

Intégration sur un intervalle

4.0.1 Fonctions continues par morceaux, intégrale sur un segment

Exercice 4.0.1 ★

La fonction f définie sur $[-1, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 7 & \text{si } x = 1 \\ x^3 & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$$

est-elle continue par morceaux sur $[-1, 2]$?

Qu'en est-il si on remplace $1 - x$ par $\frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$?

Exercice 4.0.2 ★

On considère une fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = n$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = 1/n$ et $g(x) = 0$ sinon est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 4.0.3 ★

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$$

est constante et calculer sa valeur.

Exercice 4.0.4 ★ CCP MP

On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.

3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H .

4.0.2 Intégrales généralisées

Exercice 4.0.5 ★ En revenant à la définition

Étudier en revenant à la définition la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_{\pi}^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{t^2}\right) e^{it^2} dt;$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt;$
- $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} dt;$
- $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$

Exercice 4.0.6 ★

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$
- $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$
- $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

Exercice 4.0.7 ★

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt,$
- $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt,$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1},$
- $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} dt,$
- $\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt,$
- $\int_0^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}\right) dt.$
- $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2} dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{argsh}(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt.$

Exercice 4.0.8 ★

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha - t^\beta}$ avec $0 < \alpha < \beta$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + t^\beta}$ avec $\alpha \leq \beta$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^2} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.0.9 ★

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

- $\int_0^{+\infty} ((t+1)^{1/3} - t^{1/3})^{\sqrt{t}} dt$;
- $\int_0^{+\infty} ((t^3 + 3at + 3b)^{1/3})^+$
- $\int_1^{+\infty} t^\alpha \sin^2 t dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $t^2 \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) dt$;

Exercice 4.0.10 ★

Étudier l'intégrabilité de :

- $f : t \mapsto e^{-t^2}$ sur $I = [0, +\infty[$;
- $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ sur $I =]0, +\infty[$;
- $f : t \mapsto \frac{\cos(mt)}{a^2 + t^2}$ sur $I = [0, +\infty[$ ($a \neq 0$),
- $f : t \mapsto \frac{1}{1 - \sqrt{1-t}}$ sur $I =]0, 1[$,
- $f : t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$,
- $f : t \mapsto \ln\left(\frac{1+t^3}{1+t^4}\right)$ sur $I =]-1, +\infty[$.

Exercice 4.0.11 ★

Étudier l'intégrabilité de :

- $f : t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ sur $I =]1, +\infty[$,
- $f : t \mapsto \frac{\ln^k t}{1+t^2}$ sur $I =]0, +\infty[$,
- $f : t \mapsto \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}$ sur $I = \mathbb{R}$,
- $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t(1-t^2)}$ sur $I =]1, +\infty[$,
- $f : t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ sur $I = [1, +\infty[$,
- $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+t^2}$ sur $I = [0, +\infty[$

Exercice 4.0.12 ★

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

- $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} \ln t}$ sur $I = [2, +\infty[$;
- $f(t) = -\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ sur $I =]0, 1[$;
- $f(t) = t^2 e^{-t^2}$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = \frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}$ sur $I =]0, 1[$;
- $f(t) = \frac{\operatorname{argsh}(t)}{\operatorname{sh}(t)}$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 4.0.13 ★

Déterminez l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$ sur $I =]0, \pi/2[$;
- $f(t) = \frac{|t|}{t^3}$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = e^{-t^2}$ sur $I = [0, +\infty[$;
- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $I =]-1, 1[$;
- $f(t) = \sin(1/t^2) \arctan(t^2)$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = -\frac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ sur $I =]0, 1[$.

Exercice 4.0.14 ★

Étudier l'intégrabilité de :

- $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.
- $f : t \mapsto P(t)e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$ où P est un polynôme.
- $f : t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $I =]-1, 1[$ où $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $I =]-1, 1[$;
- $f(t) = \sin(1/t^2) \arctan(t^2)$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = -\frac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ sur $I =]0, 1[$.

Exercice 4.0.15 ★

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

- $f(t) = \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = \frac{1}{\tan t}$ sur $]0, \pi/2[$;
- $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ sur $I = [1, +\infty[$;
- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} \ln t}$ sur $I = [2, +\infty[$;
- $f(t) = -\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ sur $I =]0, 1[$;
- $f(t) = t^2 e^{-t^2}$ sur $I = [1, +\infty[$.

Exercice 4.0.16 ★**Intégrales de Bertrand**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $[0, 1/2[$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 4.0.17 ★

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ est-elle convergente ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{1+u}{1+u^2} du$. Comment expliquer ce résultat ?

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{2x} \frac{1+u}{1+u^2} du$.

Exercice 4.0.18 ★

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge.

Exercice 4.0.19 ★ CCP MP

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4.0.20 ★ Centrale PC 2011

1. On considère la fonction

$$f: \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin x}{x + \sin x} \end{cases}.$$

La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x + \sin x} dx$ est-elle convergente ?

Exercice 4.0.21 ★★★ X PC 2007

Montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f: x \mapsto \frac{x}{1+x^9 \sin^2(x)}$.

Exercice 4.0.22 ★★

1. a désigne un réel strictement supérieur à -1 . En posant $x = \tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

2. Donner en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

3. Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$$

4. Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$$

Exercice 4.0.23 ★★

La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t) dt$ admet-elle une limite en $+\infty$?

4.0.3 Calculs d'intégrales

Exercice 4.0.24 ★

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur convergence :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$,

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$,

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$,

5. $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$,

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

6. $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt$.

Pour cette dernière intégrale, on pourra couper l'intégrale en deux intégrales sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ puis faire le changement de variable $t \rightarrow 1/t$.

Exercice 4.0.25 ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$,

3. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$,

4. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$,

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$,

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

Exercice 4.0.26 ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$,

3. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$,

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx$,

2. $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx$,

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$,

6. $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}} dx$,

Exercice 4.0.27 ★

1. Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$$

2. En déduire la valeur de I .

Exercice 4.0.28 ★

1. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ est-elle convergente ?

