Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Sommes partielles et restes

Exercice 2.1.1 ★

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $S_1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$,
2. $S_2 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $S_3 = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 2.1.2 ★

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 2.1.3 ★

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}.$$

Exercice 2.1.4 ★

On admet que $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Montrer que* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ *est convergente et calculer sa somme* S_2.

Exercice 2.1.5 ★

Soit $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Après avoir prouvé sa convergence, calculer les sommes partielles et le reste de la série* $\sum_{n\geqslant p} z^n$.

Exercice 2.1.6 ★

Soit $\alpha > 0$. *Montrer que*

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 2.1.7 ★ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On considère la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *et on note* $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *sa somme. On veut trouver une valeur approchée de* L *à* 10^{-p} *près (*p *décimales exactes).*

1. *On décide de prendre comme valeur approchée de* L, *la somme partielle* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   Écrire une procédure Python qui calcule S_n.
2. *En utilisant une comparaison avec une intégrale, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. *Combien de termes sommer pour obtenir une valeur approchée de* L *à* 10^{-4} *près ?*
4. *Trouver une amélioration de la méthode.*

Exercice 2.1.8 ★

Pour $p \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

1. *Montrer que* a_p *existe puis exprimer* a_p *en fonction de* $a_0, \ldots, a_{p-1}$.
2. *En déduire que* $a_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.1.9 ★

Existence et valeur pour $m \geqslant 1$ de

$$S_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}.$$

2.2 Séries à termes positifs

Exercice 2.2.1 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$,
2. $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$,
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,
4. $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
5. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$.

Exercice 2.2.2 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,
2. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,
3. $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$,
4. $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$,
5. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$,
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2.2.3 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$,
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,
3. $u_n = \frac{n!}{a^n}$,
4. $u_n = \sin n$,
5. $u_n = \frac{2n}{n+2^n}$,
6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 2.2.4 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$,
2. $u_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - 1$,
3. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
4. $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$,
5. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n + 1}$,
6. $u_n = \frac{n^2+1}{n!}$.

Exercice 2.2.5 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n^3}{n!}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{2n^3-1}$,
3. $u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$,
4. $u_n = \frac{\ln n}{n^2+3}$,
5. $u_n = e^{-n^2}$,
6. $u_n = \sin^3\frac{1}{n}$.

Exercice 2.2.6 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = (-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}$,
2. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,
3. $u_n = \frac{1}{n\ln n}$,
4. $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}$,
5. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
6. $u_n = \frac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, $a > 0, \alpha > 0$.

Exercice 2.2.7 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$,
2. $u_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
3. $u_n = \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1}$,
5. $u_n = \sin\frac{1}{2^n}$,
6. $u_n = \frac{(n+2)^{4/3}}{(n+1)(n+3)^{3/2}}$;

Exercice 2.2.8 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{3n^4 - 2}$,
3. $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$,
4. $u_n = \ln\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$,
5. $u_n = \frac{\ln n}{n}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\sin^2 n}$;

Exercice 2.2.9 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{2^n n!}{n^{\sqrt{n}}}$,
2. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
3. $u_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^\alpha$,
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} + a + \frac{b}{n}$,
5. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right)$,
6. $u_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Exercice 2.2.10 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = a^{\ln n}$, $a > 0$,
2. $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$,
3. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$,
4. $u_n = (\ln(n+a))^{\alpha} - (\ln n)^{\alpha}$, $a > 0$,
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}$,
6. $u_n = \dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$.

Exercice 2.2.11 ★★★ **Type X**

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$,
3. $u_n = \dfrac{1}{(n+p)!} \sum_{k=1}^{n} k!$ avec $p \geqslant 1$.

