  $C_1 \leftarrow C_1 - \frac{c}{d}C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - \frac{c}{d}C_{2n}$ , on obtient

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} (a - \frac{bc}{d})I_n & bI_n \\ 0_{n,n} & dI_n \end{pmatrix} = (a - \frac{bc}{d})^n d^n = (ad - bc)^n.$$

2. Si  $d = 0$ , le déterminant à calculer s'écrit

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Amenons le bloc de zéros à gauche en effectuant les opérations suivantes sur les colonnes :  $C_1 \leftrightarrow C_{n+1}, \dots, C_n \leftrightarrow C_{2n}$ . On obtient

$$\det(M) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} bI_n & aI_n \\ 0_{n,n} & cI_n \end{pmatrix} = (-1)^n b^n c^n.$$

Dans les deux cas, on obtient que  $\det(M) = (ad - bc)^n$ .

### 1.3.2 Déterminant de Vandermonde

**THÉORÈME 1.21 ★ Calcul d'un déterminant de Vandermonde**

Soient  $n$  scalaires  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant  $n \times n$  :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

En particulier, la matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires  $(a_1, \dots, a_n)$  sont distincts.

**Démonstration** On propose deux preuves :

**Preuve 1** Il suffit d'exécuter l'opération sur les colonnes  $C_i \leftarrow C_i - (a_n \times C_{i-1})$ , en partant de  $i = n$  et en remontant jusqu'à  $i = 2$ .

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ 1 & a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la dernière ligne, il vient :

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}.$$

Soit

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Par récurrence immédiate,

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

**Preuve 2** On effectue une récurrence sur la taille  $n \in \mathbb{N}^*$  du déterminant. La formule est trivialement vraie pour un déterminant de taille 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . On suppose la formule vraie au rang  $n - 1$  et on la montre au rang  $n$ . Il s'agit de calculer

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si au moins deux parmi les coefficients  $a_1, \dots, a_n$  sont égaux alors ce déterminant est nul ainsi que  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$  donc on a bien égalité. On suppose dans la suite que les complexes  $a_1, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts.

Remplaçons le scalaire  $a_n$  par une variable  $x$ . Le déterminant s'écrit alors :

$$V(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si on le développe relativement à la dernière colonne, on observe que  $V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$  est un polynôme de degré  $n - 1$  en  $x$ . De plus,  $a_1, \dots, a_{n-1}$  sont des racines deux à deux distinctes de ce polynôme. On peut alors le factoriser en  $V(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \alpha(x - a_1) \dots (x - a_{n-1})$ . Le coefficient du terme dominant est le terme devant  $x^{n-1}$  quand on développe le déterminant par rapport à la dernière colonne, c'est-à-dire  $\alpha = V(a_1, \dots, a_{n-1})$  qu'on sait calculer grâce à l'hypothèse de récurrence. On obtient alors le résultat en prenant  $x = a_n$  et en appliquant la relation de récurrence. On prouve ainsi la formule par récurrence.

## 1.4 Matrices semblables et trace

### 1.4.1 Trace d'une matrice carrée

**DÉFINITION 1.6** ★ **Trace d'une matrice carrée**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. On appelle trace de  $A$  et on note  $\text{Tr}(A)$ , le scalaire :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

**Remarque 1.12** La trace de  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est égale à la somme des éléments diagonaux de  $A$ .

**PROPOSITION 1.22 ★ Propriétés de la trace**

- L'application  $\text{Tr} : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ A & \longmapsto \text{Tr}(A) \end{cases}$  est une forme linéaire. En particulier, si  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  et si  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $\boxed{\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)}$ .
- $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \boxed{\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)}$ .
- $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$

**Démonstration**

- La linéarité de la trace est laissée en exercice.
- Soient  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ . On a :  $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \right)$  et  $\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{i,k} \right)$  et ces deux quantités sont bien égales.
- L'opération de transposition laisse invariante la diagonale d'une matrice donc aussi sa trace.

**1.4.2 Matrices semblables**

**DÉFINITION 1.7 Matrices semblables**

Deux matrices carrées  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $A = P^{-1}BP$ .

**Remarque 1.13** Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

**Remarque 1.14** La relation de similitude sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est une relation d'équivalence.

