

Colle 3 du 07-11-2022 au 20-11-2022

Intégrales sur un intervalle

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées;
- définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable;
- compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme;
- étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de \mathbb{R} .

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de \mathbb{R} .

Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable :

si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 , et si f est continue sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt$ et

$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a .

La démonstration n'est pas exigible.

L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si $\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations $\int_I f, \int_I f(t) dt$.

Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Théorème de comparaison :

pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .
- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g .

Fonctions de référence :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o(g(t))$.

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Théorème de continuité :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

Théorème de dérivation :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse

de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ pour $0 \leq j < k$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Les étudiants profiteront de ce chapitre pour très opportunément réviser :

1. Les limites et équivalents usuels;
 2. Les primitives et dérivées des fonctions usuelles.
 3. Le chapitre de sup d'intégration et en particulier :
 - (a) Le théorème fondamental de l'analyse;
 - (b) Les sommes de Riemann;
 - (c) Les intégrales de Bertrand
 - (d) Les différentes techniques de calcul de primitive.
 1. Colle 3
 2. Intégration sur un intervalle
 3. Intégration sur un intervalle
 4. fiche-series-numeriques
 5. fiche-suites-series-fcts
 6. Calcul différentiel
 7. Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
 8. fiche-series-numeriques
 9. fiche-suites-series-fcts
 10. fiche-integrales-parametre
-