Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $(\mathrm{E}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Remarque 3.1 Soient $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul de E. On suppose que la droite $\mathrm{D} = \mathrm{V}ect(x)$ est stable par u. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Mais alors pour tout $x' \in \mathrm{D}$, $u(x') = \lambda x'$. En effet, comme $x' \in \mathrm{D}$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x' = \alpha x$ et $u(x') = u(\alpha x) = \lambda\alpha x = \lambda x'$.
Remarquons aussi que si E est de dimension finie, alors dans une base e de E adaptée à D, la matrice de u est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

Cette remarque nous conduit aux définitions suivantes.

DÉFINITION 3.1 ★ **Valeurs propres, spectre**
Soit un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de l'endomorphisme u s'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ *non-nul* tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$.
2. L'ensemble de toutes les valeurs propres de u s'appelle le *spectre* de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

DÉFINITION 3.2 ★ **Vecteurs propres, sous-espaces propres**
Soit un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. On dit qu'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est un *vecteur propre* de l'endomorphisme u si et seulement si :

   H1 $x \neq 0_\mathrm{E}$,

   H2 il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

   On dit alors que x est un *vecteur propre associé à la valeur propre* λ.
2. Pour une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on définit le *sous-espace propre* associé :

$$\mathrm{E}_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$$

Remarque 3.2

1. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrit $\mathrm{E}(\lambda)$ plutôt que $\mathrm{E}_u(\lambda)$.
2. Même si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on note également $\mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$. Alors λ est une valeur propre si et seulement si $\mathrm{E}(\lambda) \neq \{0_\mathrm{E}\}$.
3. Si $x \in \mathrm{E}$ est un vecteur non-nul alors la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u.
4. En dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si l'endomorphisme $(u - \lambda\,\mathrm{id})$ n'est pas inversible. C'est faux en dimension infinie : λ est valeur propre de u si et seulement si $(u - \lambda\,\mathrm{id})$ n'est pas injectif.

Exemple 3.1

1. Homothétie : si $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ est l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, la seule valeur propre de u est λ et tout vecteur de E non nul est un vecteur propre associé. Donc $\mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{E}$.
2. Projection : Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et si $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ est la projection sur F parallèlement à G (F et G de dimension au moins 1), les valeurs propres de u sont 0 et 1 et on a : $\mathrm{E}(0) = \mathrm{G}$ et $\mathrm{E}(1) = \mathrm{F}$.
3. Symétrie : Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et si u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G (F et G de dimension au moins 1), les valeurs propres de u sont 1 et -1 et on a : $\mathrm{E}(1) = \mathrm{F}$ et $\mathrm{E}(-1) = \mathrm{G}$.

PROPOSITION 3.1 ★★ **Quelques remarques importantes**
Soient un espace E de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. u est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
2. Si u est inversible, les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u.
3. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ est valeur propre de u alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ^n est valeur propre de u^n.
4. Pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_m\mathrm{X}^m$, on définit le *polynôme d'endomorphisme* $\mathrm{P}(u) = a_0\,\mathrm{id}_\mathrm{E} + a_1 u + \cdots + a_m u^m$. Alors si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ est valeur propre de u, $\mathrm{P}(\lambda)$ est valeur propre de $\mathrm{P}(u)$.
5. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un *polynôme annulateur* de u, i.e. $\mathrm{P}(u) = 0_{\mathfrak{L}(\mathrm{E})}$, alors si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ est valeur propre de u, c'est une racine de P : $\mathrm{P}(\lambda) = 0_\mathbb{K}$.

Démonstration

1. *Si u est inversible alors elle est injective et son noyau est réduit au vecteur nul. Le seul vecteur x tel que $u(x) = 0$ est donc $x = 0$ et 0 ne peut être une valeur propre de u. Réciproquement, si 0 n'est pas une valeur propre alors u ne s'annule sur aucun vecteur non nul et son noyau est réduit à 0. Donc u est injective et comme E est de dimension finie, u est aussi surjective, donc inversible.*
2. *On suppose que u est inversible et que λ est une valeur propre de u. D'après le point précédent, $\lambda \neq 0$. Soit x est un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors $u(x) = \lambda x$ mais comme $\lambda \neq 0$, on a aussi en composant par u^{-1} des deux côtés de l'égalité et en divisant par λ, $u^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$ donc λ^{-1} est une valeur propre de u^{-1}. On montre ainsi que l'inverse de toute valeur propre de u est une valeur propre de u^{-1}. En raisonnant de même avec u^{-1}, on montre la réciproque.*

3. *Le troisième point se montre par une récurrence facile.*
4. *Soit* $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{K}[X]$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. *Par définition d'une valeur propre, il existe* $x \in E$, $x \neq 0$ *tel que* $u(x) = \lambda x$. *En utilisant le point précédent, il vient :*
$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k x = P(\lambda) x$$
et $P(\lambda)$ *est valeur propre de* $P(u)$.
5. *Si* $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$ *et si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ *alors* $P(\lambda)$ *est une valeur propre de* $P(u)$ *mais ce dernier étant l'endomorphisme nul, on a nécessairement* $P(\lambda) = 0$.