**Remarque 1.15** La matrice identité n'est semblable qu'à elle-même...

**PROPOSITION 1.23 Deux matrices semblables ont même rang.**

Si  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sont deux matrices semblables alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

**Démonstration** On effectue, on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible.

**PROPOSITION 1.24 Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant**

Si  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sont deux matrices semblables alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$  et  $\det(A) = \det(B)$ .

**Démonstration** Comme  $A$  et  $B$  sont semblables alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $A = P^{-1}BP$ . On utilise alors les propriétés de la trace :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}BP) = \text{Tr}(P^{-1}PB) = \text{Tr}(B).$$

La preuve est la même pour le déterminant en utilisant que le déterminant d'un produit de deux matrices est le produit des déterminants de ces deux matrices.

Cette proposition permet de donner un sens à la définition suivante :

**DÉFINITION - PROPOSITION 1.8 ★ Trace d'un endomorphisme**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . On définit la *trace de  $u$*  qu'on note  $\text{Tr } u$  comme étant la trace de la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ . Cette quantité est bien indépendante de la base choisie.

**Démonstration** Soient  $e$  et  $e'$  deux bases de  $E$ . Alors avec  $P = P_{e \rightarrow e'}$ , on a

$$\text{Mat}_{e'}(u) = P_{e' \rightarrow e} \times \text{Mat}_e(u) \times P_{e \rightarrow e'}.$$

Autrement dit  $\text{Mat}_{e'}(u)$  et  $\text{Mat}_e(u)$  sont semblables et leurs traces sont les mêmes.

**1.5 Matrices équivalentes (Hors programme)**

**THÉORÈME 1.25 ★ Caractérisation du rang d'une matrice comme équivalente à  $J_r$  (HP)**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ . On a :  $A$  est une matrice de rang  $r$  si et seulement si il existe  $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = QJ_rP$  où

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & \leftarrow 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Démonstration**

⇒ Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p, e une base de E, F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q et f une base de F. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  l'unique application linéaire de E dans F telle que  $\text{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = A$ . On a :  $\text{rg } u = \text{rg } A = r$ . Faisant comme dans la démonstration du théorème ??, on peut décomposer E en la somme :  $E = \text{Ker } u \oplus G$  où G est un sous-espace de E tel que  $u|_G : G \rightarrow \text{Im } u$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $\dim G = \dim \text{Im } u = \text{rg } u = r$ . Soit  $(e'_1, \dots, e'_r)$  une base de G et  $(e'_{r+1}, \dots, e'_p)$  une base de  $\text{Ker } u$ .  $e' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p)$  est donc une base de E et l'image d'une base d'un espace vectoriel par un isomorphisme étant une base de l'espace vectoriel d'arrivée,  $(u(e'_1), \dots, u(e'_r))$  est une base de  $\text{Im } u$  qu'on peut compléter en une base  $f' = (u(e'_1), \dots, u(e'_r), f'_{r+1}, \dots, f'_q)$  de F. On a :  $\text{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = J_r$  et utilisant les formules de changement de base, on a :

$$A = \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = P_{f \rightarrow f'} \times \text{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) \times P_{e' \rightarrow e}$$

qui est de la forme voulue.

⇐ Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q. Soit e une base de E, f une base de F et :  
 —  $e'$  une autre base de E telle que  $P_{e' \rightarrow e} = P$ .  
 —  $f'$  une autre base de F telle que  $P_{f' \rightarrow f} = Q$ .  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que :  $\text{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = J_r$ . Interprétant la formule  $A = QJ_rP$  comme une formule de changement de base, on a :  $A = \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$ . Par conséquent :  $\text{rg } A = \text{rg } u = \text{rg } J_r$ .

**COROLLAIRE 1.26 ★ Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée**  
 Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ ,  $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$ .

**Démonstration** Posons  $r = \text{rg } A$ . En appliquant la proposition précédente, il existe  $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = QJ_rP$ . Par conséquent :  $A^T = P^T J_r^T Q^T = P^T J_r Q^T$  et  $P^T \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ ,  $Q^T \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$ . Par conséquent, appliquant à nouveau la proposition précédente :  $\text{rg } A^T = r$ .

**DÉFINITION 1.9 Matrices équivalentes**  
 Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$  sont dites *équivalentes* si et seulement si il existe deux matrices inversibles  $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = QBP^{-1}$ .