2. Calculer $I(3/2)$ en admettant que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 4.0.29 ★ Intégrales d'Euler

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

2. Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J .

Exercice 4.0.30 ★

CCP PC

Montrer que l'intégrale suivante est convergente et la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Exercice 4.0.31 ★

2

Nature et calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$.

Exercice 4.0.32 ★

Justifier l'existence et calculer l'intégrale généralisée :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt$$

Exercice 4.0.33 ★

Classique

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$$

1. Justifier l'existence de I .

2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 + 1$.

3. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$.

d. En développant $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^4 + 1} dt$, calculer I .

Exercice 4.0.34 ★

Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2} dx$.

Exercice 4.0.35 ★

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + t^3 |\sin t|}} \end{cases}.$$

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$;

2. En déduire la nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 4.0.36 ★★★

Prouver la convergence de $\int_0^1 x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor dx$ puis calculer cette intégrale.

Exercice 4.0.37 ★★★

Centrale PC

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie à partir du développement décimal propre :

$$f : 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \mapsto 0, a_1 a_0 a_2 a_3 a_4 \dots$$

1. Étudier la continuité de f .

2. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 4.0.38 ★★★

Centrale PC 2016

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\epsilon) : y' - ay = b$ sont bornées si et seulement si a et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.0.39 ★★★

X PC 2011

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ après avoir justifié sa convergence.

Exercice 4.0.40 ★★★

X MP

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.

Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx$$

Exercice 4.0.41 ★★

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que f est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, la suite (S_n) est convergente et que si tel est le cas

$$\int_{]0, 1[} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Exercice 4.0.42 ★★★

Pour $a > 0$, calculer

$$I(a) = \int_0^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) e^{-at} dt.$$

Exercice 4.0.43 ★★★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

On se donne deux réels $0 < a < b$.

1. Établir que pour tout $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt.$$

2. En déduire convergence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

4.0.4 Comportement asymptotique et intégrabilité

Exercice 4.0.44 ★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que f est intégrable. Montrer

$$\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 4.0.45 ★★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4.0.46 ★★★★★ CCP MP

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

1. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. Étudier les séries :

$$\sum f(n) \quad \text{et} \quad \sum f'(n)$$

Exercice 4.0.47 ★★ Centrale PC

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

2. Montrer que $f.f'$ est intégrable.

Exercice 4.0.48 ★★★★★ ENS CACHAN PC

Trouver un équivalent en $+\infty$ de

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2} dx.$$

4.0.5 Suites d'intégrales (propres ou) impropres

Exercice 4.0.49 ★

Étudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

$$J_n = \int_0^1 x^n \arctan(1-nx) dx$$

Exercice 4.0.50 ★

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4} dt$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+a^2 x^2} dx$$

Exercice 4.0.51 ★

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Exercice 4.0.52 ★

Déterminer un équivalent lorsque $x \rightarrow 0$ de la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt.$$

Exercice 4.0.53 ★

Existence et calcul pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^n}$.

Exercice 4.0.54 ★

On pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n converge.

2. Calculer J_0 .

3. Former une relation de récurrence engageant J_n et J_{n+1} .

4. Établir qu'il existe $A > 0$ tel que

$$J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

Exercice 4.0.55 ★

CCP PC, calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1+x.$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

puis établir

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

3. On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \quad \text{et} \quad J_{n+1} = W_{2n}.$$

4. Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2} .

En déduire la constance de la suite de terme général $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.

5. Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I .

Exercice 4.0.56 ★ **Calcul de l'intégrale de Dirichlet** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

2. Montrer que la fonction $g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Justifier que $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ est convergente puis montrer que (I_n) est constante.

4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 4.0.57 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n} x dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < I_n < A_n$.

4. Étudier la limite de (A_n) et en déduire celle de (I_n) .

Exercice 4.0.58 ★

On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

1. Montrer que cette intégrale est convergente. On note I sa valeur.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^{2n} \ln x dx$ est convergente et la calculer.

3. Justifier que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

4. Déduire des questions précédentes que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}$.

Exercice 4.0.59 ★★ **TPE 2009**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x(n+x)}} dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie.

2. Étudier la convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(n+x)}}$.

4. En déduire par encadrement un équivalent de I_n .

Exercice 4.0.60 ★★ **TPE 2011**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}.$$

1. Prouver que pour tout $(n; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$, $I_n(x)$ est bien définie.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Exercice 4.0.61 ★ **CCP 2016**

Premier exercice :

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$.

On pose $I(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1. Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$. En déduire l'existence de $I(1)$ et le calculer.

2. (a) Soit k entier entre 0 et 5. Justifier que $I(X^k)$ converge absolument

(b) Justifier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. On suppose qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$I(P) = aP\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + bP(0) + cP\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(a) Calculer $I(X)$. En déduire deux relations entre a , b et c .

(b) Montrer que $I(X^2) = \frac{\pi}{2}$ et déterminer a , b et c .

4. Soit $n \in \llbracket 2, 5 \rrbracket$. Montrer que $I(X^n) = \frac{n-1}{n} I(X^{n-2})$.

5. Conclure.

Exercice 4.0.62 ★★ CCP MP

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

1. Déterminer une suite de fonctions (f_n) telle que

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Exercice 4.0.63 ★★★ Centrale MP

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

(on procédera par récurrence)

3. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

4. Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

4.0.6 Intégration et structure euclidienne

Exercice 4.0.64 ★ Convergence en moyenne quadratique

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur I . On note $(f | g) = \int_I f g$ le produit scalaire usuel sur E et $\| \cdot \|_2$ la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions de E converge en moyenne quadratique vers une fonction f de E si et seulement si $N_2(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1. Prouver les inégalités

$$\forall (f, g) \in E^2, |(f | g)| \leq \int_I |f g| \leq N_2(f) N_2(g).$$

2. En déduire que si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions de E convergeant en moyenne quadratique vers f et g alors $((f_n | g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (f | g)$.

