

Espaces vectoriels normés

Table des matières

5	Espaces vectoriels normés	1
5.1	Normes, distances	1
5.1.1	Normes	1
5.1.2	Norme sur un produit cartésien d'espaces normés	4
5.1.3	Distances	4
5.1.4	Boules ouvertes, boules fermées, sphères	5
5.1.5	Parties bornées	5
5.2	Suites dans un evn	6
5.2.1	Convergence d'une suite	6
5.2.2	Suites extraites	7
5.2.3	Relations de comparaison des suites vectorielles	8
5.2.4	Suites bornées	9
5.2.5	Opérations sur les limites	9
5.3	Topologie d'un espace vectoriel normé	9
5.3.1	Quelques rappels de première année sur la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$	9
5.3.2	Parties ouvertes, fermées d'un evn	11
5.3.3	Adhérence, intérieur, frontière d'une partie d'un evn	12
5.3.4	Parties denses HP	15
5.3.5	Convexité	15
5.4	Étude locale d'une application, continuité	16
5.4.1	Limite en un point	16
5.4.2	Opérations sur les limites	17
5.4.3	Relations de comparaison HP	18
5.4.4	Continuité	19
5.4.5	Fonctions lipschitziennes	20
5.5	Applications linéaires continues	21
5.5.1	Continuité d'une application linéaire	21
5.5.2	Continuité d'une application bilinéaire, d'une application multilinéaire	22
5.5.3	Norme subordonnées d'une application linéaire	23
5.6	Topologie d'un evn de dimension finie	25
5.6.1	Particularité des evns de dimension finie	25
5.6.2	Compacts d'un evn dimension finie	26
5.6.3	Convergence d'une suite en dimension finie	26
5.6.4	Limite d'une fonction en dimension finie	27
5.6.5	Applications linéaires, bilinéaires et multilinéaires en dimension finie	28
5.7	L'essentiel	28

5.1 Normes, distances

5.1.1 Normes

DÉFINITION 5.1 ★ Norme

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On appelle *norme* une application

$$\mathcal{N} : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathcal{N}(x) \end{cases}$$

vérifiant les trois propriétés :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ (homogénéité).
2. $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (inégalité triangulaire).
3. $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$ (séparation).

On notera $\|x\| = \mathcal{N}(x)$. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un *espace vectoriel normé*.

Remarque 5.1 On a toujours $\mathcal{N}(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$, puisque $\mathcal{N}(0_E) = \mathcal{N}(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$.

Remarque 5.2 On a pour tout $x \in E, \mathcal{N}(x) \geq 0$. En effet, pour $x \in E$, on a par inégalité triangulaire $2\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(x) \geq \mathcal{N}(x - x) = \mathcal{N}(0) = 0$.

Remarque 5.3 Dans un evn, on dit qu'un vecteur $x \in E$ est *unitaire* lorsque $\|x\| = 1$. Si $x \in E$ est un vecteur non-nul, on peut lui associer le vecteur *normalisé* $\frac{x}{\|x\|}$.

PROPOSITION 5.1 ★ Minoration de l'inégalité triangulaire

Si $\|\cdot\|$ est une norme, pour deux vecteurs $(x, y) \in E^2$, on peut minorer $\|x - y\|$ au choix par $\|x\| - \|y\|$ ou $\|y\| - \|x\|$:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Démonstration En utilisant deux fois l'inégalité triangulaire : $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ et $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$ donc $\|x\| - \|y\|$ et $\|y\| - \|x\|$ sont tous deux majorés $\|x - y\|$ d'où le résultat.

Un premier exemple fondamental de norme est donnée par la valeur absolue (respectivement le module) sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{C}$).

PROPOSITION 5.2 ★ La valeur absolue et le module définissent des normes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Les couples $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ où $|\cdot|$ désignent respectivement l'application valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et l'application module sur $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels.

Un seconde exemple fondamental de norme est celle qu'on construit à partir d'un produit scalaire dans un espace préhilbertien.

PROPOSITION 5.3 ★ Norme euclidienne

Si $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E , on définit la *norme euclidienne* associée :

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)}$$

On dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration Le fait que pour tout $x \in E, (x | x) \geq 0$ et que $\|x\|$ est bien définie provient de la positivité du produit scalaire. Il est alors clair que $\|\cdot\|$ vérifie l'axiome de positivité.

Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{(x | x)} = |\lambda| \|x\|$$

et $\|\cdot\|$ est homogène.

Si $x, y \in E$ alors par bilinéarité, symétrie du produit scalaire et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Alors $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et on a prouvé l'inégalité triangulaire.

Enfin, si $x \in E$ est tel que $\|x\| = 0$ alors $(x | x) = 0$ ce qui n'est possible, le produit scalaire étant défini, que si $x = 0$ d'où la propriété de séparation.

THÉORÈME 5.4 ★ Trois normes classiques sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$, on dispose des trois normes classiques suivantes. Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$1. \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

$$2. \text{ Le produit scalaire } (x | y) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \text{ et la norme euclidienne associée : } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2},$$

$$3. \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Démonstration Le fait que $\|\cdot\|_2$ soit une norme a été prouvé dans la proposition précédente. On laisse la preuve pour les deux autres normes en exercice.

THÉORÈME 5.5 ★ Trois normes classiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dispose des trois normes classiques suivantes. Pour une matrice $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$1. \|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|,$$

$$2. \text{ Le produit scalaire } (M | M') = \text{Tr}(\overline{M}^T M') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{i,j}} a'_{i,j} \text{ et la norme euclidienne associée : } \|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\overline{M}^T M)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2},$$

$$3. \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Démonstration Ces normes coïncident avec les 3 précédentes mais sur $\mathbb{K}^{n^2}$.

THÉORÈME 5.6 ★ Trois normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b])$

Sur l'espace $E = \mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur le segment $[a, b]$, on définit les trois normes :

$$1. \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \text{ (norme de la convergence en moyenne),}$$

$$2. \text{ Le produit scalaire } (f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt \text{ et la norme euclidienne associée (norme de la convergence en moyenne quadratique) :}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt},$$

$$3. \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \text{ (norme de la convergence uniforme).}$$

THÉORÈME 5.7 ★ Espaces L^p

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. On note

$$L^1(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continue et intégrable sur } I\}$$

et pour $f \in L^1(I)$,

$$\|f\|_1 = \int_I |f|$$

Alors $(L^1(I), \|\cdot\|_1)$ est un evn.

2. On note

$$L^2(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } |f|^2 \text{ intégrable sur } I\}$$

et pour $f, g \in L^2(I)^2$,

$$(f | g) = \int_I f g \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$$

Alors $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$ et $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ est un evn.

3. On note

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ bornée sur } I\}$$

et pour $f \in L^\infty(I)$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Alors $(L^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn.

THÉORÈME 5.8 ★★ Normes sur les espaces de suites

1. On définit l'espace des suites :

$$\ell^1(\mathbb{C}) = \{u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

2.

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \{u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^2 \text{ converge}\}$$

et le produit scalaire $(u | v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ ainsi que la norme euclidienne associée :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

3.

$$\ell^\infty(\mathbb{C}) = \{u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ est bornée}\}$$

et la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

5.1.2 Norme sur un produit cartésien d'espaces normés

DÉFINITION - PROPOSITION 5.2 ★ Norme sur un produit cartésien d'espaces normés

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_p, \|\cdot\|_{E_p})$ des espaces normés. Alors l'application :

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto \|x\| = \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|x_i\|_{E_i} \end{cases}$$

définit une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$. L'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est appelé *espace produit des E_i pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$* .

Démonstration

- 1 Par construction, $\|\cdot\|$ est à valeurs positives car c'est le cas des $\|\cdot\|_{E_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
- 2 De la même façon, chaque $\|\cdot\|_{E_i}$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ vérifie l'axiome d'homogénéité donc pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda x\| = \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|\lambda x_i\| = \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} |\lambda| \|x_i\| = |\lambda| \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|x_i\| = |\lambda| \|x\|$$

et $\|\cdot\|$ satisfait aussi l'axiome d'homogénéité.

- 3 On démontre de même l'inégalité triangulaire.
- 4 Enfin si $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ est tel que $\|x\| = 0$ alors $\sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|x_i\| = 0$ ce qui amène $\|x_i\| = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et donc $\|x\| = 0$. On a alors aussi vérifié l'axiome de séparation.

Remarque 5.4 Un corollaire immédiat de cette proposition et de la proposition 5.2 est que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

5.1.3 Distances

DÉFINITION 5.3 ★ Distance

Soit E un ensemble. Une application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une *distance* sur E si elle vérifie les propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$ (positivité),
2. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
4. $\forall (x, y) \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation).

PROPOSITION 5.9 ★ Distance associée à une norme

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, l'application

$$d : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{cases}$$

est une *distance* appelée *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$.

Démonstration La distance d est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On vérifie les 3 axiomes définissant une distance :

1. $d(y, x) = \|y - x\| = \|x - y\| = d(x, y)$.
2. $d(x, z) = \|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(x, y) + d(y, z)$.
3. $d(x, y) = 0 \iff \|y - x\| = 0 \iff y - x = 0 \iff x = y$.

Remarque 5.5 Toute norme permet de définir une distance mais la réciproque est fautive. Un contre exemple est donné par la distance ultramétrique définie par $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En effet, si d était associée à une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E alors pour un vecteur $x \neq 0$ de E et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on aurait

$$1 = d(x, 0) = d(\lambda x, 0) = \|\lambda x\| = \lambda \|x\| = \lambda$$

ce qui est impossible car λ est quelconque.