**Remarque 1.16** Un corollaire du théorème précédent est que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

## 1.6 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

### 1.6.1 Polynômes d'endomorphismes

**DÉFINITION 1.10 ★ Polynôme d'un endomorphisme**  
 Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E.  
 — Pour  $k \in \mathbb{N}$ , le *k-ième itéré* de  $u$  est l'endomorphisme  $u^k$  de E défini par :

$$\begin{cases} u^0 = \text{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u \circ u^k \end{cases}$$

— Pour un polynôme  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on considère  $\sum_{k=0}^p a_k u^k$  qu'on appelle *polynôme de l'endomorphisme u* et qu'on note  $P(u)$ .

**PROPOSITION 1.27 Les polynômes d'endomorphisme sont des endomorphismes**  
 Tout polynôme d'un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Démonstration** En effet,  $\mathcal{L}(E)$  a une structure d'algèbre et est donc stable par combinaison linéaire et composition.

**PROPOSITION 1.28 ★ Opérations algébriques sur les polynômes d'endomorphisme**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Alors :

- $(\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

**Démonstration** La première égalité est facile. Pour la seconde, on écrit  $P$  et  $Q$  sous la forme  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ ,  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$  quitte à poser  $a_k = 0$  si  $k > \deg P$  et  $b_k = 0$  si  $k > \deg Q$ . On obtient alors :

$$(PQ)(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k+l=n} a_k u^k \circ (b_l u^l) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k \right) \circ \left( \sum_{l=0}^{+\infty} b_l u^l \right) = P(u) \circ Q(u)$$

**COROLLAIRE 1.29**

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  alors  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent :

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

**Démonstration** C'est une conséquence directe de la proposition précédente et de la commutativité du produit des polynômes. En effet

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

**Remarque 1.17** En particulier, tout endomorphisme polynomial en  $u$  commute avec  $u$ .

**DÉFINITION 1.11 ★★★ Polynôme annulateur d'un endomorphisme**

On appelle *polynôme annulateur d'un endomorphisme*  $u \in \mathcal{L}(E)$  tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(u) = 0$ .

**Remarque 1.18** Tout endomorphisme admet au moins un polynôme annulateur : le polynôme nul !

**PROPOSITION 1.30 ★ En dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . Alors il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  **non nul** tel que  $P(u) = 0$ .

**Démonstration** En effet si  $E$  est de dimension finie alors  $\mathcal{L}(E)$  aussi et la famille  $(u^k)_{k \in [0, p]}$  est forcément liée pour  $p$  assez grand. Il existe donc  $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$  non tous nuls tels que  $\sum_{k=0}^p a_k u^k = 0$ . On a donc bien  $P(u) = 0$  avec  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ .

**PROPOSITION 1.31 ★ Ker  $P(u)$  est stable par  $u$**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  alors  $\text{Ker } P(u)$  est stable par  $u$ .

**Démonstration** Comme  $P(u)$  et  $u$  commutent, par application de la proposition 1.14,  $\text{Ker } P(u)$  est stable par  $u$ .

**Application 1.4 Application au calcul de l'inverse d'un automorphisme**

Soit  $u \in \text{GL}(E)$  un endomorphisme inversible et soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme annulateur de  $u$  de degré  $n$  (donc  $a_n \neq 0$ ).

On note  $m$  le plus petit indice  $k \in [0, n]$  tel que  $a_k \neq 0$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} P(u) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=m}^n a_k u^k &= 0 \\ \Rightarrow u^m \circ \left( \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} u^k \right) &= 0 \\ \Rightarrow a_m \text{id}_E + a_{m+1} u + \dots + a_n u^{n-m} &= 0 \text{ car } u \text{ est inversible} \\ \Rightarrow -\frac{1}{a_m} (a_{m+1} u + \dots + a_n u^{n-m}) &= \text{id}_E \\ \Rightarrow u \circ \left( -\frac{1}{a_m} (a_m \text{id}_E + a_{m+1} u + \dots + a_n u^{n-m}) \right) &= \text{id}_E. \end{aligned}$$

On pose  $P(u) = -\frac{1}{a_m}(a_m \text{id}_E + a_{m+1}u + \dots + a_n u^{n-m})$ . Comme  $u$  et  $P(u)$  commutent, on a aussi  $P(u) \circ u = \text{id}$ .

Ainsi  $u^{-1} = -\frac{1}{a_m}(a_m \text{id}_E + a_{m+1}u + \dots + a_n u^{n-m})$ .

Comme tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non trivial, on a aussi prouvé :

**PROPOSITION 1.32 ★ En dimension finie, l'endomorphisme inverse d'un endomorphisme inversible est polynomial en cet endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in \text{GL}(E)$  un endomorphisme inversible de  $E$ . Alors il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $u^{-1} = P(u)$ .

