

Colle 8 du 30-01-2023 au 12-02-2023

CONTENUS		CAPACITÉS & COMMENTAIRES	
d) Loi d'une variable aléatoire discrète			
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.		La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.	
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.		On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.	
Variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:		On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.	
$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.		Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.	
		Relation $P(X > k) = (1 - p)^k$.	
		Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .	
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:		Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.	
$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.		Interprétation en termes d'événements rares.	
Couple de variables aléatoires discrètes.		Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.	
Loi conjointe, lois marginales.		Notation $P(X = x, Y = y)$.	
Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .		Extension aux n -uplets de variables aléatoires.	
e) Événements indépendants			
Indépendance de deux événements.		Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A B) = P(A)$.	
Indépendance d'une famille finie d'événements. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.		L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.	
f) Variables aléatoires indépendantes			
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.		Notation $X \perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.	
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.		Extension au cas de n variables aléatoires. On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.	
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp Y$, alors $f(X) \perp g(Y)$. Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.		Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli. Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.	
		Extension au cas de plus de deux coalitions.	

C - Espérance et variance

CONTENUS		CAPACITÉS & COMMENTAIRES	
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe			
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par		On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.	
$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$			
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X .		X est d'espérance finie si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .	
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation :		Variable centrée.	
$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$			
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.			
Formule de transfert :		On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n -uplets de variables aléatoires.	
$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :			
$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$			
Linéarité de l'espérance.			
Si $ X \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.			
Positivité, croissance de l'espérance.			
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.			
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :		Extension au cas de n variables aléatoires.	
$E(XY) = E(X)E(Y).$			
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance			
Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.			

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Variance, écart type.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Cas d'égalité.

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

Variable réduite.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$.

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La série entière définissant G_X est de rayon ≥ 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de G_X pour calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en

notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

1. Les démonstrations des différents résultats du cours seront parfaitement maîtrisées.
2. Les étudiants sauront faire bon usage des différentes lois usuelles
3. Le chapitre sur les espaces probabilisables est naturellement à revoir.
4. Il sera tout à fait opportun de revoir aussi le chapitre sur les séries numériques et le chapitre sur les séries entières.
5. Les techniques de résolution des récurrences linéaires seront aussi reprises.

1. Colle 8

2. Variables aléatoires discrètes

3. Variables aléatoires discrètes