Exercice 4.0.65 ★

On considère E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $(f | g) = \int_{\mathbb{R}} f g$ le produit scalaire usuel sur E . Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions paires de carré intégrables sur $\mathbb{R}$ et le sous-espace $\mathcal{I}$ des fonctions impaires de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 4.0.66 ★

On rappelle l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

1. Montrer que l'intégrale $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge.

2. Que vaut I_{2p+1} ?

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{2p+2} et I_{2p} et finir le calcul des I_p en admettant que $I_0 = 1$.

4. Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{cases}.$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

5. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$.

Exercice 4.0.67 ★ CCP MP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall (f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4.0.68 ★ CCP MP

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

4.0.7 Intégrales fonction d'une borne, fonctions définies par une intégrale

Exercice 4.0.69 ★★ Type Mines

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Exercice 4.0.70 ★★★ Centrale 2009, Exponentielle intégrale

On pose

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Donner un équivalent de $f(x)$ aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 4.0.71 ★★ Type Mines

On introduit

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable en une fonction (toujours notée f) $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente en 1.
4. Déterminer les limites aux bornes de f et tracer sa courbe représentative.
5. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt$.

4.0.8 Étude de fonctions définies par une intégrale à paramètre

Exercice 4.0.72 ★ Transformée de Fourier, Mines 2007

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit sa transformée de Fourier par

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx} dt.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans cette question, on prend $f : t \mapsto e^{-t^2/2}$.
(a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer $\hat{f}$ (On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).
3. On suppose de plus que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.73 ★ Transformée de Laplace

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ty}f(t) = 0$ pour tout $y > 0$. Pour $f \in E$, on définit sa transformée de Laplace par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ et tout $f \in E$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $\mathcal{L}$ est linéaire de E dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
4. Calculer la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

$$(a) f_1 : t \mapsto 1; \quad (b) f_2 : t \mapsto e^{-at}, \quad (c) f_3 : t \mapsto t^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (d) f_4 : t \mapsto \cos(\omega t)$$

5. On suppose que $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f' et f'' appartiennent à E . Trouver une relation entre $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f'')$.
6. Retrouver la solution de l'équation différentielle $y'' + y = 1$ telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$. On admettra que l'application $\mathcal{L}$ est injective.

Exercice 4.0.74 ★

On considère $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4 t^2}} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4 t^2}} dt$.

Exercice 4.0.75 ★★ Mines 2005

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan t \, dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition I de f .
2. La fonction f est-elle continue sur I.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.0.76 ★

Montrer que $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+itx)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.77 ★

On considère $f : x \mapsto \int_0^\pi \sin(t \sin x) \, dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^\pi \sin(t \sin x) \, dt$.

Exercice 4.0.78 ★

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \, dt$ est convergente pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
Indication 4.0 : On pourra distinguer les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$ et calculer f' .
3. En déduire une expression explicite de f .

Exercice 4.0.79 ★

1. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) \, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de f .

Exercice 4.0.80 ★

1. Déterminer l'ensemble de définition D de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt$;
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $D \setminus \{0\}$.

Exercice 4.0.81 ★

On se propose de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$:

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}.$$

1. Calculer $f_1(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $f'_n(x)$ en fonction de $f_{n+1}(x)$.

4. En déduire f_n .

Exercice 4.0.82 ★

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx) \, dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.83 ★

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} \, dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$;
2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$;
3. Montrer que f est continue et décroissante ;
4. Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 4.0.84 ★

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \, dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Grâce au changement de variable $t = 1/u$, calculer $f(0)$.
3. Étudier les variations de f sur son domaine de définition.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4.0.85 ★

Posons

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} \, dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ puis en $+\infty$.

Exercice 4.0.86 ★

On introduit

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Donner un équivalent de f en 0^+ et trouver la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4.0.87 ★

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} \, dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.88 ★

On considère la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2xF(x)$.
3. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$$

Exercice 4.0.89 ★

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} dt$.

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations en calculant $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 4.0.90 ★ **Oral CCP MP**

On pose : $\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall t \in]0; +\infty[$, $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que, $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On pose alors, $\forall x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Démontrer que, $\forall x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 4.0.91 ★ **Oral CCP MP**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E).

Exercice 4.0.92 ★★ **Mines PC 2016**

On considère $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)} dt$.

1. Donner le domaine de définition D de f .

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

3. Calculer f .

Exercice 4.0.93 ★★★ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f donnée là où elle est définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt.$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle à déterminer.
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par f .
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 4.0.94 ★★★ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f donnée là où elle est définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt.$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle à déterminer.
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par f .
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 4.0.95 ★ **Mines 2016**

Trouver les fonction continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt$.

Exercice 4.0.96 ★ **CCP 2016**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1. Montrer que f est définie et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4.0.9 Exercices de synthèse**Exercice 4.0.97** ★★ **Centrale 2000**

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$[F(P)](x) = e^{4x} \int_{2x}^{+\infty} P(t) e^{-2t} dt.$$

1. Vérifier l'existence de $F(P)(x)$.
2. Calculer avec Python $F(X^k)$ pour $k \in [0, 5]$.
3. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4. Trouver une équation différentielle vérifiée par $Y = F(P)$. En déduire que F est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

5. Quelles sont les valeurs propres de F .

Exercice 4.0.98 ★★★ **Centrale PC 2016** SRMS 2016 890 ENSAM PSI
Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\epsilon) : y' - ay = b$ sont bornées si et seulement si a et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. SRMS 2009 394 X ESPCI PC

4.1 Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 4.1.1 ★ **X ESPCI PC 2012, X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : inégalité de Hardy