### Application 1.5 Application au calcul des puissances d'un endomorphisme

Soit  $u \in \text{GL}(E)$  un endomorphisme inversible et soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme annulateur de  $u$  de degré  $n$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

Par théorème de division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$  tel que  $X^m = PQ + R$  et  $\deg(R) \leq n-1$  c'est-à-dire  $R = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ . Alors :

$$u^m = P(u)Q(u) + R(u) = R(u)$$

et calculer  $u^m$  revient à calculer les coefficients  $a_0, \dots, a_m$  de  $R$ .

Pour ce faire, on peut utiliser la relation  $X^m = PQ + R$  et l'évaluer en les racines de  $P$  ou la dériver.

## 1.6.2 Polynômes de matrices carrées

**DÉFINITION 1.12 ★★★ Polynôme de matrice**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. Pour un polynôme  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on considère  $\sum_{k=0}^p a_k A^k$  qu'on appelle *polynôme de la matrice*  $A$  et qu'on note  $P(A)$ .

**PROPOSITION 1.33 ★ Lien entre les polynômes de matrices et les polynômes d'endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ . Soient  $e$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Alors

$$P(\text{Mat}_e(u)) = \text{Mat}_e(P(u)).$$

**Démonstration** C'est une conséquence directe du fait que

$$\theta: \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto \text{Mat}_e(u) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre, c'est à dire que la matrice d'une combinaison linéaire (resp. du produit) de deux endomorphismes est la combinaison linéaire (resp. le produit) de ces deux matrices et que la matrice de l'identité  $\text{id}_E$  est la matrice identité  $I_n$ .

Les opérations algébriques précédentes sur les polynômes d'endomorphisme restent vraies pour les polynômes de matrice.

**PROPOSITION 1.34 ★ Opérations algébriques sur les polynômes de matrices**

Soient  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Alors :

- $(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$
- $(PQ)(A) = P(A) \circ Q(A)$

**PROPOSITION 1.35 ★ Polynômes de matrices semblables**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables. Il existe alors  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ . Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . Alors

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1}.$$

**Démonstration** Cela découle facilement du fait que  $A^k = PB^kP^{-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**DÉFINITION 1.13 ★★★ Polynôme annulateur d'une matrice**

On appelle *polynôme annulateur d'une matrice*  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  tout polynôme  $P$  tel que  $P(A) = 0$ .

## 1.7 Interpolation de Lagrange

**THÉORÈME 1.36 ★★★★★ Interpolation de Lagrange**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $n + 1$  scalaires  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$   $n$  scalaires *distincts*. On considère l'application

$$u: \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

1. L'application  $u$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Étant donnés  $n+1$  scalaires  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $P(a_0) = b_0, \dots, P(a_n) = b_n$ .

**Démonstration** On vérifie facilement que  $u$  est linéaire. Si  $P \in \text{Ker } u$  alors  $a_0, \dots, a_n$  sont  $n + 1$  racines distinctes de  $P$  qui est de degré au plus  $n$ . Donc forcément  $P = 0$  et  $u$  est injective.

Comme  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathbb{K}^{n+1}$  sont de même dimension,  $u$  est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Remarque 1.19 Lien avec le déterminant de Vandermonde** Munissons  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathbb{K}^{n+1}$  de leurs bases canoniques respectives  $e = (1, X, \dots, X^n)$  et  $\varepsilon = (e = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$  avec  $\varepsilon_i$  est le  $n + 1$ -uplet de  $\mathbb{K}^n$  dont tous les coefficients sont nuls sauf le  $i$ -ème qui vaut 1. Alors  $\det(\text{Mat}_{\varepsilon \leftarrow e}(u)) = V(a_0, \dots, a_n)$  et on retrouve que  $u$  est inversible si et seulement si les scalaires  $a_0, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts.

**PROPOSITION 1.37 ★ Polynômes d'interpolation de Lagrange**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $n + 1$  scalaires  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  *distincts*.