DÉFINITION 5.4 ★★ Distance à une partie

Soit un evn $(E, \|\cdot\|)$ et une partie $A \subset E$ non vide. On définit la *distance d'un vecteur $x \in E$ à la partie A* par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Remarque 5.6 La distance de x à A est bien définie car l'ensemble $\{d(x, a) \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minorée par 0 donc il admet une borne inférieure.

Remarque 5.7 On définit également la distance entre deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$ par :

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

5.1.4 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

DÉFINITION 5.5 ★ Boules ouvertes, fermées, sphères

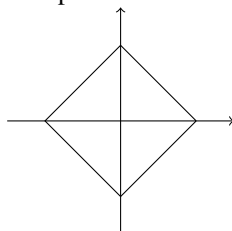
Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$, soit un vecteur $a \in E$ et un réel positif $r > 0$. On note d la distance associée à $\|\cdot\|$.

On définit :

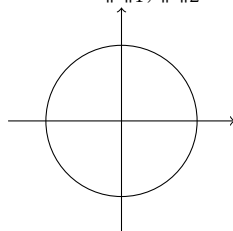
- La *boule ouverte* de centre a et de rayon r : $B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$.
- La *boule fermée* de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$.
- La *sphère* de centre a et de rayon r : $S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$.

Exemple 5.1

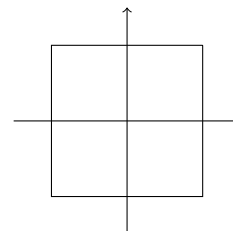
- Dans $\mathbb{R}$ avec la norme donnée par la valeur absolue, on a, pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$
- Dans $\mathbb{R}^2$, on représente la boule unité pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. On obtient :



La boule unité de $\mathbb{R}^2$
pour la norme $\|\cdot\|_1$



La boule unité de $\mathbb{R}^2$
pour la norme $\|\cdot\|_2$



La boule unité de $\mathbb{R}^2$
pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

5.1.5 Parties bornées

DÉFINITION 5.6 ★★ Partie bornée

Soit $A \subset E$ une partie d'un evn. On dit que la partie A est bornée s'il existe $R > 0$ tel que $\forall a \in A, \|a\| \leq R$.

Remarque 5.8 Cela signifie que la partie A est incluse dans une boule (ouverte ou fermée).

Remarque 5.9 Une partie A d'un espace métrique (E, d) est bornée si et seulement si il existe $R > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$, on a $d(x, y) \leq R$.

DÉFINITION 5.7 ★★ Application bornée

Soit un ensemble A et un evn $(E, \|\cdot\|)$. On dit qu'une application $f : A \rightarrow E$ est bornée si son image est bornée dans E , c'est-à-dire s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in A, \|f(x)\| \leq M$. On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A vers E .

PROPOSITION 5.10 ★ Evn des applications bornées

$\mathcal{B}(A, E)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme : $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$.

5.2 Suites dans un evn

5.2.1 Convergence d'une suite

DÉFINITION 5.8 ★★ Suites

Soit un evn $(E, \|\cdot\|)$. On appelle *suite* d'éléments de E , une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u_n \end{cases}$$

notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $E^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E .

DÉFINITION 5.9 ★ Convergence d'une suite

Soit un evn $(E, \|\cdot\|)$. On dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $a \in E$ (ou que a est la limite de (u_n)) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - a\| \leq \varepsilon$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.

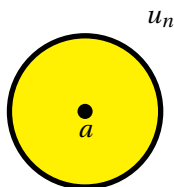


FIGURE 5.1 – Suite convergente

Remarque 5.10 Cela revient à dire que pour tout rayon de boule $r > 0$, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la boule (ouverte ou fermée) de centre a et de rayon r .

PROPOSITION 5.11 Unicité de la limite

Si (u_n) admet une limite alors celle-ci est unique.

Démonstration En effet, si a, a' sont des limites de (u_n) alors pour un $\varepsilon > 0$, il existe des rangs N, N' tels que si $n \geq N$ alors $\|u_n - a\| \leq \varepsilon/2$ et si $n \geq N'$ alors $\|u_n - a'\| \leq \varepsilon/2$ donc pour $n \geq \max(N, N')$, on a $\|a - a'\| = \|a - u_n + u_n - a'\| \leq \|u_n - a\| + \|u_n - a'\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, ceci entraîne que $a = a'$ et on a donc bien unicité de la limite.

Remarque 5.11 La définition donnée pour la convergence et la valeur de la limite d'une suite dépend de la norme choisie. En dimension finie, il n'en est en fait rien, comme nous le verrons dans la section 5.6.

Remarque 5.12 S'il existe $a \in E$ tel que la suite (u_n) converge vers a , on dit que la suite (u_n) est *convergente*. Sinon, on dit que la suite est *divergente*.

PROPOSITION 5.12 Caractérisation des suites convergentes

On a équivalence entre

- 1 $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$
- 2 $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$

Démonstration

$\Rightarrow$ On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $|\|u_n - a\| - 0| = \|u_n - a\| \leq \varepsilon$ donc $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$\Leftarrow$ Réciproquement si $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - a\| = |\|u_n - a\| - 0| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$ donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

5.2.2 Suites extraites**DÉFINITION 5.10 Suite extraite**

On dit qu'une suite (v_n) est une *suite extraite* ou une *sous suite* d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

LEMME 5.13 ★

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$$

Démonstration Par récurrence :

Si $n = 0$ alors comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a bien $\varphi(0) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\varphi(n) \geq n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geq n+1$. Comme φ est strictement croissante, on a nécessairement $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Par conséquent $\varphi(n+1) \geq n+1$. (Si pour deux entiers x, y , on a $x > y$ alors $x \geq y+1$).

La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.

PROPOSITION 5.14 ★★★ Une suite extraite d'une suite convergente est convergente

Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l

Démonstration Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. Montrons que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq N$. D'après le lemme précédent, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$.

COROLLAIRE 5.15 ★ Critère de divergence d'une suite

Soit (u_n) une suite d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\psi(n)}$ telles que :

(H1) $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_1 \in E,$

(H2) $u_{\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_2 \in E,$

(H3) $l_1 \neq l_2.$

Alors la suite (u_n) est divergente.

Démonstration Il suffit de prendre la contraposée de la précédente proposition : si (u_n) admet des suites extraites qui ont des limites différentes, alors elle diverge.

Enfin, on rappelle ce théorème, démontré en première année dans le cas des suites réelles ou complexes, qui reste vrai pour des suites à valeurs dans un evn.

PROPOSITION 5.16 ★★ Deux suites extraites particulières

Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in E$, alors la suite (u_n) converge vers l .

Démonstration Exactement comme en première année.

5.2.3 Relations de comparaison des suites vectorielles Hors programme en PC mais instructif

On considère un $\mathbb{K}$ -evn $(E, \|\cdot\|)$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

DÉFINITION 5.11 ★ Domination

On dit qu'une suite vectorielle $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est *dominée* par une suite scalaire $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si :

$$\exists K > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq K|\alpha_n|$$

On écrit alors $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$. Si la suite (α_n) ne s'annule pas, cela signifie que la suite vectorielle $\left(\frac{1}{\alpha_n}u_n\right)$ est bornée dans E .

DÉFINITION 5.12 ★ Négligeabilité

On dit qu'une suite vectorielle $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant une suite scalaire $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq \varepsilon|\alpha_n|$$

On note alors $u_n = o(\alpha_n)$. Lorsque la suite scalaire (α_n) ne s'annule pas, cela équivaut à dire que la suite vectorielle $\left(\frac{1}{\alpha_n}u_n\right)$ converge vers 0 dans $(E, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 5.17 ★★★★★ Propriétés

Soient deux suites vectorielles $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et des suites scalaires $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(\beta_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(\gamma_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, voici quelques propriétés simples à démontrer.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.
2. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.
3. Si $\alpha_n = \mathcal{O}(\beta_n)$ et $u_n = \mathcal{O}(\gamma_n)$, alors $\alpha_n u_n = \mathcal{O}(\beta_n \gamma_n)$.
4. Si $u_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.
5. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $k \in \mathbb{K}$, alors $k u_n = o(\alpha_n)$.
6. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n + v_n = o(\alpha_n)$.
7. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = \mathcal{O}(\beta_n)$, alors $u_n = o(\beta_n)$.
8. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\beta_n)$, alors $u_n = o(\beta_n)$.

DÉFINITION 5.13 ★ Suites équivalentes

Deux suites vectorielles $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ sont *équivalentes* lorsque

$$u_n - v_n = o(\|v_n\|)$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - v_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 5.13 Pour les suites scalaires, lorsque v_n ne s'annule pas, dire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ revient à dire que

$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ceci n'a pas de sens pour les suites vectorielles (on ne divise pas par un vecteur !).

PROPOSITION 5.18 ★★★★★ Relation d'équivalence

Sur $E^{\mathbb{N}}$, la relation $u \mathcal{R} v \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 5.19 ★★ Equivalents et limites

Soient deux suites vectorielles $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

1. $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in E \end{cases} \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l.$
2. $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in E \\ l \neq 0 \end{cases} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l \text{ (suite constante).}$

5.2.4 Suites bornées**DÉFINITION 5.14 ★ Suite bornée**

On dit qu'une suite (u_n) est *bornée* si et seulement si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E .

