Colle 1 du 26-09-2022 au 09-10-2022

Compléments d'algèbre linéaire, séries numériques

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$. Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. Déterminant de Vandermonde.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1. Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Les étudiants sauront redémontrer les différents résultats du cours, connaîtront les résultats sur les séries de Bertrand et les différentes propriétés des endomorphismes nilpotents (voir le cours). Il est opportun de revoir :

1. La fiche sur les limites et équivalents usuels ;
2. Le chapitre de sup sur les suites ;
3. Le chapitre de sup sur les séries.
4. Le chapitre de sup sur les développements limités.

Quelques documents pour l'année :
- Le colloscope et les groupes de colle
- Le trombinoscope

1. Colle 1
2. Compléments d'algèbre linéaire
3. Compléments d'algèbre linéaire
4. fiche-liaison-sup-spe
5. Séries numériques
6. Séries numériques
7. Probabilités sur un univers fini ou dénombrable
8. Équations différentielles et systèmes d'équations différentielles
9. fiche-inegalites-classiques