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4.1.2 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : inégalité de Hardy

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. On suppose $(f')^2$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. SRMS 2013 120 ENS PC

2. Déterminer la limite de $\frac{f(t)^2}{t}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.3 ★ **X ESPCI PC 2015**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} (f'(t)^2 + t^2 f(t)^2) dt$ existe. Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt}$. SRMS 2015 379 X ESPCI PC

Exercice 4.1.4 ★ **ENS PC 2014**
Mots-clés : inégalité de Hölder, inégalité de Prékopa et Leindler SRMS 2015 476 X ESPCI PC

- Soit $(p, q) \in]1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer : $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
- Soient u, v dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ à support compact. Soit $\theta \in [0, 1]$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} u^\theta v^{1-\theta} dx \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} u dx)^\theta (\int_{-\infty}^{+\infty} v dx)^{1-\theta}$.
- Soient u, v, w dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ intégrables. Soit $\theta \in [0, 1]$. On suppose que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, w(\theta x + (1-\theta)y) \geq u(x)^\theta v(y)^{1-\theta}$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} w \geq (\int_{-\infty}^{+\infty} u)^\theta (\int_{-\infty}^{+\infty} v)^{1-\theta}$.

Exercice 4.1.5 ★ **X ENS PSI 2015**

Mots-clés : fonctions convexes, inégalité de Jensen

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $I =]a, b[$. La fonction $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y)$. Soit $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$. SRMS 2015 844 Centrale PSI

- Montrer que Φ est convexe si et seulement si pour tout $(s, t, u) \in I^3$ tel que $s < t < u$, $\frac{\Phi(t) - \Phi(s)}{t-s} \leq \frac{\Phi(u) - \Phi(t)}{u-t}$.
- On suppose que Φ est dérivable sur I . Montrer que Φ est convexe si et seulement si Φ' est croissante sur I .

3. Montrer que si Φ est convexe alors Φ est continue sur I .

4. On suppose Φ convexe. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow I$ continues telles que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ et les fonctions $(\Phi \circ g)f$ et $f g$ soient intégrables. Montrer que $\Phi(\int_{\mathbb{R}} f g) \leq \int_{\mathbb{R}} (\Phi \circ g)f$.

Exercice 4.1.6 ★ **ENSAM PSI 2016**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' de carrés intégrables. Montrer que f' est de carré intégrable, et que $[\int_{\mathbb{R}} (f')^2]^2 \leq [\int_{\mathbb{R}} f^2][\int_{\mathbb{R}} (f'')^2]$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.1.7 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)| dt$.

Exercice 4.1.8 ★ **CCP PC 2010**

Soient E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_k : t \mapsto t^k$.

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Montrer que $\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$ converge. Si $P \in E$, on pose $L(P) : P \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.
- Si $k \in \{0, \dots, n-1\}$, montrer que $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$. En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\mu_j}{j!}$.
- Déterminer les valeurs propres de L . L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Exercice 4.1.9 ★ **ENS PC 2013**

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que u et u' soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow -\infty$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $(u(x))^2 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2 \right)^{1/2}$.

Exercice 4.1.10 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : fonction décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $xf(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.11 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ et $x_n f(x_n) \rightarrow 0$.

Exercice 4.1.12 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : fonction décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente.

- Si $f(x)$ admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, que vaut ℓ ?
- Donner un exemple où $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que si f est décroissante, alors $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.1.13 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante. Soit $\alpha > -1$. On suppose que la fonction $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- Montrer que les fonctions $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- En déduire que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha+1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$.

Exercice 4.1.14 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_x^{x+1} f'^2 \leq M$. Montrer que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.15 ★ **X ESPCI PC 2013, Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : théorème de Césaro pour les fonctions

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.16 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : continuité uniforme des fonctions $\mathcal{C}^1$ à dérivée dans L^2

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} [f'(t)]^2 dt < +\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 4.1.17 ★ **ENSAM PSI 2014**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive nulle en 0. Montrer que la convergence d'une des deux intégrales ci-dessous implique celle de l'autre, et comparer leurs valeurs : $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$.

Exercice 4.1.18 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable.

1. Peut-on dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?
2. Montrer que $g: x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x - \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$ est intégrable et que $\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 4.1.19 ★ **X ESPCI PC 2014**

Mots-clés : intégrale de Frullani

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$.

Exercice 4.1.20 ★ **ENS PC 2015**

Soit sgn la fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}_+)$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x) > 0$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{f} = +\infty$
- (ii) il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que (u_n) converge simplement vers la fonction sgn et telle que $\int_{-1}^1 f u_n^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.21 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soient $k \in [0, 1[$ et $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \rightarrow k$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que f est intégrable.
2. Peut-on généraliser le résultat ?

Exercice 4.1.22 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : somme de Riemann d'une fonction intégrable monotone

Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, monotone et intégrable. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$.

Exercice 4.1.23 ★ **ENSAM PSI 2015**

Mots-clés : produit de convolution

Soient f et g deux fonctions continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f * g: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$.

2. Montrer que $f * g$ est continue sur son ensemble de définition.

3. Étudier les limites de $f * g$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 4.1.24 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose que f^2 est intégrable sur $]0, 1[$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1[$.
2. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \int_0^x f^2 = 2 \int_0^x f$. On pose $g: x \mapsto \int_0^x f$ et $h: x \mapsto \int_0^x f^2$.
 - (a) Trouver une équation différentielle vérifiée par g .
 - (b) En déduire g puis f .

Exercice 4.1.25 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T -périodique et non identiquement nulle. On pose $F: x \mapsto \int_0^x f$, $M = \frac{1}{T} \int_0^T f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \frac{|f(t)|}{t} dt$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n . La fonction $t \mapsto \frac{|f(t)|}{t}$ est-elle intégrable sur $[T, +\infty[$?
2. On suppose $M \neq 0$. Montrer que $F(x) \sim Mx$ quand $x \rightarrow +\infty$. L'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est-elle convergente ?
3. On suppose que $M = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente.