PROPOSITION 5.20 ★★ Espace des suites bornées

L'ensemble des suites bornées d'un evn $(E, \|\cdot\|)$, noté $\ell^\infty(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$. L'application

$$\mathcal{N} : \begin{cases} \ell^\infty(E) & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u_n) & \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| \end{cases}$$

est une norme sur $\ell^\infty(E)$.

PROPOSITION 5.21 ★★ Une suite convergente est bornée

Dans un evn, toute suite (u_n) convergente est bornée : il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Démonstration Soit (u_n) une suite convergente de E de limite a . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\|u_n - a\| \leq 1$. Donc $\{u_n \mid n \geq N\} \subset \overline{B}(a, 1)$. Posons $R = \max\{1, \|u_0 - a\|, \dots, \|u_{N-1} - a\|\}$. Alors $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}(a, R)$ et la suite est bornée.

5.2.5 Opérations sur les limites**PROPOSITION 5.22 Opérations sur les limites**

L'ensemble des suites convergentes de E , est un sev de $\mathcal{S}(E)$ (et même de $\ell^\infty(E)$). Autrement dit : si $(u_n), (v_n) \in \mathcal{S}(E)$ convergent respectivement vers l et l' alors $\alpha(u_n) + \beta(v_n)$ converge vers $\alpha l + \beta l'$.

Démonstration C'est la même démonstration que dans le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Voir le cours de première année.

⚠ Attention 5.2 Tout comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, on ne peut parler de suite à valeurs dans E croissante, décroissante, ... (à moins que $E = \mathbb{R}$!)

5.3 Topologie d'un espace vectoriel normé**5.3.1 Quelques rappels de première année sur la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$** **DÉFINITION - PROPOSITION 5.15 Plus grand élément, plus petit élément**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et un réel a . On dit que a est :

- le *plus grand élément* de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$.
- le *plus petit élément* de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique. Nous le noterons $\max(A)$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique et nous le noterons $\min(A)$.

Démonstration Supposons que a et a' soient deux plus grands éléments de A . Comme a est un plus grand élément de A et que $a' \in A$, on doit avoir $a' \leq a$. De façon symétrique, on a aussi $a' \geq a$. Il s'ensuit que $a = a'$.

Exemple 5.3

- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ n'ont pas de plus grand élément.
- $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (0) mais pas $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$.
- $[0, 1]$ possède un plus grand et un plus petit élément.
- $]0, 1[$ ne possède ni de plus grand ni de plus petit élément.
- $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ne possède pas de plus grand élément dans $\mathbb{Q}$ mais il en possède un dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\sqrt{2}$.

DÉFINITION 5.16 Majorant, minorant

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est

- un *majorant* de A si et seulement si $\forall x \in A, x \leq a$.
- un *minorant* de A si et seulement si $\forall x \in A, a \leq x$.

Remarque 5.14 Un majorant n'est pas unique. Le plus grand élément d'une partie, s'il existe, est un majorant de la partie qui, de plus, appartient à cette partie.

Exemple 5.4

- La partie $[0, 1]$ possède par exemple comme majorants 2 et 3 et comme minorants -1 et 0.
- La partie $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ admet par exemple 5 comme majorant.

DÉFINITION 5.17 Borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$)

- La *borne supérieure* de A est, si elle existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . On la note $\sup(A)$.
- La *borne inférieure* de A est, si elle existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A . On la note $\inf(A)$.

Exemple 5.5

- 0 est la borne inférieure de $[0, 1]$ ou de $]0, 1[$.
- 1 est la borne supérieure de $[0, 1]$ ou de $]0, 1[$.
- $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. X possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\sqrt{2}$.

PROPOSITION 5.23 Unicité de la borne supérieure

Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure alors celle-ci est unique.

Démonstration Nous avons montré que le plus petit élément d'un ensemble (ici les majorants de A) était unique.

Axiome de la borne supérieure

Toute partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Remarque 5.15 Cette propriété distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. En effet, la partie $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

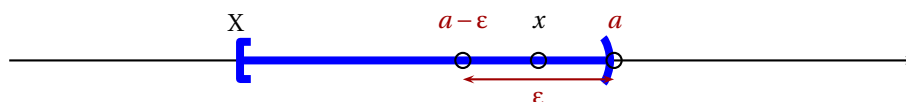


FIGURE 5.2 – Caractérisation de la borne supérieure

THÉORÈME 5.24 ★★★ Caractérisation de la borne supérieure

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel. Il y a équivalence entre :

- 1 a est la borne supérieure de X .
- 2 $\forall x \in X, x \leq a$ et $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, x \in]a - \epsilon, a]$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que a est la borne supérieure de X . Par définition de celle-ci, a est un majorant de X et la première affirmation de (2) est prouvée. Soit $\epsilon > 0$, si $a - \epsilon$ était un majorant de X , on aurait $a \leq a - \epsilon$ ce qui est faux. Puisque $a - \epsilon$ n'est pas un majorant de X , il existe $x \in X$ tel que $a - \epsilon < x$.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que (2) est vraie et montrons que a est la borne supérieure de X . Il est clair que a est un majorant de X . Il faut montrer que c'est le plus petit des majorants de X . Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un réel a' qui majore X et qui est plus petit que a . On a donc :

$$\forall x \in X, x \leq a' < a$$

Posons $\epsilon = a - a' > 0$. En appliquant (2), on peut affirmer qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $x \in]a - \epsilon, a] =]a', a]$. Mais alors $a' < x$ et a' ne peut être un majorant de X ce qui prouve la seconde implication par l'absurde.

Remarque 5.16 Une erreur commise fréquemment dans la démonstration précédente : le réel $a - \epsilon$ n'appartient pas nécessairement à la partie A . Si l'on considère la partie $A = [0, 1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, elle possède une borne supérieure $\sup A = 1$ et pour tout entier non nul n , avec $\epsilon = 1/n$, $1 - \epsilon \notin A$. Cette erreur provient du fait que l'on fait souvent des dessins avec des parties A qui sont des intervalles ouverts lorsqu'on raisonne sur les propriétés de la borne supérieure. **Multimédia** : représenter une partie A "à trous", faire glisser $a - \epsilon$ et colorer un point $x \in A$ tel que $\sup A - \epsilon \leq x \leq \sup A$.

THÉORÈME 5.25 ★★★ Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel. Il y a équivalence entre :

- 1 a est la borne supérieure de X .
- 2 a est un majorant de X et il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de limite a .

Démonstration

- ⇒ Si a est la borne supérieure de X alors d'après le théorème précédent, a est un majorant de X et : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \in]a - \varepsilon, a]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\varepsilon = 2^{-n}$, il existe $x \in]a - \varepsilon, a] \cap X$. Notons x_n ce point. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a .
- ⇒ Réciproquement, si une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et si a est un majorant de X alors comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand $x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Mais a est un majorant de X et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Donc a majore chaque x_n et on a en fait $x_n \in]a - \varepsilon, a]$. On démontre ainsi que pour tout $\varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a] \cap X \neq \emptyset$. On en déduit, par le théorème précédent, que a est la borne supérieure de X .

5.3.2 Parties ouvertes, fermées d'un evn

Dans toute la suite, on considère un evn $(E, \|\cdot\|)$.

DÉFINITION 5.18 ★★ Voisinage

Soit $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que la partie V est un *voisinage* du point a si elle contient une boule ouverte centrée en a :

$$\exists r > 0, B(a, r) \subset V$$

On notera $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point a .

Remarque 5.17 Une union quelconque de voisinages de a est encore un voisinage de a . Une intersection *finie* de voisinages de a est encore un voisinage de a .

Remarque 5.18 **HP** La notion de voisinage d'un point dépend de la norme. Si deux normes sont équivalentes, les voisinages d'un point pour une norme sont les mêmes que les voisinages du point pour l'autre norme.

DÉFINITION 5.19 ★ Ouvert

Une partie $O \subset E$ est dite *ouverte* si pour tout $a \in O$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r soit toute entière incluse dans O : $B(a, r) \subset O$:

$$\forall a \in O, \exists r > 0, B(a, r) \subset O$$

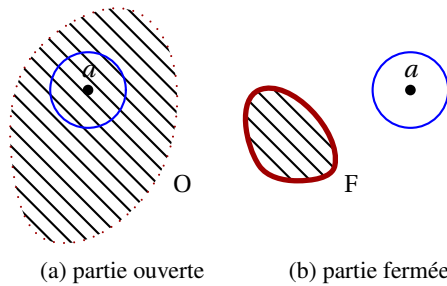


FIGURE 5.3 – Parties ouvertes, fermées

Remarque 5.19 Une partie E est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points. Voir l'exercice ?? page ??.

DÉFINITION 5.20 ★ Fermé

Une partie $F \subset E$ est dite *fermée* si son complémentaire est ouvert :

$$\forall x \in E \setminus F, \exists r > 0, B(x, r) \subset E \setminus F$$

Exemple 5.6

- Une boule ouverte est un ouvert, voir l'exercice ?? page ??.
- Une boule fermée est un fermé, voir l'exercice ?? page ??.