1.  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$  vérifiant

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(a_j) = \delta_{ij}$$

2. La famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
3. Soient  $n + 1$  scalaires  $(b_0, \dots, b_n)$ , il existe un unique polynôme  $L \in \mathbb{K}_n[X]$  vérifiant  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(a_i) = b_i$  :

$$L = \sum_{i=0}^n b_i \prod_{j \neq i} \underbrace{\frac{X - a_j}{a_i - a_j}}_{L_i}$$

**Démonstration**

1. Le premier point est une conséquence du théorème précédent.

2. Soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0$ . Alors en évaluant en  $a_i$  avec  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on trouve que  $\alpha_i = 0$ . Ainsi  $(L_0, \dots, L_n)$  est libre. Comme cette famille est de cardinal  $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

3. Le polynôme  $\prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$  satisfait aux conditions de 1. donc par unicité il est égal à  $L_i$ .

Le polynôme  $L$  donné satisfait bien les relations  $L(a_i) = b_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On sait qu'il est alors unique par le théorème précédent.

**Remarque 1.20** Le polynôme 1 s'écrit alors de façon unique  $1 = \sum_{i=0}^n b_i L_i$  avec  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ . Il vient alors que  $1 = b_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  c'est-à-dire que  $\sum_{i=0}^n L_i = 1$ .

On a ainsi prouvé que :

PROPOSITION 1.38 ★  $\sum_{i=0}^n L_i = 1$

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange vaut 1 :

$$\sum_{i=0}^n L_i = 1$$

## 1.8 Projecteurs et symétries (Rappels de première année)

$E$  désigne là encore un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### 1.8.1 Projecteurs

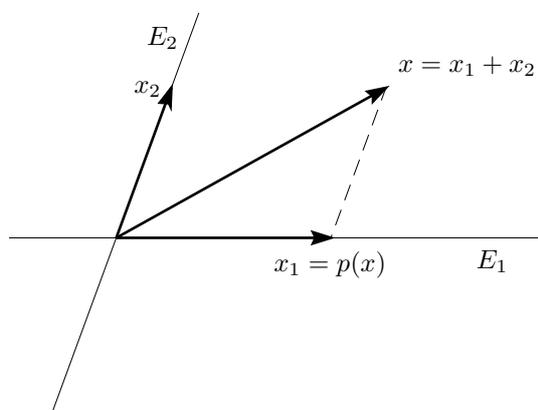


FIGURE 1.2 – Projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$

DÉFINITION 1.14 ★ **Projecteurs**

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  :  $E = E_1 \oplus E_2$ . Pour tout  $x \in E$ , il existe donc un unique couple  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  tel que  $x = x_1 + x_2$ . Soit

$$p: \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto x_1 \end{cases}$$

L'application  $p$  est bien définie et est appelée *projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$* .

PROPOSITION 1.39 ★ **Propriétés des projecteurs**

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  :  $E = E_1 \oplus E_2$  et soit  $p$  le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  alors :

- 1  $p$  est linéaire :  $p \in \mathcal{L}(E)$ .
- 2  $\text{Ker } p = E_2$ .
- 3  $\text{Im } p = E_1$ .
- 4  $p(x) = x \iff x \in E_1$  ( $E_1$  est l'ensemble des vecteurs invariants par  $p$ ).

**Démonstration**

- 1 Soient  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$  et  $x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$  ainsi que deux scalaires  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\alpha x + \alpha' x' = \underbrace{(\alpha x_1 + \alpha' x'_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + \alpha' x'_2)}_{\in E_2} \in E_1 \oplus E_2.$$

et :

$$\begin{aligned} p(\alpha x + \alpha' x') &= \alpha x_1 + \alpha' x'_1 \\ &= \alpha p(x) + \alpha' p(x') \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $p$  est linéaire.

- 2 Soient  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ . On a :

$$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in E_2.$$

Par conséquent :  $\text{Ker } p = E_2$ .

- 3 Soient  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ . On a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Im } p &\iff \exists x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 : x = p(x') \\ &\iff x = x'_1 \in E_1 \\ &\iff x \in E_1. \end{aligned}$$

Donc  $\text{Im } p = E_1$ .

- 4 Soit  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ . On a :

$$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x \in E_1$$

**PROPOSITION 1.40 ★ Caractérisation des projecteurs**

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $p$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$  (c'est-à-dire si et seulement si  $p$  est idempotente).

Dans ce cas,  $p$  est le projecteur sur  $\text{Ker } p$  parallèlement à  $\text{Im } p$ .

**Démonstration**

$\Rightarrow$  Si  $p$  est un projecteur et si  $x \in E$ , alors en appliquant la proposition précédente,  $p(x) \in E_1$  et comme  $E_1$  est stable par  $p$ ,  $p(p(x)) = p(x)$ . Donc  $p \circ p = p$ .