4.1.1 Intégrales de fonctions numériques positives particulières**Exercice 4.1.26** ★ **Mines Ponts PC 2009, Mines Ponts PC 2014**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.

1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .
2. Déterminer un équivalent de I_n . Nature de $\sum I_n$?

Exercice 4.1.27 ★ **CCP PC 2006**

Soit, pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \rightarrow \infty$.
2. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1 .
3. Calculer I_n .

Exercice 4.1.28 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, existence et calcul de $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\tan x} dx$.

Exercice 4.1.29 ★ **X ESPCI PC 2014**

Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ et sur $]2, +\infty[$ de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$.

Exercice 4.1.30 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f: t \mapsto |\ln t|^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, \frac{1}{2}[$, $[\frac{1}{2}, 1[$, $]1, 2[$ et $[2, +\infty[$.

Exercice 4.1.31 ★ **Centrale PC 2009, Mines Ponts PSI 2014**

Existence et calcul de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.

Exercice 4.1.32 ★ **RMS 2010 1003 Télécom Sud Paris PSI**

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \frac{e^{ax}}{x} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.1.33 ★ **Petites Mines PSI 2010**

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$.

Exercice 4.1.34 ★ **TPE PC 2006**

Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] dx$.

Exercice 4.1.35 ★ **TPE PC 2011**

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.

Exercice 4.1.36 ★ **RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC**

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} [x] e^{-x} dx$.

Exercice 4.1.37 ★ **CCP PSI 2015**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$.

Exercice 4.1.38 ★ **Centrale PC 2013**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\cosh^2 t} dt$.

Exercice 4.1.39 ★ **CCP PC 2013**

Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(1/\sqrt{t})}{t^2} dt$.

Exercice 4.1.40 ★ **TPE EIVP PC 2013**

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 4.1.41 ★ **CCP PC 2007**

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto x^\beta e^{-\alpha x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.1.42 ★ **CCP PC 2014**

Nature de $\int_0^1 |\ln t|^b (1-t)^a dt$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 4.1.43 ★ **RMS 2014 1251 Écoles des Mines PSI**

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$.

1. Justifier l'existence de I .

2. Montrer que $I = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 - u + 1}$. Calculer I .

Exercice 4.1.44 ★ **RMS 2014 1252 Écoles des Mines PSI**

Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 4.1.45 ★ **ICNA PSI 2014**

Trouver une condition nécessaire et suffisante de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx$,

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.1.46 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Convergence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}} \arcsin \frac{x-1}{x+1} dx$.

Exercice 4.1.47 ★ **Mines Ponts PSI 2014, Centrale PC 2015**

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} dx$.

Exercice 4.1.48 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Nature et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Exercice 4.1.49 ★ **Mines Ponts PC 2009, Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.1.50 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit $f: x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, 1[$. Déterminer les limites de f quand $x \rightarrow 0^+$ et quand $x \rightarrow 1^-$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 4.1.51 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $f: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de f en zéro.

2. Étudier la concavité de f . Tracer le graphe de f .

Exercice 4.1.52 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Établir la convergence, puis déterminer la valeur, de $I(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\sin(2t)} - 1} dt$.

Exercice 4.1.53 ★ **Centrale PC 2014**

Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

2. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-k^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.1.54 ★ **CCP PSI 2014**

Pour $x \in]0, \pi[$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1+\cos t}$. Prolonger g par continuité sur $[0, \pi[$. La fonction

g^2 est-elle intégrable sur $[0, \pi[$?

Exercice 4.1.55 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $f: t \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

2. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 4.1.56 ★ **Centrale PC 2015**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt$.

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de leur dérivée en zéro.

2. Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$ (on admet dans la suite que cette limite vaut $\frac{\pi}{2}$).

3. Montrer que G tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

4. (a) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, F(a_n) = \frac{1}{1+n}$.

(b) Étudier la monotonie de (a_n) , et sa convergence.

(c) Trouver un équivalent de a_n en $+\infty$.

SRMS 2010 660 Mines Ponts PC

5. (a) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite positive (b_n) telle que $b_0 = 0$ et $\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{1-\cos t}{t} dt = \frac{1}{1+n}$.

SRMS 2015 474 X ESPCI PC

(b) Étudier la monotonie de (b_n) et sa limite.

(c) Convergence de la série de terme général $c_n = b_n(n+1)$?

SRMS 2010 842 Centrale PSI

6. Étudier l'intégrale $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)e^{-xt}}{t^2} dt$.

SRMS 2014 758 Mines Ponts PC

Exercice 4.1.57 ★ Mines Ponts PC 2015

Nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha |\sin x|}$?

Exercice 4.1.58 ★ Centrale PSI 2015

SRMS 2014 940 Centrale PSI

Soit $f: x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1. Montrer que $g: x \in]1, +\infty[\mapsto \sqrt{x^2-1}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

SRMS 2014 1246 CCP PSI

2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est bien définie et la calculer.

SRMS 2010 1077 TPE PC

3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{n}{m\sqrt{m^2-n^2}}$. Montrer que la suite (S_n) est bien définie et déterminer sa limite.

Exercice 4.1.59 ★ Centrale PC 2015

1. Déterminer, suivant $\alpha > 0$, la nature de $\int_0^{+\infty} \ln(1+x^{-\alpha})dx$.

2. Calculer cette intégrale pour $\alpha = 2$.

SRMS 2013 666 Mines Ponts PC

Exercice 4.1.60 ★ Centrale PC 2015

Soit $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$.