- Une sphère est un fermé, voir l'exercice ?? page ??.
 - L'espace tout entier E est à la fois ouvert et fermé. En effet pour tout $x \in E$, on a $B(x, 1) \subset E$ donc E est ouvert. De plus, pour tout $r > 0$ $B(x, r) \cap E = B(x, r) \neq \emptyset$ donc E est fermé. Par passage au complémentaire, on en déduit que l'ensemble vide $\emptyset$ est aussi ouvert et fermé.
 - Un singleton de E est fermé. En effet, si $x \in E$ alors pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap E = \{x\} \neq \emptyset$.
 - Une union finie de points de E est donc fermée comme union finie de fermées/
 - L'espace tout entier E privé d'un nombre fini de points est ouvert comme complémentaire d'un ensemble fermé.
- Voir l'exercice ?? page ?? pour les deux premiers points.

⚠ Attention 5.7 Une partie d'un espace vectoriel normé n'est pas toujours ouverte ou fermée. Elle peut être ouverte et fermée, elle peut aussi être ni ouverte, ni fermée.

THÉORÈME 5.26 ★ Réunion, intersection d'ouverts

1. Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de E , alors la réunion $\bigcup_{i \in I} O_i$ est encore une partie ouverte.
2. Une intersection *finie* de parties ouvertes est encore une partie ouverte.

Démonstration Voir l'exercice ?? page ??.

THÉORÈME 5.27 ★ Réunion, intersection de fermés

1. Une intersection quelconque de fermés est encore un fermé.
2. Une union *finie* de fermés est encore un fermé.

Démonstration Voir l'exercice ?? page ??.

5.3.3 Adhérence, intérieur, frontière d'une partie d'un evn

DÉFINITION 5.21 ★★ Intérieur d'une partie

Soit $A \subset E$ une partie d'un evn $(E, \|\cdot\|)$.

1. Un point $a \in E$ est dit *intérieur* à la partie A s'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans la partie A :

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset A$$

2. L'ensemble de tous les points intérieurs d'une partie A est noté $\overset{\circ}{A}$ et s'appelle *l'intérieur* de la partie A .

Remarque 5.20 Si a est un point intérieur à A alors $a \in A$.

PROPOSITION 5.28 ★ L'intérieur d'une partie est le plus grand ouvert contenu dans cette partie

Soit $A \subset E$ une partie d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. Alors l'intérieur de A est le plus grand ouvert de E contenu dans A :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{A \supset O \\ O \text{ ouvert}}} O$$

Démonstration Posons $B = \bigcup_{\substack{A \supset O \\ O \text{ ouvert}}} O$.

- L'intérieur de A est un ouvert. En effet soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais pour tout $x' \in B(x, r)$, on a $B(x', r - \|x' - x\|) \subset B(x, r) \subset A$ donc $x' \in \overset{\circ}{A}$. On montre ainsi que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$.
- Comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E contenu dans A , on a $\overset{\circ}{A} \subset B$.
- Soit O un ouvert de E contenu dans A . Soit $x \in O$ alors comme O est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O \subset A$ donc x est un point intérieur à A et $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc $O \subset \overset{\circ}{A}$ et $B \subset \overset{\circ}{A}$.

Remarque 5.21 Si O est ouvert alors le plus grand ouvert de O contenant O est O lui-même donc $\overset{\circ}{O} = O$.

DÉFINITION 5.22 ★ Adhérence

Soit une partie $A \subset E$.

1. Un point $a \in E$ est dit *adhérent* à la partie A lorsque toute boule ouverte centrée en a rencontre la partie A :

$$\forall r > 0, \quad B(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

2. L'ensemble des points adhérents à la partie A s'appelle *l'adhérence* de la partie A et se note $\overline{A}$.

Remarque 5.22 La borne supérieure $\sup A$ d'une partie non vide et majorée de A est un point adhérent à A . En effet, si $M = \sup A$ alors d'après le théorème de caractérisation de la borne supérieure, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A : \quad M - \varepsilon < x < M$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(M, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

PROPOSITION 5.29 ★ L'adhérence d'une partie est le plus petit fermé contenant cette partie

Soit $A \subset E$ une partie d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. Alors l'adhérence de A est le plus petit fermé de E contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

Démonstration

— Montrons que l'adhérence de A est un fermé de E . Pour ce faire, montrons que $\overline{A}^c$ est ouvert. On a les équivalences :

$$x \in \overline{A}^c \iff \exists r > 0 : \quad B(x, r) \cap A = \emptyset \iff x \in \overset{\circ}{A^c}.$$

On en déduit que $\overline{A}^c = \overset{\circ}{A^c}$ c'est-à-dire qu'on a $\overline{A} = \left(\overset{\circ}{A^c} \right)^c$. Donc $\overline{A}$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert de E . Il est

par ailleurs évident que $A \subset \overline{A}$.

— Notons $B = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$. Il est alors clair que $B \subset \overline{A}$.

— Soit F un fermé de E contenant A et soit $a \in \overline{A}$. Si $a \notin F$ alors $a \in F^c$ qui est ouvert. Donc il existe une boule $B(a, r)$ contenue dans F^c . Mais comme $\overline{A} \subset F$, cette boule est disjointe de $\overline{A}$ ce qui vient contredire le fait que $a \in \overline{A}$. Par conséquent $a \in F$ et $\overline{A} \subset B$. On montre ainsi que $\overline{A} = B$.

Remarque 5.23 Si F est fermé alors le plus petit fermé de F contenant F est F lui-même donc $\overline{F} = F$.

DÉFINITION 5.23 ★ Frontière d'une partie

On appelle *frontière* d'une partie A , l'ensemble $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

PROPOSITION 5.30 ★ La frontière d'une partie est fermée

Soit A une partie d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. Alors $\text{Fr}(A)$ est fermée.

Démonstration En effet, $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \left(\overset{\circ}{A} \right)^c$ est donnée comme l'intersection de deux fermés et est donc aussi fermée, voir exercice ?? page ??.

Exemple 5.8

- Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Fr}([a, b]) = \{a, b\}$;
- Si $B = B(a, r)$, $\text{Fr}(B) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$;
- $\text{Fr}(Q) = \mathbb{R}$.

THÉORÈME 5.31 ★ Caractérisation séquentielle des points adhérents

Soit A une partie non-vide d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. Soit $x \in E$. On a équivalence entre :

- $x \in \bar{A}$;
- il existe une suite de points de A , $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Démonstration

- $\Rightarrow$ Soit $x \in \bar{A}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 2^{-n}) \cap A \neq \emptyset$. Soit x_n un point de cette intersection. On construit ainsi une suite (x_n) de points de A qui converge vers x .
- $\Leftarrow$ Réciproquement, s'il existe (x_n) une suite de points de A qui converge vers x alors pour tout $r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(x, r)$. Donc pour tout $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ et $x \in \bar{A}$.

Remarque 5.24 Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors on a vu dans la remarque 5.22 que sa borne supérieure $\sup A$ est un point adhérent à A . Alors d'après le théorème précédent, il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de points de A telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup A$. Par ailleurs a est un majorant de A . On retrouve ainsi le théorème 5.25 page 11

THÉORÈME 5.32 ★ Caractérisation séquentielle des parties fermées

Soit F une partie non vide d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ On a équivalence entre :

- F est fermé ;
- Toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F .

Démonstration

- $\Rightarrow$ On suppose que F est fermé. Donc $F = \bar{F}$. Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F . On note l sa limite. Alors par le théorème précédent $l \in \bar{F} = F$.
- $\Leftarrow$ Réciproquement, si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F , montrons que F est fermé. Il suffit pour ce faire de montrer que $\bar{F} = F$. On sait déjà que $F \subset \bar{F}$. Soit $x \in \bar{F}$. Alors il existe d'après le théorème précédent une suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Mais, par hypothèse, on sait que $x \in F$. Donc $\bar{F} \subset F$. On prouve ainsi que $F = \bar{F}$ et que F est fermé.

Remarque 5.25 Ce théorème important dit qu'une partie F est fermée si elle contient les limites de toutes les suites convergentes de F .

PLAN 5.1 : Pour montrer qu'une partie F est fermée

- Considérons une suite quelconque de points de F : $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$.
- On suppose que cette suite converge vers un point de E : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in E$.
- Montrons que la limite reste dans F : $x \in F$.

5.3.4 Parties denses HP**DÉFINITION 5.24 ★ Partie dense**

On considère un evn $(E, \|\cdot\|)$.

1. On dit que la partie A est *dense* dans la partie B lorsque $B \subset \bar{A}$.
2. On dit que la partie A est *dense* dans E lorsque $\bar{A} = E$.

THÉORÈME 5.33 ★ Caractérisation séquentielle des parties denses

Soit une partie A d'un evn $(E, \|\cdot\|)$. La partie A est dense dans B si et seulement si pour tout point de B , il existe une suite de points de A qui converge vers ce point :

$$(A \text{ est dense dans } B) \iff (\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b)$$

(i) (ii)

THÉORÈME 5.34 ★ L'ensemble des rationnels ou des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

5.3.5 Convexité

DÉFINITION 5.25 ★ Partie convexe

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $A \subset E$ une partie de E . On dit que A est *convexe* si tout segment ayant comme extrémités deux points de A est tout entier dans A :

$$\forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1-t)y \in A.$$

PROPOSITION 5.35 ★ Convexité des boules

Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$, pour tout $a \in E$ et $r > 0$, les boules ouvertes $B(a, r)$ et fermées $\overline{B}(a, r)$ sont convexes.