On cherchera un équivalent de u_n

Exercice 2.2.12 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{\alpha} + n^{\alpha}}}$$

avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.2.13 ★★

Étudier la convergence puis calculer la somme, quand celle-ci existe, de la série de terme général

$$u_n = \ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3).$$

Exercice 2.2.14 ★

Trouver le polynôme P pour que la série de terme général

$$u_n = \left(n^4 + 2n^2\right)^{1/4} - (\mathrm{P}(n))^{1/3}$$

soit convergente.

Exercice 2.2.15 ★

Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = (1+2+3+\ldots+n)^{\alpha}$ est-elle convergente ?

Exercice 2.2.16 ★★

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs.

1. *Montrer que les séries de terme général u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \ln(1+u_n)$ sont de même nature.*
2. *Si $\sum u_n$ converge, montrer que la série $\sum (u_n)^{\alpha}$, avec $\alpha \geqslant 1$, est aussi convergente.*

Exercice 2.2.17 ★★

Soit (a_n) une suite de réels positifs.

1. *On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série de terme général :*
   (a) $u_n = a_n^2$;
   (b) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$;
   (c) $u_n = \sin\left(\dfrac{a_n}{1+a_n}\right)$.
   (d) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n+\sqrt{n}}$;
   (e) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n-\sqrt{n}}$.
2. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série de terme général :*
   (a) $u_n = \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$;
   (b) $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 2.2.18 ★ **Règle de Raabe-Duhamel**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. *On suppose qu'à partir d'un certain rang*
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
   Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$.
2. *On suppose que*
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$
   Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
3. *On suppose cette fois-ci que*
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$
   Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 2.2.19 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.2.20 ★

Soit $\sum u_n$ une série convergente et à terme général positif. Étudier la convergence de $\sum u_n^2$.

Exercice 2.2.21 ★★★ **Centrale PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. Étudier la convergence et la somme de

$$\sum \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

Exercice 2.2.22 ★ **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. *Démontrer que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

   ***Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.*

2. *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?*

Exercice 2.2.23 ★ **CCP MP**

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. *Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.*

   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

stirling 1c

Exercice 2.2.24 ★

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$$

stirling 1d

Exercice 2.2.25 ★ **Oral CCP PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

stirling 1e

1. *Calculer a_0 et a_1.*
2. *(a) Montrer que (a_n) est décroissante.*

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.

   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.
3. *(a) Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.*

   (b) En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

ling

Exercice 2.2.26 ★★ **Intégrales de Wallis, Formule de Stirling**

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

qui donne un équivalent de la factorielle.

1. *Montrer que la suite de terme général*

$$a_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$$

   converge vers une limite L *non nulle.*

   ***Indication :** Poser $u_n = \ln a_n$ puis considérer la série (v_n) de terme général $u_{n+1} - u_n$.*
2. *En déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{L}}\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}$.*
3. *L'objet de la suite du problème est de calculer* L. *Pour ce faire, on considère, pour n entier naturel, l'intégrale (dite de Wallis) définie par :*

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Calculer W_0 et W_1.

   (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$$

   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

   (e) Montrer que (W_n) est décroissante et positive. En déduire que (W_n) est convergente.

   (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n+2}} \leqslant \frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n+2}}.$$

   (g) Montrer que $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.

   (h) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \frac{\pi}{2}$.

   (i) En déduire que : $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. *En calculant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{2n}}{a_n^2}$ et en faisant apparaître W_{2n}, calculer* L *et en déduire la formule de Stirling.*

Exercice 2.2.27 ★★ **Mines PC 2003**

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.2.28 ★★★ **Centrale MP**

Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$ selon la valeur du réel α.

Exercice 2.2.29 ★★★ **X PC 2017**

Soi (a_n) une suite réelle. On supose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \ln n$ où $\alpha > 0$

1. *Montrer que la série de terme général e^{-a_n} converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.*
2. *Peut-on conclure quand $\alpha = 1$?*

Exercice 2.2.30 ★★★ **X PC 2017**

Étudier la nature de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Exercice 2.2.31 ★★★ **X PC 2016**

Soit (a_n) une suite croissante de réels strictements positifs. On suppose que (a_n) diverge vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$?