$\Leftarrow$  Réciproquement, si  $p$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $p \circ p = p$  : posons  $E_1 = \text{Im } p$  et  $E_2 = \text{Ker } p$  et montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$ .

— Soit  $x \in E_1 \cap E_2$ . Alors, on a à la fois  $p(x) = 0$  car  $x \in E_2 = \text{Ker } p$  et  $x = p(x')$  où  $x' \in E$  car  $x \in E_1 = \text{Im } p$ . Par conséquent :  $0 = p(x) = p(p(x'))$ . Mais comme  $p \circ p = p$ , on a  $p(p(x')) = p(x') = x$  et donc  $x = 0$ , ce qui prouve que  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe.

— Soit  $x \in E$ . On a :

$$x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{=x_2}$$

et  $x_1 \in E_1$  (car  $x_1 = p(x) \in \text{Im } p$ ) et  $x_2 \in E_2$  (car  $p(x_2) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ ). Par conséquent :  $E = E_1 + E_2$

Donc  $E = E_1 \oplus E_2$ . Si  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ , comme  $x_1 \in E_1$ ,  $p(x_1) = x_1$  et comme  $x_2 \in E_2$ ,  $p(x_2) = 0$ . Par linéarité de  $p$ ,  $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$ .  $p$  est donc bien le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ .

**PROPOSITION 1.41 ★**

Si  $E = E_1 \oplus E_2$ , si  $p$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  et si  $q \in \mathcal{L}(E)$  alors on a équivalence entre :

- 1  $q$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$ .

2  $p + q = \text{id}_E$ .

**Démonstration**

— Supposons que  $q$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$ . Si  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$  alors  $p(x) = x_1$  et  $q(x) = x_2$ . Donc  $x = p(x) + q(x)$  et on a bien  $p + q = \text{id}_E$ .

— Réciproquement, si  $p + q = \text{id}_E$  et si  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$  alors  $q(x) = x - x_1 = x_2$  donc  $q$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$ .

La proposition suivante est fort utile dans les exercices :

**PROPOSITION 1.42 ★ Trace d'un projecteur**

Soit  $p$  un projecteur d'un espace  $E$  de dimension finie. Alors  $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

**Démonstration** Comme  $p$  est un projecteur, on a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ . Donc la matrice de  $p$  dans une base adaptée à cette complémentarité est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

où  $m = \dim \text{Im } p = \text{rg}(p)$ . Donc  $\text{Tr}(p) = m = \text{rg}(p)$ .

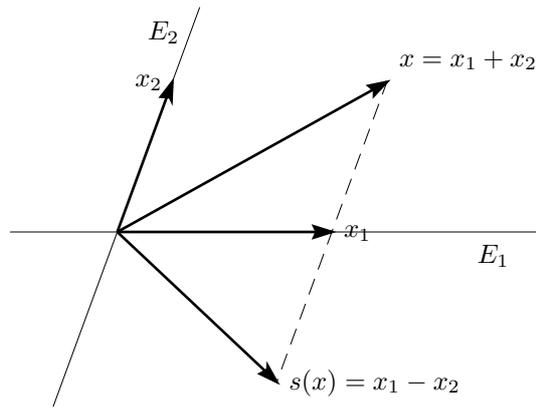


FIGURE 1.3 – Symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$

## 1.8.2 Symétries

### DÉFINITION 1.15 ★ Symétries

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  :  $E = E_1 \oplus E_2$ . Pour tout  $x \in E$ , il existe donc un unique couple  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  tel que  $x = x_1 + x_2$ . Soit

$$s : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto x_1 - x_2 \end{cases}$$

$s$  est bien définie et est appelée *symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$* , ou plus simplement *symétrie*.

### PROPOSITION 1.43 ★ Propriétés des symétries

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  :  $E = E_1 \oplus E_2$  et soit  $s$  la symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ , alors :

- 1 L'application  $s$  est linéaire :  $s \in \mathcal{L}(E)$ .
- 2 Si  $p$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  alors  $s = 2p - Id_E$ .
- 3  $s$  est *involutive*, c'est-à-dire :  $s \circ s = Id_E$ .