Remarque 3.3 Si on connaît un polynôme P annulateur de $u \in \mathfrak{L}(E)$ alors les valeurs propres de u sont à chercher parmi les racines de P.

LEMME 3.2 ★ **Vecteurs propres et liberté**
Soient $p \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
Si $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est libre alors il en est de même de $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

Démonstration *Soit* $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ *une famille de scalaires telle que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. *On applique* u *à cette somme, on obtient* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i) = 0$, *c'est-à-dire* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$. *On retire alors à cette relation* λ_n *fois la première, on trouve :*
$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\lambda_i - \lambda_n\right) x_i = 0.$$
Si la famille $(x_i)_{i=1,\dots,n-1}$ *est libre alors il en est de même de* $(x_i)_{i=1,\dots,n}$. *En effet, on a dans ce cas, pour tout* $i = 1, \dots, n-1$, $\alpha_i \left(\lambda_i - \lambda_n\right) = 0$, *ce qui amène, les valeurs propres étant deux à deux distinctes,* $\alpha_i = 0$. *Donc de la somme initiale* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, *il ne reste que* $\alpha_n x_n = 0$ *et donc, comme* $x_n \neq 0$, $\alpha_n = 0$.

Ce résultat intermédiaire va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 ★ **Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre**
Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ des vecteurs propres d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres *distinctes* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre dans E.

Démonstration *Comme* x_1 *est un vecteur propre, il est non nul et donc* (x_1) *est libre. Mais d'après le lemme,* (x_1, x_2) *est aussi libre, et ainsi de suite jusqu'à* $(x_1, \dots, x_n)$

PROPOSITION 3.4 ★ **Deux sous-espaces propres sont en somme directe**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ et λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes de u alors $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$ sont en somme directe

Démonstration *Soit* $x \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$. *Alors* $f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$ *ce qui n'est possible que si* $x = 0$ *car* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Donc* $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0\}$.

Plus généralement, on a le très important résultat suivant :

COROLLAIRE 3.5 ★★★ **Les sous-espaces propres sont en somme directe**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ et une famille finie $(\lambda_i)_{i \in I}$ de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors la somme des sous-espaces propres associée est directe :
$$E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p) = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p)$$

Démonstration *Soit* $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ *tels que* $x_1 + \dots + x_p = 0$. *Supposons que certains, parmi les vecteurs* $x_1, \dots, x_p$, *ne soient pas nuls. Alors la famille* $(x_1, \dots, x_p)$ *est liée. On retire de cette famille* $(x_1, \dots, x_p)$ *les vecteurs qui sont nuls et on note, quitte à re-numéroter les sous-espaces propres,* $(x_1, \dots, x_{p'})$ *la famille obtenue* ($p' \leqslant p$). *On a toujours* $x_1 + \dots + x_{p'} = 0$ *et donc la famille* $(x_1, \dots, x_{p'})$ *est liée. Comme les vecteurs* $x_1, \dots, x_{p'}$ *ne sont pas nuls, ce sont des vecteurs propres et ils sont associés à des valeurs propres distinctes. Ils forment alors, d'après le théorème 3.3, une famille libre, ce qui est absurde. Donc les vecteurs* $x_1, \dots, x_p$ *sont tous nuls et la somme des sous-espaces propres est bien directe.*

THÉORÈME 3.6 ★ **Les sous-espaces propres d'endomorphismes qui commutent sont stables**
Soient $(u, v) \in \mathfrak{L}(E)^2$ deux endomorphismes qui commutent :
$$u \circ v = v \circ u$$
Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Montrons que le sous-espace propre $\mathrm{E}_u(\lambda)$ associé est stable par v. Soit $x \in \mathrm{E}_u(\lambda)$ alors, comme u et v commutent, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ et donc $v(x) \in \mathrm{E}_u(\lambda)$, ce qui prouve la propriété.*

Remarque 3.4 Si D est une droite vectorielle de E stable par $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ alors tout vecteur x générateur de D est un vecteur propre pour u. En effet, on a $u(x) \in \mathrm{D}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme x est non nul, x un vecteur propre de u de valeur propre associée λ.