Exercice 2.2.32 ★★★ **X PC 2016**

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 2.2.33 ★

On considère la suite réelle (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

1. *Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$.*
2. *Montrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.*
3. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln(n)$.*
   (a) *Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad a_n > 0$.*
   (b) *Montrer que la suite (a_n) converge vers un réel $\gamma \in [0,1]$.*
4. (a) *Montrer l'égalité :*

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} H_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

   où $\sum_{k\geqslant 1} w_k$ est une série convergente.

   (b) *Déterminer $\lim u_n$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.*

5. *Pour $\alpha > 0$, on considère la suite (v_n) définie par*

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right).$$

   Montrer que cette suite admet une limite finie V, puis que $V = 0$ si et seulement si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 2.2.34 ★ **C.C.P. – P.C. 2014**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Étudier la convergence de la suite (u_n).*
2. *On pose $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer $a > 0$ tel que*

$$\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. *La série $\sum \ln(v_n)$ est-elle convergente ?*
4. *Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$.*
5. *La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?*

Exercice 2.2.35 ★ **X PC 2017**

Indiquer la nature des séries :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Exercice 2.2.36 ★ **Mines PC 2017**

Soit $(u_n)_n \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

1. *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$?*
2. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.*
4. *Trouver un équivalent de I_n.*

Exercice 2.2.37 ★★★ **Centrale, X – P.C. 2014**

1. *Justifier la convergence de la séries de terme général $u_n = \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$.*
2. *Exprimer la somme de cette série à l'aide d'une intégrale.*

2.3 Comparaison série-intégrale

Exercice 2.3.1 ★ **Constante d'Euler**

Montrer qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Exercice 2.3.2 ★

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ où $\beta > 0$.

Exercice 2.3.3 ★ **Série de Bertrand**

Étudier la nature de la série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3.4

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$.

Exercice 2.3.5 ★ **Équivalent du reste de la série de Riemann**

1. *Montrer que si $0 < \alpha < 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.*
2. *Déterminer un encadrement puis un équivalent du reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*
3. *Application : donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis celle de la série de terme général $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.*

Exercice 2.3.6 ★★ **Mines-Pont PC**

Indiquer la nature de $\sum u_n$ si

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

sans utiliser un télescopage.

Exercice 2.3.7 ★ **CCP MP**

1. *On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

   (a) **Cas** $\boxed{\alpha \leqslant 0}$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\boxed{\alpha > 0}$

   Étudier la nature de la série.

   Indication *: On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.*

2. *Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.*

Exercice 2.3.8 ★ **Centrale PC 2001**

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n^a}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3.9 ★★

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = n^a \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3.10 ★ **CCP 2011**

Pour $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln^2 k.$$

1. *Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.*
2. *Montrer que :*
$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln^2 t \, dt.$$
3. *Calculer $\int_1^x \ln^2 t \, dt$ et en déduire que :*
$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln^2 n.$$
4. *Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n}$ quand $n \to +\infty$.*
5. *Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$?*

Exercice 2.3.11 ★

Pour $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Déterminer la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ quand α tend vers 1^+

Exercice 2.3.12 ★

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

1. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ 2. $\ln(n!)\sim n\ln n$ 3. $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$

Exercice 2.3.13 ★★★ **Centrale MP**

Soit $a>0$, $b>0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+bk), B_n=\prod_{k=1}^{n}(a+bk)^{1/n}$$

Trouver $\lim_{n\to+\infty}\frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e.

Exercice 2.3.14 ★ **Mines MP**

Nature de la série de terme général

$$\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k}$$

où α est réel.

Exercice 2.3.15 ★ **Mines MP**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k^\alpha}$$

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.3.16 ★★★ **Mines PC 2017**

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

2.4 Critère de d'Alembert

Exercice 2.4.1 ★

Nature de la série $\sum\frac{n!}{n^n}$.