Démonstration Montrons que $B(a, r)$ est convexe. Soient $x, y \in B(a, r)$ alors $\|x - a\| < r$ et $\|y - a\| < r$. Soit $t \in [0, 1]$ et $z = tx + (1-t)y$. On a grâce à l'inégalité triangulaire

$$\|z - a\| = \|t(x - a) + (1-t)(y - a)\| \leq t\|x - a\| + (1-t)\|y - a\| < tr + (1-t)r = r$$

donc $z \in B(a, r)$ et $B(a, r)$ est convexe. La démonstration est identique pour les boules fermées.

Exemple 5.9

- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ;
- Les sevs d'une $\mathbb{K}$ -espace vectoriel sont des convexes.

Remarque 5.26 L'épigraphe d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ situés au dessus du graphe de f . La fonction f est dite *convexe* si son épigraphe est convexe.

Supposons que f soit convexe et considérons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de son épigraphe. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $tA + (1-t)B$ est encore un point de l'épigraphe. Ce qui signifie que $f(tx_A + (1-t)y_A) \leq ty_A + (1-t)y_B$. En particulier, si A et B sont des points du graphe de f , il vient $f(tx_A + (1-t)y_A) \leq tf(x_A) + (1-t)y_B$.

Réciproquement, si pour tout $x_A, y_A \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a $f(tx_A + (1-t)y_A) \leq tf(x_A) + (1-t)y_B$ alors pour tout $y_A \geq f(x_A)$ et $y_B \geq f(x_B)$, on a $f(tx_A + (1-t)y_A) \leq ty_A + (1-t)y_B$ et donc, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont éléments de l'épigraphe de f , il en est de même de $tA + (1-t)B$. Donc l'épigraphe de f est convexe.

On a montré l'équivalence entre :

1. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ;
2. $\forall x, x' \in I, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$.

5.4 Étude locale d'une application, continuité

5.4.1 Limite en un point

DÉFINITION 5.26 ★ Limite

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une application $f : A \rightarrow F$. Soit un point $a \in \overline{A}$ adhérent à A et $l \in F$. On dit que la fonction f admet l comme limite au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

On écrit alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Remarque 5.27 Éviter l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et en particulier parler de la limite d'une fonction *avant d'avoir justifié son existence* !

Remarque 5.28 La définition précédente s'écrit avec des boules fermées :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad f(\overline{B}(a, \eta) \cap A) \subset \overline{B}(l, \varepsilon)$$

et avec des boules ouvertes :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad f(B(a, \eta) \cap A) \subset B(l, \varepsilon).$$

THÉORÈME 5.36 ★ Unicité de la limite

Avec les notations précédentes,

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1 \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2 \end{cases} \implies l_1 = l_2$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(a, r_1) \cap A$, $\|f(x) - l_1\|_F \leq \varepsilon/2$ et il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(a, r_2) \cap A$, $\|f(x) - l_2\|_F \leq \varepsilon/2$. Donc, si $r = \min(r_1, r_2)$, pour tout $x \in \overline{B}(a, r) \cap A$, on a :

$$\|l_2 - l_1\|_F \leq \|l_2 - x\|_F + \|l_1 - x\|_F \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, on a nécessairement $l_1 = l_2$.

THÉORÈME 5.37 ★ Théorème de majoration

On considère une norme $\|\cdot\|_E$ sur E . On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un voisinage $V \in \mathcal{V}_a$ tels que :

(H1) $\forall x \in V, \|f(x) - l\|_F \leq g(\|x - a\|_E)$

(H2) $g(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$

Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_0 g = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|\theta| < \eta$ alors $0 \leq g(\theta) < \varepsilon$. Mais alors si $x \in V \cap B(a, \eta)$, alors $\theta = \|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - l\|_F \leq g(\|x - a\|_E) \leq \varepsilon$. Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Remarque 5.29 On définit également des limites « infinies » :

1. Si $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ lorsque

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \implies f(x) \geq A$$

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ et $l \in F$, on dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

3. Si $f : A \subset E \rightarrow F$, $l \in F$, on dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} l$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \in A, \|x\|_E \geq R \implies \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

4. ...

THÉORÈME 5.38 ★ Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $l \in F$ et une application $f : A \rightarrow F$. On a l'équivalence entre :

— $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$;

— $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap A$, $\|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$. Mais comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(a, r) \cap A$. Donc pour tout $n \geq N$, $\|f(x_n) - l\|_F \leq \varepsilon$ et on a montré que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

$\Leftarrow$ Raisonnons par contraposée pour démontrer la réciproque. On suppose que $f(x)$ ne tend pas vers l quand $x \rightarrow a$. La négation de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ est :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0, \exists x \in A : \|x - a\|_E < \eta \text{ et } \|f(x) - l\|_F > \varepsilon.$$

Donc pour tout $\eta = 2^{-n}$, il existe $x \in B(a, 2^{-n}) \cap A$ qu'on va noter x_n tel que $\|f(x) - l\|_F > \varepsilon$. Par construction de la suite (x_n) , on sait que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et pourtant $f(x_n)$ ne tend pas vers l . Ce qui prouve la réciproque.

Remarque 5.30 On se sert souvent de ce théorème pour montrer qu'une application n'admet pas de limite en un point. Posons par exemple pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

On a $f(0, 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(1/n, 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}/2$. Pourtant $(0, 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ et $(1/n, 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$. Donc par le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, f ne peut avoir de limite en $(0, 0)$.

5.4.2 Opérations sur les limites

THÉORÈME 5.39 ★ Limite d'une composée

On considère trois evn, $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ et deux parties $A \subset E$, $B \subset F$. Soient deux applications

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \in A & & b \in B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & g \\ & & l \end{array}$$

Soit $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $l \in G$. On suppose que :

(H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b,$

(H2) $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} l.$

Alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$

Démonstration Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Montrons que $g \circ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, on sait que $y_n = f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$. Mais comme $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} l$, on sait aussi que $g(y_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Comme (x_n) est quelconque, on a $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

THÉORÈME 5.40 ★★★ Combinaison linéaire de limites

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, deux applications $f, g : A \rightarrow F$ et deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1 \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2 \end{cases}$$

alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda l_1 + \mu l_2$$

Démonstration Même démonstration que dans le cas des fonctions réelles à valeurs réelles. On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle de la limite combinée avec le théorème d'opération sur les suites convergentes.

THÉORÈME 5.41 ★★★ Produit de limites

Soit $A \subset E$, une application vectorielle $f : A \rightarrow F$, une application scalaire $u : A \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \overline{A}$. Si

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in F \\ u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

alors l'application $\begin{cases} A & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \cdot f(x) \end{cases}$ admet une limite lorsque $x \rightarrow a$:

$$u(x) f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda l$$

Démonstration Même démonstration que dans le cas des fonctions réelles à valeurs réelles.

THÉORÈME 5.42 ★★★ Limite d'une application dans un espace produit

Soit un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et un espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$, chaque evn F_i étant muni d'une norme $\|\cdot\|_i$. On munit E de la norme d'espace produit. Soit $A \subset E$, $a \in \bar{A}$ et

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow F_1 \times \cdots \times F_n \\ x & \longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}$$

On se ramène à l'étude de la limite de chacune des applications f_i :

$$(f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{(i)} (l_1, \dots, l_n)) \iff \begin{cases} f_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l_1 \\ \vdots \\ f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{(ii)} l_n \end{cases}$$

Démonstration Laissée en exercice.

5.4.3 Relations de comparaison HP

On considère deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$, une application $f: A \rightarrow F$ et un point $a \in \bar{A}$.

DÉFINITION 5.27 ★ Domination

Soit une fonction $\varphi: A \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que la fonction f est *dominée* par la fonction φ au voisinage de a et on écrit $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(\varphi)$ si :

$$\exists M > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}_a, \quad \forall x \in V \cap A, \quad \|f(x)\|_F \leq M|\varphi(x)|$$

Si la fonction φ ne s'annule pas sur un voisinage de a , c'est équivalent à dire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\varphi(x)}f(x)$ est bornée au voisinage de a .

DÉFINITION 5.28 ★ Négligeabilité

On dit que la fonction f est *négligeable* devant la fonction scalaire φ au voisinage du point a , et l'on note $f(x) = \mathcal{o}_{x \rightarrow a}(\varphi(x))$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}_a, \quad \forall x \in V \cap A, \quad \|f(x)\|_F \leq \varepsilon|\varphi(x)|$$

Lorsque la fonction φ ne s'annule pas sur un voisinage de a , c'est équivalent à dire que $\frac{1}{\varphi(x)}f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0_F$.

Remarque 5.31 On montre les propriétés similaires aux relations de comparaison pour les suites.

DÉFINITION 5.29 ★ Fonctions équivalentes

On dit que deux fonctions $f, g: A \rightarrow F$ sont *équivalentes* au voisinage du point a , et l'on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ lorsque

$$f(x) - g(x) = \mathcal{o}_{x \rightarrow a}(\|g(x)\|)$$

Remarque 5.32 Pour des fonctions à valeurs scalaires, si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a , cette définition revient à dire que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 1$.

Remarque 5.33 On montre que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{F}(A, F)$.

5.4.4 Continuité

DÉFINITION 5.30 ★ Continuité en un point, continuité sur une partie

Soit deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et $a \in A$. On dit qu'une fonction $f : A \rightarrow F$ est *continue au point a* lorsque

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

On dit que l'application $f : A \rightarrow F$ est (globalement) continue *sur A* lorsque f est continue en tout point de A .

On note $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A .