1. Étudier la convergence de $I = \int_{-1}^1 f(t)dt$ et de $J = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

2. Soit $F: x \mapsto \int_{1/x}^{x^2} f(t)dt$. Quel est le domaine de définition de F ?

SRMS 2013 1057 CCP PC

3. Calculer les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

4. Calculer les variations de F . On montrera que F ne s'annule qu'en une unique valeur que l'on déterminera.

SRMS 2014 1284 Écoles des Mines PSI

5. Tracer le graphe de F .

4.1.2 Intégrales de fonctions numériques complexes particulières

SRMS 2015 743 Mines Ponts PC

Exercice 4.1.61 ★ X ESPCI PC 2009

SRMS 2014 688 Mines Ponts PSI

Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}} dx$.

Exercice 4.1.62 ★ Mines Ponts PC 2013

SRMS 2014 679 Mines Ponts PSI

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x-\sin x}} dx$?

Exercice 4.1.63 ★ X ESPCI PC 2009

SRMS 2014 756 Mines Ponts PC

Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xa)}{x^b} dx$ si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.1.64 ★ Mines Ponts PC 2010

La fonction $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4.1.65 ★ X ESPCI PC 2015

Mots-clés : intégrale de Fresnel

Nature de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$?

Exercice 4.1.66 ★ Centrale PSI 2010

Mots-clés : intégrale de Fresnel

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin(x^2)dx$ est-elle convergente ?

Exercice 4.1.67 ★ Mines Ponts PC 2014

Mots-clés : intégrale de Fresnel

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^3)dt$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Exercice 4.1.68 ★ Centrale PSI 2014

Nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin(\frac{1}{x})dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x} dx$.

Exercice 4.1.69 ★ CCP PSI 2014

La fonction $x \mapsto \int_x^0 \cos(e^t)dt$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 4.1.70 ★ TPE PC 2010

Mots-clés : intégrale de Frullani

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge.

3. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x} dx$.

Exercice 4.1.71 ★ Mines Ponts PC 2013

1. Soit $a > 0$. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt$?

2. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(a_i t)}{t} dt$. À quelle condition l'intégrale I est-elle définie ? Calculer I lorsque cette condition est réalisée.

Exercice 4.1.72 ★ CCP PC 2013

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Exercice 4.1.73 ★ RMS 2014 1284 Écoles des Mines PSI

Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 4.1.74 ★ Mines Ponts PC 2015

Soit $f: x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$. Montrer que f est définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.1.75 ★ Mines Ponts PSI 2014

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Calculer I au moyen de $J(u) = \int_0^u (\int_0^u e^{-xy} \sin x dx) dy$.

Exercice 4.1.76 ★ Mines Ponts PSI 2014

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{(-1)^{1/x}}{x} dx$.

Exercice 4.1.77 ★ Mines Ponts PC 2014

Nature, suivant α , de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x) \ln|1-x|}{x^\alpha(1+x)} dx$.

4.1.3 Intégrales à paramètre

PSI

Exercice 4.1.78 ★ **CCP PSI 2010** SRMS 2014 942 Centrale PSI

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée et $g: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t) dt$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Exprimer g'' en fonction de g et de f .

PSI

Exercice 4.1.79 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodiques. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$ et $G(f): x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt$.

SRMS 2014 1023 Centrale PC

1. Montrer que G est un endomorphisme continu. Est-ce un automorphisme ?
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de G .

PC

Exercice 4.1.80 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $g \in E$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe $f \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} \frac{th(f(xt))}{4+t^2} dt$.

1. Si $f \in E$, montrer que $T(f): x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{th(f(xt))}{4+t^2} dt$ est dans E .
2. Soit (f_n) définie par $f_0: x \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = g + T(f_n)$. Étudier cette suite de fonctions et conclure.
3. Montrer que f est unique (cette question ne figurait pas dans l'énoncé publié).

PSI

Exercice 4.1.81 ★ **Centrale PSI 2014**

Soient f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\pi xt) dt$.

1. Donner le domaine de définition D de F . La fonction F est-elle continue sur D ?
2. Hypothèses sur f pour que F soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D ?
3. On suppose que f est identiquement nulle sauf sur le segment $[0, A]$ avec $A > 0$. Montrer que F est développable en série entière.

PC

Exercice 4.1.82 ★ **ENS PC 2015**

Soit $s \in]0, 1[$. Pour $(a, x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $P(a, x, y, t) = \frac{ay^{2s}}{((x-t)^2 + y^2)^{s+1/2}}$. ESPCI PC

1. Montrer, pour $(a, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto P(a, x, y, t)$.
2. Montrer l'existence d'un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \int_{-\infty}^{+\infty} P(c, x, y, t) dt = 1$.
3. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} P(c, x, y, t) dt = 0$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée. Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(c, x, y, t) f(t) dt$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $y \mapsto u(x, y)$ a, quand $y \rightarrow 0^+$, une limite dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

4.1.4 Intégrales classiques, transformées de Laplace et de Fourier

Exercice 4.1.83 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : fonction Γ d'Euler

Soit s un nombre complexe de partie réelle > 0 .

1. Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ converge.
2. Montrer que $I_n(s) = \int_0^n t^{s-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ converge. Quelle est la limite de $I_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} = \Gamma(s)$.

Exercice 4.1.84 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : fonction Γ d'Euler

Soient $G: x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $F: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

1. Montrer que G est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer une relation entre $G(x+1)$ et $G(x)$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Déterminer une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.
3. Soit $\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma = F + G$.

Exercice 4.1.85 ★ **CCP PC 2015**

Mots-clés : fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$.

1. Montrer que I existe.
2. On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et on donne $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Préciser le domaine de définition de ζ .
4. Pour quels $t \in \mathbb{R}$ a-t-on la relation $\frac{t^3}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t}$?
5. Calculer I .
6. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$. Déterminer le domaine de définition de F . Exprimer F à l'aide de ζ et de Γ . Étudier la continuité de F .