Exercice 2.4.2 ★

Nature de la série $\sum\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

Exercice 2.4.3 ★★

Nature de la série $\sum\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ *où $a>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Exercice 2.4.4 ★

Nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Exercice 2.4.5 ★★ **Règle de Cauchy**

On considère une série à termes positifs $\sum u_n$. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}l$$

En utilisant une série géométrique, montrer la règle de Cauchy :

1. *Si $0\leqslant l<1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $l>1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 2.4.6 ★ **Règle de Raabe-Duhamel, preuve avec le critère de comparaison logarithmique**

Soit une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(1/n)$$

1. *Si $\alpha<1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.*
2. *Si $\alpha>1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.*

On utilisera le théorème de comparaison logarithmique avec une série de Riemann. Ce résultat s'appelle la règle de Raabe-Duhamel *qui est hors-programme mais qu'il faut savoir retrouver.*

2.5 Quotient terme sur somme

Exercice 2.5.1 ★ **Mines MP**

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive et convergeant vers 0. On pose

$$v_n=\frac{u_{n+1}}{S_n}\text{ avec }S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Indication 2.0 : On pourra montrer que $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(S_{n+1})-\ln(S_n)$

Exercice 2.5.2 ★★★ **X MP**

Soit $(u_n)_{n\geqslant1}$ une suite de réels strictement positifs.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{u_n}{S_n}$ où $S_n=u_1+\dots+u_n$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 2.5.3 ★ **CCP MP, Mines PC 2017**

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs et $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1. *On suppose que la série $\sum a_n$ converge, donner la nature de $\sum a_n/S_n$.*
2. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge, montrer*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\frac{a_n}{S_n^2}\leqslant\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$$

   En déduire la nature de $\sum a_n/S_n^2$.

3. *On suppose toujours la divergence de la série $\sum a_n$. Quelle est la nature de $\sum a_n/S_n$?*

2.6 Série dont le terme est défini par récurrence

Exercice 2.6.1 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1 - \cos u_n$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.6.2 ★★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - \ell$?

Exercice 2.6.3 ★★

Soit (x_n) la suite de nombres réels donnée par :

$$\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_{n+1} & = \ln(e^{x_n} - x_n) \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. *Montrer que (x_n) est bien définie.*
2. *Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge et calculer sa somme.*

Exercice 2.6.4 ★★ **Centrale PC 2017**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{n-k+2} \text{ si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_k}{2^k}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2.6.5 ★★★ **X PC 2016**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} \text{ si } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{cases}.$$

1. *Montrer que cette suite est bien définie.*
2. *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n^2}$ est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 2.6.6 ★★★ **X PC 2017**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \ln(e^{a_n} - a_n) \text{ si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. *Montrer que cette suite est bien définie.*
2. *Montrer que la série de terme général a_n est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 2.6.7 ★★★ **X – P.C. 2012**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite (a_n) par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n f(a_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Déterminer la limite éventuelle de la suite (a_n).*
2. *Nature de la série de terme général a_n ?*

Exercice 2.6.8 ★ **X-ESPCI 2018**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}.$$

1. *Montrer que (u_n) est convergente ;*
2. *Calculer sa limite.*
3. *Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?*

Exercice 2.6.9 ★★★

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f > 0$, $f' < 0$, $f(0) = 1$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n f(x_n)$.
a) Étudier la suite (x_n).
b) Déterminer la nature de la série de terme général x_n.

2.7 Critère spécial

Exercice 2.7.1 ★

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence et, S désignant la somme de la série, préciser pour les trois premières n tel que $|S_n - S| \leqslant 10^{-2}$. En déduire un encadrement de S à 10^{-2} près.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$,
6. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

Exercice 2.7.2 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
2. $u_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$
3. $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
6. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

Exercice 2.7.3 ★

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$,
2. $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$, $\alpha\neq\beta$,
4. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\frac{a}{n}\right)$,
5. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+2}\right)$,
6. $u_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2}\dfrac{\sin t}{(1+t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, *avec* $\alpha>0$
7. $u_n = (-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, P *et* Q *deux polynômes,*
8. $u_n = \cos\left(\pi n^2\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$.