Remarque 5.34 La définition de la continuité au point a s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$$

et en terme de voisinages :

$$\forall W \in \mathcal{V}_{f(a)}, \quad \exists V \in \mathcal{V}_a, \quad \text{tel que } f(A \cap V) \subset W$$

Exemple 5.10 Soient $(E_1, \|\cdot\|_1, \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des evn et $E = \prod_{k \in [1, p]}$ l'espace produit muni de la norme produit $\|x\| = \max_{i \in [1, p]} \|x_i\|_i$ où $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$. Alors pour tout $k \in [1, p]$, l'application

$$\pi_k : \begin{cases} E = E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow E_k \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto x_k \end{cases}$$

est continue sur E . En effet, soient $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ et $\varepsilon > 0$. Si $y = (y_1, \dots, y_p) \in B(x, \varepsilon)$ alors $\|y - x\| < \varepsilon$ et par définition de $\|\cdot\|$, on a $\|\pi_k(y) - \pi_k(x)\|_i = \|y_k - x_k\|_i \leq \|y - x\| \leq \varepsilon$.

THÉORÈME 5.43 ★★★ Théorème d'opérations sur les fonctions continues

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une algèbre ce qui signifie en particulier que :

1. une combinaison linéaire de fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.
2. un produit de fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.

Démonstration C'est une conséquence des théorèmes 5.40 et 5.41 page 18.

COROLLAIRE 5.44 Les fonctions polynomiales sont continues

On considère $\mathbb{K}^m$ muni d'une de ses normes. Alors toute application polynomiale $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Démonstration C'est une conséquence directe du théorème et de la remarque précédente. Une application polynomiale de $\mathbb{K}^m$ est une combinaison linéaire de produits de projections de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}$ de la forme $\pi_i : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_m) \mapsto \pi_i(x) = x_i$.

COROLLAIRE 5.45 Le déterminant est continu

On considère l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une de ses normes $\|\cdot\|$. Alors l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Démonstration En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A .

COROLLAIRE 5.46 Continuité de quelques applications classiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Les applications

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto M^T \end{cases}, \quad \varphi_2 : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto PMP^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M & \longmapsto \text{Tr}(M) \end{cases}$$

sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration Même argument que dans la démonstration précédente. Le théorème 5.68 page 28 fournira une autre preuve directe de cette propriété.

PROPOSITION 5.47 ★★ Continuité d'une composée

Soient trois evn, et deux applications

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G$$

Si f est continue sur A et g continue sur $B = f(A)$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur A .

Démonstration C'est une conséquence directe du théorème 5.39 page 17.

PROPOSITION 5.48 ★★★ Continuité à valeurs dans un espace produit

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})$, ..., $(F_p, \|\cdot\|_{F_p})$ des espaces vectoriels normés. On munit $F = F_1 \times \dots \times F_p$ de la norme d'espace produit définie pour tout $y = (y_1, \dots, y_p) \in F$ par $\|y\|_F = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|y_i\|_{F_i}$. Alors une application $f : A \subset E \rightarrow F_1 \times \dots \times F_p$ est continue au point $a \in A$ si et seulement si chaque application $f_i : A \subset E \rightarrow F_i$ est continue au point a .

Démonstration C'est une conséquence immédiate du théorème 5.42 page 18.

THÉORÈME 5.49 ★ Caractérisation séquentielle de la continuité locale

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn. Soient $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$. Alors la fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de points de A , $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Démonstration C'est une conséquence directe du théorème 5.38 page 17.

THÉORÈME 5.50 ★ Propriétés topologiques des fonctions continues

Soient E et E' deux evn et $f : A \rightarrow E'$ une application continue.

1. Si $O \subset E'$ est un ouvert de E' , alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A .
2. Si $F \subset E'$ est un fermé de E' , alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de A .

Démonstration

- Soit $a \in f^{-1}(O)$ et soit $b = f(a) \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(b, \varepsilon) \subset O$. Mais comme f est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in B(a, \eta)$ alors $f(x) \in B(b, \varepsilon)$. Donc $f(B(a, \eta)) \subset B(b, \varepsilon) \subset O$ et $B(a, \eta) \subset f^{-1}(B(b, \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$. Donc $f^{-1}(O)$ est ouvert.
- Si F est fermé alors $O = F^c$ est ouvert et comme $f^{-1}(F) = f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$, $f^{-1}(F)$ est fermé comme complémentaire d'un ensemble ouvert.

Remarque 5.35 L'image directe d'un ouvert par une fonction continue n'est pas un ouvert en général.

Remarque 5.36 On utilise souvent cette propriété pour montrer qu'un ensemble est ouvert ou fermé. Par exemple, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé.
- $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1](-\infty, \alpha[)$ est un ouvert.
- $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha])$ est un fermé
- ...

Exemple 5.11 Le sous-ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^3 - y^2 \geq 4\}$ est fermée car les applications $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $g : (x, y, z) \mapsto x^3 - y^2$ sont polynomiales et donc continues sur $\mathbb{R}^3$. De plus $A = f^{-1}(1) \cap g^{-1}([4, +\infty[)$. Comme $\{1\}$ et $[4, +\infty[$ sont fermés, il en est de même de $f^{-1}(1)$ et de $g^{-1}([4, +\infty[)$ ainsi que de leur intersection.

5.4.5 Fonctions lipschitziennes

DÉFINITION 5.31 ★★ Fonctions lipschitziennes

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une application $f : A \rightarrow F$. On dit que l'application f est lipschitzienne (ou k -lipschitzienne) si il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

Remarque 5.37 L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur A est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Remarque 5.38 Une composée d'applications lipschitziennes est une application lipschitzienne.

1. Pour toute partie B de E' , on a $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$. En effet, si $x \in f^{-1}(B)$ alors $f(x) \in B$ donc si $f(x) \in B^c$ alors $x \in (f^{-1}(B))^c$. Réciproquement, si $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ et donc si $x \in (f^{-1}(B))^c$ alors $x \in f^{-1}(B^c)$.

Remarque 5.39 On a en fait démontré dans la remarque 5.10 page 19 que les projections $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i$ sont 1-lipschitziennes.

THÉORÈME 5.51 ★ Toute fonction lipschitzienne est continue

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une application k -lipschitzienne $f : A \rightarrow F$. Alors f est continue sur A .

Démonstration Soient $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. Posons $r = \varepsilon/k$. Alors pour tout $x \in B(a, r) \cap A$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq k\|x - a\|_E < kr = \varepsilon$$

et f est continue en a . Comme a est quelconque dans A , f est continue sur A .

Exemple 5.12

1. Sur un evn $(E, \|\cdot\|)$ l'application norme est 1-lipschitzienne et donc continue.
2. D'après l'inégalité des accroissements finis, toute application réelle de $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne sur ce segment.

THÉORÈME 5.52 ★ $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne

Soit un evn $(E, \|\cdot\|)$ et une partie $A \subset E$. L'application

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto d(x, A) \end{cases}$$

est 1-lipschitzienne.

Démonstration Soient $(x, y) \in E^2$,

1. Soit $z \in A$, par l'inégalité triangulaire,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Donc

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Donc

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

Par passage à la borne inférieure, on en tire que

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

c'est-à-dire $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

2. On montre de même que $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$.

Remarque 5.40 Remarquons qu'on a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. Voir l'exercice ?? page ?? pour une démonstration de cette propriété.

5.5 Applications linéaires continues

5.5.1 Continuité d'une application linéaire

THÉORÈME 5.53 ★ Caractérisation des applications linéaires continues

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ et une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les équivalences :

1. u est continue sur E ;
2. u est continue au point 0_E ;
3. u est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$;
4. il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;
5. u est une application lipschitzienne.

Démonstration

1. $\Rightarrow$ 2. *Trivial.*

2. $\Rightarrow$ 3. *On suppose que u est continue en 0_E . Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, si $\|x\|_E \leq \eta$ alors $\|u(x)\|_F \leq 1$. Si $X \in \overline{B}(0_E, 1)$ alors $\eta X \in \overline{B}(0_E, \eta)$, $u(\eta X) \in \overline{B}(0_F, 1)$ et $u(X) \in B(0, 1/\eta)$. Par suite $u(\overline{B}(0_E, 1)) \subset \overline{B}(0_F, 1/\eta)$ et u est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$.*

3. $\Rightarrow$ 4. *Comme u est bornée sur $\overline{B}(0_E, 1)$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$, $\|u(x)\|_F \leq k$. Donc pour tout $x \neq 0$, on a $\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \leq k$ d'où $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Si $x = 0_E$, l'inégalité est trivialement vérifiée.*

4. $\Rightarrow$ 5. *Soient $x, y \in E$. Alors*

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x - y)\|_F \leq k\|x - y\|_F$$

et donc u est k -lipschitzienne.

5. $\Rightarrow$ 1. *Une application lipschitzienne sur E est continue sur E .*

Remarque 5.41 La continuité d'une application linéaire ne dépend pas des normes équivalentes choisies sur E et F .

DÉFINITION 5.32 ★ L'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de l'evn E vers l'evn F . C'est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

5.5.2 Continuité d'une application bilinéaire, d'une application multilinéaire

DÉFINITION 5.33 ★★ Application bilinéaire

Soient trois evn $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$. Une application

$$B: \begin{cases} E \times F & \longrightarrow G \\ (x, y) & \longmapsto B(x, y) \end{cases}$$

est bilinéaire lorsque :

1. $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \forall y \in F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, B(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y)$
2. $\forall x \in E, \forall (y_1, y_2) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, B(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda B(x, y_1) + \mu B(x, y_2)$

Exemple 5.13

- Le produit scalaire $(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est une application bilinéaire.
- Le déterminant de deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 : $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est une application bilinéaire

THÉORÈME 5.54 ★ Continuité d'une application bilinéaire

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des evn.