Exercice 4.1.86 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : intégrale de Gauss

Soient $f: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g: x \mapsto \int_0^{\pi/4} e^{-x^2/\cos^2 u} du$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante.
2. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 4.1.87 ★ **CCP PSI 2014**

Mots-clés : intégrale de Gauss

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. Soit $F: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrer que $F+G^2$ est constante. Déterminer la limite en $+\infty$ de F . En déduire la valeur de I .

Exercice 4.1.88 ★ **IIE PC 2006**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

On considère la fonction $\varphi: t \mapsto \int_0^\pi e^{-t \sin \theta} \cos(t \cos \theta) d\theta$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour $t > 0$: $\varphi'(t) = -2 \frac{\sin t}{t}$.
3. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et calculer sa valeur.

Exercice 4.1.89 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$ et $v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

1. Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Montrer que $u_n - v_n \rightarrow 0$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4.1.90 ★ **Centrale PSI 2010, TPE PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace, intégrale de Dirichlet

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f . La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur D ?
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par f .
3. Soit $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$. Montrer que $g = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 4.1.91 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Trouver une équation différentielle dont f est solution.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en 0 . Donner un équivalent de f en 0 .

Exercice 4.1.92 ★ **CCP PSI 2010, CCP PSI 2011, TPE EIVP PSI 2013**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $f: y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty} \sin t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(y)$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire une expression de f .

Exercice 4.1.93 ★ **CCP PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$.

Exercice 4.1.94 ★ **ENSAM PSI 2010**

Mots-clés : transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $F: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$. Étudier F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.1.95 ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt$.

1. Existence, domaine de définition, continuité. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer f' et f .
2. Soit $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$. Justifier l'existence de g . Exprimer g en fonction de f . En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 4.1.96 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet

Soit $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dx$.

1. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $F'(t)$. En déduire une expression de $F(t)$ sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est continue en 0 . En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 4.1.97 ★ **CCP PC 2014**

Mots-clés : intégrale de Dirichlet, transformée de Laplace

Soit $f: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ et de $f'(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Exprimer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ en fonction de $f(0)$. En déduire la valeur de I .

Exercice 4.1.98 ★ **Navale PSI 2010**

Montrer que $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{\sqrt{t}} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.1.99 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Mots-clés : transformée de Laplace

Soit $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.1.100 ★ **CCP PC 2016**

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que F est positive et décroissante.

SRMS 2014 1286 TPE PSI

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. En déduire la limite de F en 0^+ .

6. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 4.1.101 ★ Mines Ponts PC 2013

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} dt$.

SRMS 2015 380 X ENS PSI

1. Déterminer le domaine de définition de f . Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

2. Donner un équivalent de f aux bornes.

Exercice 4.1.102 ★ Centrale PC 2013

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq 1 - xf(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4.1.103 ★ RMS 2014 1290 Écoles des Mines PSI

Mots-clés : constante d'Euler, transformée de Laplace

On pose $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-xt} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est solution de $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$.

3. Exprimer f à l'aide de $C = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$.

Exercice 4.1.104 ★ X ENS PSI 2014

Mots-clés : transformée de Fourier, fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

On note E l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$. On pose pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, $F(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} dx$.

1. Montrer que $F(f)$ est définie et dérivable. Calculer $F(f)'$.

2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $|F(f)(t)| \leq C_N |t|^{-N}$ (on exprimera C_N en fonction de f et N).

On pose pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $D(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| F(f)(z) e^{ixz} dz$.

3. Montrer que $D(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $g \in E$; montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} D(f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| F(f)(z) \overline{F(g)(z)} dz$.

4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} D(f)(x) x f'(x) dx = 0$.

5. Montrer que la condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) + D(\varphi)(\cos x) \sin x = 0$ entraîne que φ est constante.

Exercice 4.1.105 ★ TPE PSI 2014

Mots-clés : transformée de Fourier

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{zt} dt$.

1. Montrer que f est bien définie.

2. Si $z = x + iy$, montrer que $f(z) = e^{x^2/4} e^{ixy/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{iyu} du$.

3. Montrer que $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{iyu} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, solution d'une équation différentielle d'ordre 1. Résoudre cette équation et en déduire une expression de $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.1.106 ★ X ENS PSI 2015

Soit $\gamma: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2/2}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz} \gamma(t) dt$ est convergente.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz} \gamma(t) dt$.

2. Donner un développement en série entière de F en 0 et préciser le rayon de convergence.

3. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto F(ix) \gamma(x)$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

4. Donner alors une expression de F .

Exercice 4.1.107 ★ ENS PC 2015

Mots-clés : transformée de Fourier

Soient $\alpha > 0$ et $f: x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{(x-k)^2}{2\alpha})$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coefficients de Fourier de f .

3. Soit $\Phi: y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{u^2}{2\alpha}) e^{-iyu} du$. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par Φ . En déduire une expression de $\Phi(u)$.

4.1.5 Autres intégrales à paramètre de fonctions particulières

Exercice 4.1.108 ★ X ESPCI PC 2012

Soit $f: x \mapsto \int_0^1 x e^{-xt \ln t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier sa régularité.

2. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de zéro.

Exercice 4.1.109 ★ X ESPCI PC 2012

Déterminer la limite de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1+t^2} dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.1.110 ★ Mines Ponts PC 2009

Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$, $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2} dx$ pour $a > 0$. Calculer I , puis calculer K à l'aide de $J(a)$.

Exercice 4.1.111 ★ Centrale PC 2009

On pose $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.1.112 ★ **CCP PSI 2014** SRMS 2015 927 Centrale PC

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que f admet un développement en série entière de f en 0 ; le déterminer.

Exercice 4.1.113 ★ **RMS 2014 1288 Écoles des Mines PSI**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(xt) dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et expliciter f' . En déduire $f(x)$.