Exercice 2.7.4 ★

Étudier la convergence de $\sum(-1)^n x^n$ *pour* $x\in]-1,1[$.

Exercice 2.7.5 ★

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exercice 2.7.6 ★

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. *Déterminer la nature de la série de terme général*

$$u_n = (-1)^n n^\alpha\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.7.7 ★ **TPE PSI 2016**

Soit $\alpha>0$. *Étudier la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}.$$

Exercice 2.7.8 ★ **Intégrale de Dirichlet**

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant que

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^\pi\frac{\sin t}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t,$$

déterminer le signe de I.

Exercice 2.7.9 ★ **Oral Mines-Pont PC**

Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+n^{1/3}}\right)$.

Exercice 2.7.10 ★ **Important : à retrouver par vous-même**

1. *Montrer que la* série harmonique alternée $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente, et montrer que*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$
Donner une majoration du reste R_n *de cette série.*
2. *Calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 2.7.11 ★ **Mines 2013**

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right).$$

Exercice 2.7.12 ★

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 2.7.13 ★★★ **Centrale PSI**

On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\quad\text{et}\quad u_n = \ln\left(\mathrm{e}^{s_n}-1\right).$$

1. *Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.*
2. *Prouver que les suites* $(s_n)_{n\geqslant1}$ *et* $(u_n)_{n\geqslant1}$ *convergent.*
3. *Étudier la nature de* $\sum u_n$.

Exercice 2.7.14 ★

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$?

Exercice 2.7.15 ★ **C.C.P. – P.C. 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ décroissante, à valeurs positives de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f a une limite nulle en $+\infty$ et que f' est croissante. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p).$$

1. *Vérifier que (u_n) est bien définie.*
2. *On pose $a_p = f(p) - f(p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = 2u_n - (-1)^{n+1} f(n+1).$$

3. *Montrer que que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :*

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p \right| \leqslant f(n+1) - f(n+2).$$

5. *En déduire que $\sum u_n$ est convergente.*
6. *On suppose dorénavant que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.*
   (a) *Montrer que $u_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Exercice 2.7.16 ★★★ **Mines-Pont – P.C. 2014, X – P.C. 2007-2009**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nature de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sin^p(n!\pi e).$$

Exercice 2.7.17 ★★★ **X – P.C. 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$.

2.8 Suites et séries

Exercice 2.8.1 ★ **Constante d'Euler**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n.$$

1. *Montrer que la suite (u_n) converge en passant par une série.*
2. *Montrer que la suite (u_n) converge en utilisant une méthode élémentaire. La limite de cette suite est notée γ et est appelée constante d'Euler.*
3. *Trouver une valeur approchée de γ grâce à votre calculatrice.*
4. *La convergence de la suite (u_n) vers γ est-elle rapide ? (On pourra montrer que $\gamma - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.)*

Exercice 2.8.2 ★

Démontrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.8.3 ★

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 2.8.4 ★★★

Étudier, à l'aide d'une série, la nature des ***suites*** *de terme général u_n suivantes :*

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ *(on note γ sa limite) ;*
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$;
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - a\ln n$ *(En cas de convergence, exprimer la limite à l'aide de γ).*

Exercice 2.8.5 ★

Calculer la limite de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2.8.6 ★

On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

1. *Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.*
2. *Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.*

Exercice 2.8.7 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

1. *Déterminer un équivalent de*
$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$
exo:2004:Oct:Fri:11:04:41
En déduire que $u_n \to 0$.
2. *En s'inspirant de ce qui précède, établir que* $\sqrt{n}u_n \to C > 0$ *(on ne cherchera pas expliciter la valeur de* C*).*