**Démonstration** Soit  $p$  le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ . Soit  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ . On a :  $p(x) = x_1$  et

$$(2p - Id_E)(x) = 2p(x) - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$$

ce qui démontre le second point. Comme  $p$  est linéaire et qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire,  $s$  est linéaire et le premier point est aussi démontré. Enfin, en utilisant la linéarité et l'idempotence de  $p$  :

$$\begin{aligned} s \circ s &= (2p - Id_E) \circ (2p - Id_E) \\ &= 2p \circ (2p - Id_E) - (2p - Id_E) \\ &= 4p^2 - 2p - 2p + Id_E \\ &= 4p - 4p + Id_E \\ &= Id_E \end{aligned}$$

et le troisième point est démontré.

### PROPOSITION 1.44 ★ Caractérisation des symétries

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $s$  est involutive, c'est-à-dire si  $s \circ s = Id_E$ , alors  $s$  est la symétrie par rapport à  $E_1 = \text{Ker}(s - Id_E)$  et parallèlement à  $E_2 = \text{Ker}(s + Id_E)$ .

**Démonstration** Supposons que  $s$  est linéaire et involutive. Posons  $E_1 = \text{Ker}(s - Id_E)$  et  $E_2 = \text{Ker}(s + Id_E)$ . Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- Soit  $x \in E_1 \cap E_2$ . On a donc :  $s(x) - x = 0$  et  $s(x) + x = 0$ . Soustrayant ces deux égalités, on obtient  $x = 0$ , donc  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe

— Soit  $x \in E$ . On a :

$$x = \underbrace{-\frac{1}{2}(s(x) - x)}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(s(x) + x)}_{\in E_2}$$

et donc  $E = E_1 + E_2$ .

On en déduit que  $E = E_1 \oplus E_2$ . De plus, si  $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$  alors : comme  $x_1 \in E_1$ , on a :  $s(x_1) = x_1$  et comme  $x_2 \in E_2$ , on a aussi :  $s(x_2) = -x_2$ . Par linéarité de  $s$ , on en déduit que :  $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$ . L'application  $s$  est donc bien la symétrie par rapport à  $E_1$  et parallèlement à  $E_2$