Exercice 4.1.114 ★ **CCP PSI 2015**

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier la définition de I_n . Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} . En déduire la valeur de I_n .
2. Donner une expression simplifiée de $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

Exercice 4.1.115 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit $G: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt) dt$. Montrer que G est bien définie et que G est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.1.116 ★ **CCP PC 2011**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + F(-x) = 1$. Calculer $F(k)$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$. Donner un équivalent de $F(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.1.117 ★ **ENSAM PSI 2011, CCP PC 2006, Mines Ponts PC 2014**

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F .
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer F sur D .
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 4.1.118 ★ **CCP PC 2006, TPE EIVP PC 2013, ENSAM PSI 2014**

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .

2. Étudier la dérivabilité de F . Donner une expression de F' .

3. Donner une expression simple de F .

Exercice 4.1.119 ★ **Centrale PC 2015**

Soient $\varphi: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n: x \mapsto \int_0^n \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution d'une équation différentielle du deuxième ordre. En déduire une expression de f_n .
3. Soient $h \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, et $I: c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_a^{+\infty} h(t) \sin(ct) dt$. Montrer que $I(c) \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow +\infty$.
4. Montrer que $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ a une limite ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.
5. En déduire une expression de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

Exercice 4.1.120 ★ **TPE PSI 2015**

Montrer après avoir justifié l'existence des intégrales que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan \frac{x}{t} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2} dt$.

Exercice 4.1.121 ★ **CCP PC 2012**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $] -1, +\infty[$.
2. Calculer $f(1)$. Montrer que $\forall x > -1, (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $(-1)^+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
4. Justifier que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$. En déduire $f'(0)$.

Exercice 4.1.122 ★ **CCP PC 2012**

Mots-clés : fonction de Bessel

Soit $f: x \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 4.1.123 ★ **CCP PC 2011**

Pour $x \in] -1, 1[$, soit $f_x: \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

1. Soit $x \in] -1, 1[$. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.
2. Montrer que f_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f'_x(\theta) = \frac{-x \sin \theta}{1-2x \cos \theta + x^2}$. En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $x \in] -1, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Soit $x \in] -1, 1[$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x \cos \theta + x^2) d\theta$.
4. En déduire, pour $x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$, la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x \cos \theta + x^2) d\theta$.

Exercice 4.1.124 ★ **ENSEA PSI 2010**

Montrer que $f: x \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 + t^2) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$, puis comparer $f(x)$ à $\ln(x)$ quand x tend vers l'infini.

Exercice 4.1.125 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1+t^2} dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Sur quels intervalles f est-elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4.1.126 ★ **IIE PSI 2010**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^n}$.

1. Quel est le domaine de définition de I_n ? Calculer I_1 .
2. Montrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $I'_n(x)$.
3. Trouver une relation entre $I'_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$. En déduire une expression simple de I_n .

Exercice 4.1.127 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $\alpha > 1$ et $f: x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^\alpha}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Étudier l'intégrabilité de f sur son domaine de définition.

Exercice 4.1.128 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+x^3}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 4.1.129 ★ **TPE PC 2006**

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t} dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. La fonction F est-elle continue ? Dérivable ?
3. Montrer que la limite de F en 0^+ vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 4.1.130 ★ **TPE PC 2006**

Existence et continuité de F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t^x) dt$.

Exercice 4.1.131 ★ **X ESPCI PC 2013**

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^x (1 + \sin(2t))^{1/t} dt \right)$.

Exercice 4.1.132 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{\pi/2} \exp(-x \sin t) dt$.

1. Étudier et représenter f .
2. Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4.1.133 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $F: x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{2x \cos t} dt$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F . En déduire une expression de F .

Exercice 4.1.134 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la régularité de f .
3. Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.
4. Représenter le graphe de f .

Exercice 4.1.135 ★ **CCP PSI 2014**

1. Soit $\varphi: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de φ .
 - (b) Montrer que φ est l'unique fonction vérifiant $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
2. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
- (a) Justifier l'existence de S .
 - (b) Calculer $\varphi(\frac{1}{2})$.
 - (c) En calculant $\varphi(n + \frac{1}{2})$, déterminer S .

Exercice 4.1.136 ★ **Centrale PC 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue.
3. Si $x \in D$, montrer que $1-x \in D$ et que $f(1-x) = f(x)$.
4. Donner un équivalent de f aux bornes du domaine de définition.

Exercice 4.1.137 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $F: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F .
2. Exprimer $F(x)$ pour $x \in D$.

Exercice 4.1.138 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $A: (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta) d\theta$.

1. Justifier la définition de A .
2. Montrer, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $A(x, y) = A((\frac{x+y}{2})^2, xy)$.

Exercice 4.1.139 ★ **RMS Mines Ponts PC 2013, 2014 778 Mines Ponts**

PC

Existence et calcul de $F(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})) dx$.

Exercice 4.1.140 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F . La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition ?
2. En déduire la valeur de $F(x)$, sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.1.141 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $F: x \mapsto \int_0^\pi \sqrt{x+\cos t} dt$. Déterminer le domaine de définition de F . Étudier la continuité et la dérivabilité de F .

Exercice 4.1.142 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.1.143 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) e^{-t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f .
3. Donner une expression de f .

Exercice 4.1.144 ★ **Mines Ponts PC 2015, Centrale PSI 2015**

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer, pour $x \in D$, que $f(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln t}{1-t} dt$.

Exercice 4.1.145 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n: x \mapsto \int_0^1 t^{nx} |\ln t|^n dt$.

1. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $I_n(x)$ existe pour tout n .
2. Étudier la continuité de I_n sur son domaine de définition.

Exercice 4.1.146 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $h: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Domaine de définition et calcul de $g: y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dy$?
Il faut ôter le « Soit $x \in \mathbb{R}$ », et étudier $g: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dy$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $t \mapsto h(x, t) f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.1.147 ★ **Centrale PC 2015**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$ et $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2}) + C$.
3. Prouver que $F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} h(t) \sin(xt) dt$ où h est une fonction à préciser. En déduire C .