Colle 6 du 02-01-2023 au 15-01-2023

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction à minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants. Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.
Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ sa somme $\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty[$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ de I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
- Une famille $(x_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i \in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leq y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i \in I}$ implique celle de $(x_i)_{i \in I}$.
En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers Ω , tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.

L'univers Ω n'est en général pas explicite.

Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$.

Notation $(X \geq x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

b) Probabilité

Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, σ -additivité.

Notation $P(A)$.

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.

Croissance de la probabilité.

Application : pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de

Continuité croissante, continuité décroissante.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \text{ et } P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Événement presque sûr, événement négligeable.

Système quasi-complet d'événements.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

L'application P_B définit une probabilité.

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

On rappelle la convention $P(B|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.

Formule de Bayes.

1. Les démonstrations des différentes formules du cours seront parfaitement maîtrisées.
2. Les étudiants savent modéliser l'expérience aléatoire consistant à jeter une infinité de fois un dé ou une pièce de monnaie.
3. Ils réviseront opportunément la résolution des récurrences linéaires d'ordres 1, 2 et plus (suites arithmético-géométriques, théorème de sup sur les récurrences linéaires d'ordre n , matrice compagnons et réduction appliquée aux relations de récurrence linéaire d'ordre quelconque).
4. Les chapitres de proba de première année seront révisés. On peut interroger sur les lois uniforme, de Bernoulli et binomiales.
5. **Révision de tous les programmes de colle précédents.**

1. Colle 6
 2. Probabilités sur un univers fini ou dénombrable
 3. Probabilités sur un univers fini ou dénombrable
-