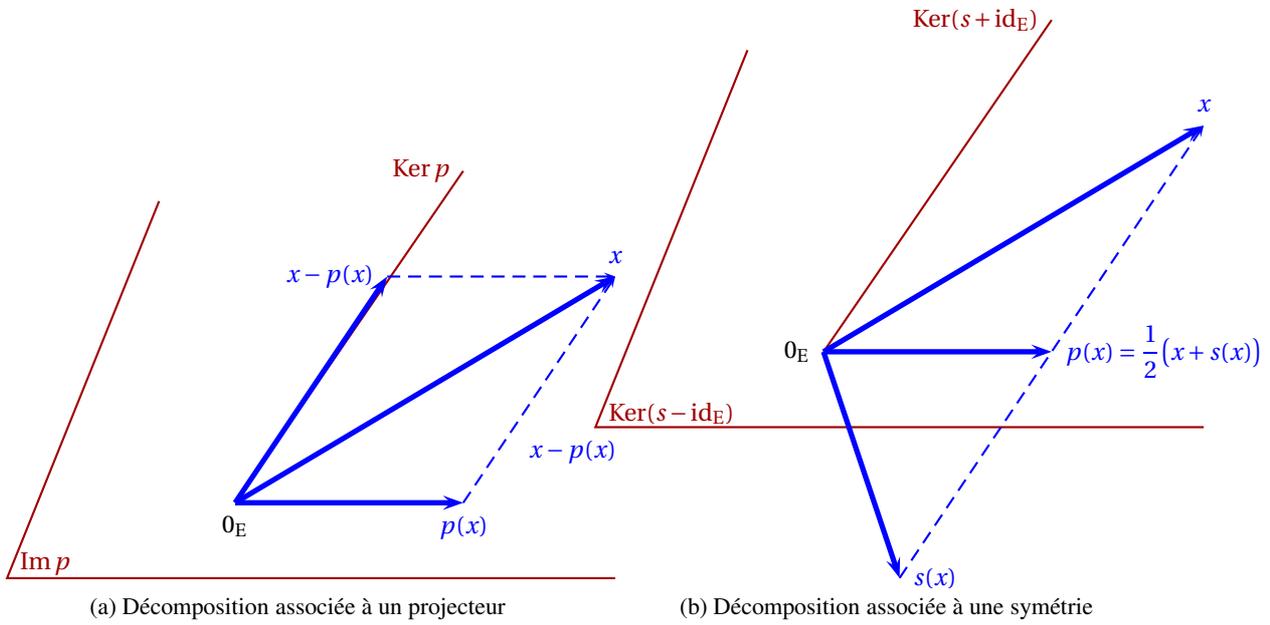


FIGURE 1.4 – Projecteur, symétrie

projecteur

## 1.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes HORS PROGRAMME

### DÉFINITION 1.16 ★★★ Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence d'un endomorphisme

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit *nilpotent* s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u^k = 0$ . Le plus petit entier  $p$  tel que  $u^p = 0$  est appelé *l'indice de nilpotence* de l'endomorphisme  $u$ . On dit aussi que  $u$  est  *$p$ -nilpotent*.

#### Remarque 1.21

- L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est bien défini car toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.
- Comme  $u^0 = \text{id}$ , l'indice de nilpotence est un entier strictement positif.
- Un endomorphisme nilpotent  $u$  n'est pas injectif. En effet, si  $p > 0$  est l'indice de nilpotence de  $u$  alors il existe  $x_0 \in E$  tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ . Mais  $u(u^{p-1}(x_0)) = 0$  donc  $u^{p-1}(x_0)$  est un vecteur non nul de  $\text{Ker } u$  et  $u$  ne peut être injectif.

### DÉFINITION 1.17 ★★★ Matrice nilpotente, indice de nilpotence d'une matrice

Une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *nilpotente* s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $A^k = 0$ . Le plus petit entier  $p$  tel que  $A^p = 0$  est appelé *l'indice de nilpotence* de la matrice  $A$ .

#### Remarque 1.22

- Une matrice est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est nilpotent.
- Toute matrice semblable à une matrice nilpotente est nilpotente.

### PROPOSITION 1.45 ★ Famille libre remarquable associée à un endomorphisme nilpotent

Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  d'indice  $p$ . Alors il existe  $x_0 \in E$  tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ . De plus,  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre.

**Démonstration** Soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$ . On applique  $u^{p-1}$  à cette égalité. Il reste  $\alpha_0 u^{p-1}(x_0) = 0$  soit  $\alpha_0 = 0$ . On recommence en appliquant successivement  $u^{p-2}, \dots, u$  et on montre ainsi que  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$ . La famille est donc bien libre.

### COROLLAIRE 1.46 ★ L'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est plus petit que $n$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$  d'indice  $k$  alors  $k \leq n$ .

**Démonstration** En effet, le cardinal d'une famille libre est toujours  $\leq$  à celui d'une famille génératrice.

### COROLLAIRE 1.47 ★ Un endomorphisme nilpotent $u$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n$ vérifie $u^n = 0$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$  alors  $u^n = 0$ .

**Démonstration** C'est une conséquence directe du corollaire précédent.

### PROPOSITION 1.48 ★ Endomorphisme $n$ -nilpotent

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- l'endomorphisme  $u$  est  $n$ -nilpotent.
- Il existe une base  $e$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 0_{1,1} \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}.$$

#### Démonstration

- $\Rightarrow$  Il suffit de considérer la base  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  avec  $x_0 \in E$  tel que  $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ .  
 $\Leftarrow$  La matrice est  $n$ -nilpotente (calculs par blocs) donc l'endomorphisme associé aussi.

## 1.10 L'essentiel

1. Comprendre la définition d'une famille libre.
2. Attention à la confusion entre sous-espaces *supplémentaires* et *complémentaires*. Faire un dessin de deux droites vectorielles dans le plan.
3. Le théorème du rang est important.
4. Savoir démontrer l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange et savoir écrire rapidement son expression.
5. Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.
6. Comprendre la représentation matricielle d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire.
7. Les formules de changement de base sont à savoir écrire rapidement.
8. La formule  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$  est à connaître par coeur. Pour les calculs matriciels, choisir la technique la plus adaptée pour simplifier les calculs.
9. Bien comprendre la notion de matrice les notions de matrices *équivalentes* et *semblables*.
10. Travailler les exercices qui utilisent les matrices équivalentes et la matrice  $J_r$ .
11. Les propriétés du déterminant sont à connaître, en particulier la formule du déterminant par blocs.
12. La formule fondamentale entre matrice et comatrice.
13. Connaître l'expression d'un Vandermonde, des polynômes interpolateurs.
14. Savoir utiliser les polynômes d'endomorphisme et de matrice.