Une application bilinéaire est continue sur $E \times F$ muni de la norme d'espace produit si et seulement si il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\|_G \leq K\|x\|_E\|y\|_F$$

Démonstration

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Comme B est continue en $(0_E, 0_F)$, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|(x, y)\|_{E \times F} \leq \alpha \Rightarrow \|B(x, y)\|_G \leq 1$. Soit $(x, y) \in E \times F$, alors la norme produit du vecteur $\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E}x, \frac{\alpha}{\|y\|_F}y\right)$ est inférieure à α . Par homogénéité, on en déduit que

$$\|B(x, y)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^2}\|x\|_E\|y\|_F$$

- Montrons que B est continue en (x_0, y_0) . En utilisant la bilinéarité,

$$\begin{aligned} \|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G &= \|B(x, y - y_0) + B(x - x_0, y_0)\|_G \\ &\leq K\|x\|_E\|y - y_0\|_F + K\|x - x_0\|_E\|y_0\|_F \\ &\leq K(1 + \|x_0\|_E)\|y - y_0\|_F + K\|y_0\|_F\|x - x_0\|_E \end{aligned}$$

Si l'on a choisi (x, y) tels que $\|x - x_0\|_E \leq 1$. Il suffit de rédiger ensuite la démonstration à ε .

DÉFINITION 5.34 ★★ Application multilinéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et soient n evn $(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$ pour $k \in [1, n]$ et soit enfin un dernier evn $(F, \|\cdot\|_F)$. Une application

$$f : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

est *multilinéaire* lorsque pour tout $i \in [1, n]$, pour tout $(a_k)_{k \in [1, n], k \neq i} \in \prod_{k \in [1, n], k \neq i} E_k$, l'application

$$x \in E_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_i, \dots, a_n) \in F$$

est linéaire.

THÉORÈME 5.55 ★ Continuité d'une application multilinéaire

Une application multilinéaire est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$ si et seulement si il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq K \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}$$

Démonstration Il suffit d'adapter la preuve du théorème précédent au cas des applications multilinéaires.

5.5.3 Norme subordonnées d'une application linéaire Hors programme mais important**THÉORÈME 5.56 ★ Norme subordonnée d'une application linéaire continue**

Soient deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ une application linéaire continue. On définit la norme de l'application linéaire u :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée *norme subordonnée*.

Démonstration

- Comme $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est une application linéaire continue, u est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ d'après le théorème 5.53 page 21. Donc $\{\|u(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée. Par axiome de la borne supérieure, cet ensemble admet une borne supérieure et $|||u|||$ est bien définie. L'application $|||\cdot|||$ est de plus bien à valeurs positives car c'est le cas de $\|\cdot\|_F$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$:

$$\|\lambda u(x)\|_F = \lambda \|u(x)\|_F \leq \lambda |||u|||$$

donc en passant à la borne supérieure, il vient : $|||\lambda u||| \leq \lambda |||u|||$.

Mais on a aussi pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$ et $\lambda \neq 0$:

$$\|u(x)\|_F = \lambda^{-1} \|\lambda u(x)\|_F \leq \lambda^{-1} |||\lambda u|||$$

et donc en passant à la borne supérieure, il vient : $|||u||| \leq \lambda^{-1} |||\lambda u|||$ soit $\lambda |||u||| \leq |||\lambda u|||$. Cette inégalité est clairement vraie si $\lambda = 0$. On prouve ainsi l'axiome d'homogène par double inégalité.

- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que $|||u||| = 0$. Ceci équivaut à $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = 0$ et donc à $\|u(x)\|_F = 0$ pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$. Par axiome de séparation pour $\|\cdot\|_F$, ceci équivaut encore à $u(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$. Mais si $x \in E$ est un vecteur non nul alors $x/\|x\|_E \in \overline{B}(0_E, 1)$ et donc $u(x/\|x\|_E) = 0$ ce qui équivaut à $u(x) = 0$ par linéarité de u . L'axiome de séparation est donc vérifié.
- Pour $u, v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $x \in \overline{B}(0_E, 1)$, on a

$$\begin{aligned} \|(u+v)(x)\|_F &\leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \text{ par inégalité triangulaire pour } \|\cdot\|_F \\ &\leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F + \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|v(x)\|_F \\ &\leq |||u||| + |||v||| \end{aligned}$$

puis par passage à la borne supérieure, il vient :

$$|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||.$$

et $|||\cdot|||$ vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Ainsi, $|||\cdot|||$ est bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

PROPOSITION 5.57 ★ Autres caractérisations de $|||u|||$

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

1. $|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$.
2. $|||u||| = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$.

Démonstration Posons $S = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$ et $\gamma = \sup_{x \in S} \|u(x)\|_F$. Comme $S \subset \overline{B}(0_E, 1)$, on a $\gamma \leq |||u|||$.

Mais si $x \in \overline{B}(0_E, 1)$, $x \neq 0$ alors $\gamma \geq \|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F = \frac{1}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F \geq \|u(x)\|_F$. On en tire que $\gamma \geq |||u|||$. Donc $|||u||| = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$.

PROPOSITION 5.58 ★ Caractérisation pratique de $|||u|||$

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

1. Si $k \geq 0$ est une constante telle que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, alors $|||u||| \leq k$;
2. $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq |||u||| \|x\|_E$;
3. $|||u||| = \min\{k \geq 0 \mid \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$.

En d'autres termes, $|||u|||$ est la plus petite constante k vérifiant $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Démonstration

- Dans ce cas, on a pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$ non nul $\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$ et donc par passage à la borne supérieure, il vient $|||u||| \leq k$.
- Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\frac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B}(0_E, 1)$ et donc $\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \leq |||u|||$ de quoi on tire par linéarité de u et homogénéité de $\|\cdot\|_F$ l'inégalité $\|u(x)\|_F \leq |||u||| \|x\|_E$. Cette inégalité est par ailleurs trivialement vérifiée si $x = 0$.
- Laissée en exercice.

Remarque 5.42 Pour montrer qu'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue :

1. Prendre un vecteur arbitraire $x \in E$ et majorer $\|u(x)\|_F$ par $C\|x\|_E$ où C est une constante indépendante du vecteur x . Essayer de trouver la plus petite constante C possible.
2. Si $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, alors u est continue et $|||u||| \leq C$.
3. Trouver un vecteur $x \in E$, $x \neq 0$ pour lequel la majoration précédente est une égalité : $\|u(x)\|_F = C\|x\|_E$, alors $|||u||| = C$.
4. Il n'est pas toujours possible de trouver explicitement un vecteur x non-nul vérifiant $\|u(x)\|_F = C\|x\|_E$. Se demander si la majoration du (a.) est la meilleure possible, ou construire une suite de vecteurs non nuls (x_n) telle que $\|u(x_n)\|_F = C_n\|x_n\|_E$ avec $C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C$. En effet, puisque

$$C_n = \frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \leq |||u|||$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on aura $C \leq |||u|||$.

THÉORÈME 5.59 ★ Continuité d'une composée

Soient trois evn $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ et deux applications linéaires continues

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Alors la composée $v \circ u$ est également continue, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et

$$|||v \circ u||| \leq |||v||| |||u|||$$

Démonstration Pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$, on a :

$$\|u \circ v(x)\|_G \leq |||u||| \|v(x)\|_F \leq |||u||| |||v||| \|x\|_E \leq |||u||| |||v|||$$

d'où le résultat en passant à la borne supérieure.

Remarque 5.43 En général, on n'a pas l'égalité, il existe des applications linéaires continues u et v non nulles telles que $u \circ v = 0$ pour lesquelles l'inégalité est stricte.

DÉFINITION 5.35 ★ Structure d'algèbre (rappel)

On appelle *algèbre* sur un corps $\mathbb{K}$, un ensemble A muni de lois $(A, +, \times, \cdot)$ tel que :

1. $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$.
4. la loi $\times$ admet un élément neutre e .

Remarque 5.44 Si $(A, +, \times, \cdot)$ est une algèbre, $(A, +, \times)$ est un anneau.

DÉFINITION 5.36 ★★ Algèbre normée

On appelle *algèbre normée unitaire*, toute algèbre $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant :

1. $\forall (x, y) \in \mathcal{A}, \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$;
2. $\|e\| = 1$.

Remarque 5.45 Quelquefois, on n'impose pas la condition $\|e\| = 1$. On dit que l'algèbre est normée, mais pas unitaire.

PROPOSITION 5.60 ★★ Algèbre normée unitaire $\mathcal{L}_c(E)$

L'ensemble des endomorphismes continus d'un evn $(E, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre normée unitaire pour la norme $\|\cdot\|$. L'élément neutre pour $\circ$ est $e = \text{id}_E$.

Remarque 5.46 Si A est un ensemble quelconque, l'ensemble des applications bornées de A vers $\mathbb{C}$, $L^\infty(A, \mathbb{C}), +, \cdot, \times$ est une algèbre normée pour la norme $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

5.6 Topologie d'un evn de dimension finie

Dans cette section, les evn sont tous de dimension finie.