Exercice 2.8.8 ★★★ **X MP**
exo:2005:Jan:Tue:22:30:28
Soit (u_n) *une suite complexe telle que pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{pn} - u_n \to 0$. *Peut-on affirmer que la suite* (u_n) *converge ?*

Exercice 2.8.9 ★★★ **X MP**
Étudier la limite quand $n \to +\infty$ *de*
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

2.9 Calculs de somme de séries

Exercice 2.9.1 ★★★ **Centrale PC 2005**
Soit $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. *On pose*
$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(a^{2^k}+1\right)}.$$
1. *Discuter suivant la valeur de* a *la nature de* $\sum u_n$.
2. *Lorsque la série converge, calculer sa somme.*

Indication 2.0 : Montrer que $u_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n$ *où* (α_n) *est une suite à déterminer.*

Exercice 2.9.2 ★ **Mines 2007**
1. *Étudier la convergence et calculer la somme de* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *en remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.
2. *Même question avec* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

2.10 Produit de Cauchy de deux séries

2:49
Exercice 2.10.1 ★
On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
1. *Étudier sa convergence et sa convergence absolue.*
2. *Soient* $a < b$. *Majorer simplement* $(x-a)(b-x)$ *pour* $x \in [a,b]$.
3. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série divergente.*

Exercice 2.10.2 ★★★
On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
1. *Convergence de cette série ?*
2. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série convergente.*

Exercice 2.10.3 ★
Soit $z \in \mathbb{C}$. *Montrer que*
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$$

Exercice 2.10.4 ★
Indiquer la nature et éventuellement la somme de la série de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$$

Exercice 2.10.5 ★
1. *Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général*
$$w_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!}.$$
2. *Faire de même avec la série de terme général*
$$w_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$$
en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2.10.6 ★
On considère les suites (a_n) *et* (b_n) *données par* $a_0 = b_0 = 0$ *et* $\forall n \geqslant 1$, $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont convergentes mais que leur produit de Cauchy est une série divergente.*

2.11 Formule de Stirling

Exercice 2.11.1 ★
Trouver un équivalent de
$$u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}.$$
Peut-on retrouver ce résultat à l'aide du critère de d'Alembert.

Exercice 2.11.2 ★

Étudier la limite de $\frac{(2n)!}{n^n n!}$ *ainsi que la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 2.11.3 ★

Étudier suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.

2.12 Transformation d'Abel

Abel

Exercice 2.12.1 ★ ***Transformation d'Abel***

Soient (a_n) *une suite positive décroissante de limite nulle et* (S_n) *une suite bornée.*

1. *Montrer que la série* $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ *est convergente.*

2. *En déduire que la série* $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ *est convergente.*

3. *Établir que pour tout* $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, *la série* $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ *est convergente.*

Exercice 2.12.2 ★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}.$$

1. *Montrer que* $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ *est bornée.*
2. *En déduire que* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *converge.*

Exercice 2.12.3 ★ ***ENSTIM***

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *non multiple de* 2π. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

1. *Montrer que la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
2. *En observant que* $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, *établir que la série de terme général* u_n *converge.*
3. *En exploitant l'inégalité* $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$, *établir que la série de terme général* $|u_n|$ *diverge.*

Exercice 2.12.4 ★ ***CCP MP***

1. *Montrer l'existence, pour* $\theta \in]0, \pi[$, *d'un majorant* M_θ *de la valeur absolue de*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

2. *Montrer que* $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ *est décroissante sur* $[2, +\infty[$.

3. *En remarquant de* $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, *étudier la convergence de la série de terme général*

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta)$$

4. *En utilisant* $|\cos(k\theta)| \geqslant \cos^2(k\theta)$, *étudier la convergence de* $\sum |u_n|$.