5.6.1 Particularité des evns de dimension finie

On peut montrer, et nous l'admettrons, que

L'étude topologique d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie m se ramène à celle de $\mathbb{K}^m$ muni d'une de ses normes, peu importe laquelle.

Expliquons succinctement pourquoi, même si cela nous fait sortir brièvement du programme officiel.

DÉFINITION 5.37 ★ Normes équivalentes HP

Soit un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E . On dit que ces normes sont *équivalentes* s'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \quad C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

Remarque 5.47 Les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes du vecteur x ... On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E .

PROPOSITION 5.61 ★ La notion de convergence ne dépend pas d'une norme équivalente HP

Soient deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un même espace E . Si ces normes sont équivalentes et si (u_n) est suite de E alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \text{ pour } \|\cdot\|_a \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \text{ pour } \|\cdot\|_b.$$

Démonstration Par équivalence des normes, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\cdot\|_b \leq k\|\cdot\|_a$.

On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ pour $\|\cdot\|_a$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $\|l - u_n\|_a \leq \frac{\varepsilon}{k}$. Alors $\|l - u_n\|_b \leq k\|l - u_n\|_a \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ pour $\|\cdot\|_b$. On fait de même pour la réciproque.

Remarque 5.48 De la même façon, si deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un même espace E sont équivalentes, on peut montrer que tout sous-ensemble $A \subset E$ ouvert (resp. fermé) pour $\|\cdot\|_a$ est ouvert (resp. fermé) pour $\|\cdot\|_b$.

La propriété annoncée en début de section provient alors du théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 5.62 ★★★ Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes HP

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

5.6.2 Compacts d'un evn dimension finie**DÉFINITION 5.38 ★ Partie compacte**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Une partie A de E est dite *compacte* si elle est à la fois fermée et bornée.

 **Attention 5.14** Le programme officiel n'utilise pas le mot « compact » pour parler des parties « fermées-bornées » d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Nous nous autorisons ce léger débordement dans l'idée abrégée les énoncés.

Exemple 5.15

- Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.
- La boule unité fermée d'un evn de dimension finie est compacte.

THÉORÈME 5.63 ★★★ L'image d'un compact par une application continue est un compact

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn de dimension finie. Soient K un compact de E et $f : E \rightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F .

Démonstration Admis.

COROLLAIRE 5.64 ★★★ Une application continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie et soit K un compact non vide de E . Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur K alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Démonstration D'après le théorème précédent, $f(K)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure $\sup f$ et une borne inférieure $\inf f$. Ces deux bornes sont adhérentes à $f(K)$ et donc élément de $f(K)$ car ce dernier est fermé. Par conséquent, $\sup f$ et $\inf f$ sont atteintes par f .

5.6.3 Convergence d'une suite en dimension finie**PROPOSITION 5.65 ★ La convergence d'une suite dans un evn de dimension finie est équivalente à la convergence de ces suites coordonnées dans une base de E**

Soit un evn $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de E donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_{n,1}e_1 + \dots + u_{n,p}e_p.$$

alors on a équivalence entre :

- 1 (u_n) converge vers $l = l_1e_1 + \dots + l_me_p \in E$.
- 2 Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les suites scalaires (u_n^i) convergent vers l_i .

Les p suites $(u_{n,i})$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont appelées les *suites coordonnées* de la suite (u_n) .

Démonstration Comme E est de dimension finie p , on peut identifier ses vecteurs avec leurs coordonnées dans la base e . Travailler avec l'evn normé $(E, \|\cdot\|)$ revient alors à considérer $\mathbb{K}^p$ muni de sa base canonique et de l'une de ses normes. On effectue alors la démonstration dans le cas où $E = \mathbb{K}^p$ et où $\|\cdot\|$ est la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

$\Rightarrow$ Si (u_n) converge vers l alors comme pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|u_n^i - l_i| \leq \|u_n - l\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, chaque suite coordonnée tend vers l_i .

$\Leftarrow$ Réciproquement, si chaque suite composante (u_n^i) converge vers l_i alors comme

$$\|u_n - l\| = \max \left\{ |u_n^i - l_i| \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Exemple 5.16 Considérons dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la suite de terme général

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} & e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \frac{\ln n}{n^2} & \frac{n+1}{n+2} \end{pmatrix}$$

Alors en identifiant $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^4$ et en le munissant d'une de ses normes, on montre que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_2$.

5.6.4 Limite d'une fonction en dimension finie

PROPOSITION 5.66 ★★ Limite d'une fonction en dimension finie

Soit un evn quelconque $(E, \|\cdot\|_E)$ et un evn $(F, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , $A \subset E$ et une application $f: \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f_1(x)e_1 + \dots + f_p(x)e_p \end{cases}$. Soit $a \in \bar{A}$ et $l = l_1 e_1 + \dots + l_p e_p \in F$.

$$(f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{(i)} l) \iff \begin{cases} f_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l_1 \\ \vdots \\ f_p(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{(ii)} l_p \end{cases}$$

Les applications $f_1, \dots, f_p$ s'appellent les *applications coordonnées* de f .

Démonstration Comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et on choisit de travailler avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur F donnée par

$$\|y_1 e_1 + \dots + y_p e_p\|_\infty = \sup_{k=1}^p |y_k|.$$

$\Rightarrow$ On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, si on a $\|x - a\|_E \leq \eta$ alors $\|f(x) - l\| \leq \varepsilon$. Mais alors, par définition de la norme infinie, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|f_k(x) - l_k| \leq \varepsilon$ et donc $f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_k$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_k$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1, \dots, \eta_p > 0$ tels pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta_k$, on a $|f_k(x) - l_k| \leq \varepsilon$. Alors pour $\eta = \min(\eta_1, \dots, \eta_p)$ et pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta$, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad |f_k(x) - l_k| \leq \varepsilon$$

et donc $\|f(x) - l\|_\infty \leq \varepsilon$. On prouve ainsi que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

PROPOSITION 5.67 ★★ Limite d'une fonction en dimension finie

Soit un evn quelconque $(E, \|\cdot\|_E)$ et un evn $(F, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , $A \subset E$ et une application $f: \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f_1(x)e_1 + \dots + f_p(x)e_p \end{cases}$.

On a équivalence entre :

- f est continue sur A .
- Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les applications coordonnées $f_k: A \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur A .

Démonstration C'est une conséquence directe du théorème 5.66 page 27.

Remarque 5.49 Un corollaire est que les applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ sont continues.

5.6.5 Applications linéaires, bilinéaires et multilinéaires en dimension finie

THÉORÈME 5.68 ★ Les applications linéaires sont continues en dimension finie

Soit un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn quelconque. Alors toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration Considérons une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Tout vecteur $x \in E$ se décompose sur cette base :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Notons $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ la norme d'espace produit associée. Comme E est de dimension finie, cette norme est équivalente à $\|\cdot\|_E$ et prouver la continuité de u pour la norme $\|\cdot\|_E$ revient à prouver cette continuité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\|u(x)\|_F = \|x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n)\|_F \leq |x_1| \|u(e_1)\|_F + \dots + |x_n| \|u(e_n)\|_F \leq C \|x\|_\infty$$

où $C = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|_F$. L'application linéaire u est donc continue.

Remarque 5.50 Un corollaire est que les sev d'un $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension finie sont fermés.

Exemple 5.17 L'application trace $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, quand on considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ munis d'une de leurs normes équivalentes respectives est continue. C'est en effet une application linéaire définie entre des espaces vectoriels de dimension finie.

THÉORÈME 5.69 ★ Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux evn de dimension finie et si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un evn quelconque, alors toute application bilinéaire $B : E \times F \rightarrow G$ est continue.

Démonstration Soit $e = (e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E , soit $f = (f_j)_{j \in [1, m]}$ une base de F . Comme E et F sont de dimension finie, on peut prendre pour $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ la norme infinie donnée par exemple pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ par $\|x\|_E = \|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j \in F$, on a :

$$\|B(x, y)\|_G = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_i| |y_j| B(e_i, f_j) \right\|_G \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|B(e_i, f_j)\|_G}_{=K} \|x\|_E \|y\|_F \leq K \|x\|_E \|y\|_F$$

et par application du théorème 5.54 page 22, B est continue.

Exemple 5.18

- Le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie est une application continue.
- Le déterminant de deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 : $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est une application continue.

THÉORÈME 5.70 ★ Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

On considère une famille d'evn de dimension finie $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})$ pour $i \in [1, n]$ et soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn de dimension finie. Alors toute application multilinéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue.

Démonstration Il suffit de généraliser la preuve précédente.

Exemple 5.19 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et soit e une base de E alors le déterminant d'une famille de vecteurs $\det : E^p \rightarrow \mathbb{K}$ défini pour $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$ par $\det(v_1, \dots, v_p) = \det \text{Mat}_e((v_1, \dots, v_p))$ est une forme multilinéaire. Comme les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels considérés ici sont de dimension finie, il est continue.

5.7 L'essentiel

1. Étudier les majorations-minorations faisant intervenir les normes et l'inégalité triangulaire.
2. Savoir montrer rigoureusement des propriétés faisant intervenir les bornes sup. et inf. Étudier la démonstration $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne et la vérification des normes usuelles.
3. Techniques pour montrer qu'une partie est ouverte, fermée, compacte : caractérisations séquentielles, image réciproque par une application continue, définition ...
4. Étudier les techniques pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue.
5. Connaître les propriétés des compacts et des fonctions continues sur un compact.
6. Connaître les théorèmes en dimension finie.