3.2 Valeurs propres en dimension finie, polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

DÉFINITION 3.3 ★ **Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice**
Soit une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de la matrice A si et seulement s'il existe une matrice colonne $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non-nulle* telle que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$.
Une telle matrice colonne est appelée *vecteur propre associé à la valeur propre* λ.
On appelle *spectre* de la matrice A et l'on note Sp(A) l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque 3.5 Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, e une base de E et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{A}$, les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u. Les vecteurs propres de A sont les matrices colonnes des vecteurs propres de l'endomorphisme u dans la base e.

DÉFINITION 3.4 ★ **Polynôme caractéristique d'une matrice**
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A, le polynôme

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}).$$

Exemple 3.2 Pour une matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-a & -b \\ -c & \mathrm{X}-d \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} + (ad-bc) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A})$$

THÉORÈME 3.7 ★ **Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique**
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})$.

Démonstration *On utilise les propriétés du déterminant :*

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}) = \det\left(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{XI}_n - \mathrm{B})\,\mathrm{P}\right) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{B}) = \chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}).$$

Remarque 3.6 La réciproque est fausse. Par exemple, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$ et ne sont pas semblables (car de rangs différents).

DÉFINITION 3.5 ★ **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$, on appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme u, le polynôme

$$\chi_u(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\,\mathrm{id} - u)$$

Si e est une base de E et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$, alors $\chi_u(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$.

Remarque 3.7 La définition est bien cohérente car le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans lequel on le calcule. Ainsi si e' est une autre base de E et que $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ alors A et A′ sont semblables et $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{A}'}(\mathrm{X})$.

THÉORÈME 3.8 ★ **Racines du polynôme caractéristique**
Les valeurs propres d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$.

Démonstration

— *Soit* λ *une valeur propre de la matrice* A. *Alors il existe une matrice colonne* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non-nulle telle que* $AX = \lambda X$. *Donc* X *annule* $\lambda I_n - A$ *et* $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

— *Réciproquement, si* $\det(\lambda I_n - A) = 0$ *alors il existe* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non-nulle tel que* $AX = \lambda X$ *et* λ *est une valeur propre de* A.

PROPOSITION 3.9 ★ **Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont ses éléments diagonaux**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux $a_{11}, \dots, a_{nn}$.

Démonstration *Comme* A *est triangulaire supérieure,* $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_{i,i})$ *et la liste des valeurs propres de* A *est donnée par celle des racines de* χ_A, *c'est-à-dire par* $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$.

THÉORÈME 3.10 ★ **Polynôme caractéristique d'une restriction**

Soit un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u. On note $v = u_{|F}$ la restriction de u au sous-espace F : $v \in \mathfrak{L}(F)$. Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v divise le polynôme caractéristique χ_u de u.

Démonstration *Écrire la matrice de* u *dans une base adaptée et utiliser le déterminant par blocs.*

Remarque 3.8 En particulier, si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors A est semblable à la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $B \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

LEMME 3.11 ★ **Un lemme technique**

Soit $P = (P_{i,j}(X))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}_1[X])$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}_1[X]$. On note $m \in [\![1, n^2]\!]$ le nombre de polynômes de cette matrice qui sont exactement de degré 1. Alors $\det(P) \in \mathbb{K}_m[X]$.

Démonstration *On effectue une récurrence sur* n. *Si* $n = 1$, *le résultat est trivial. Soit* $n \geqslant 2$. *On suppose le résultat vrai pour tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$. *On considère* $P = (P_{i,j}(X))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}_1[X])$ *comptant* m *coefficient polynomiaux de degré* 1. *On développe* $\det(P)$ *par rapport à la première colonne :*

$$\det(P) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} P_{k,1} \Delta_{k,1}$$

où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, *on a* $\Delta_{k,1}$ *est le déterminant d'une matrice de* $\mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K}_1[X])$. *Il y a deux cas possibles :*

— *Soit* $P_{k,1}$ *est de degré* 1 *dans quel cas* $\Delta_{k,1}$ *compte* $m-1$ *polynôme de degré* 1. *Donc par hypothèse de récurrence* $P_{k,1}\Delta_{k,1}$ *est un polynôme au plus de degré* m.

— *Soit* $P_{k,1}$ *est de degré* < 1 *dans quel cas* $\Delta_{k,1}$ *compte au plus* m *polynôme de degré* 1 *et par hypothèse de récurrence, on a à nouveau que* $P_{k,1}\Delta_{k,1}$ *est un polynôme au plus de degré* m.

Par suite, $\det(P)$ *est un polynôme de degré au plus* m *comme somme de tels polynômes.*
Le lemme est ainsi prouvé par récurrence.

PROPOSITION 3.12 ★ **Coefficients remarquables du polynôme caractéristique**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est un polynôme de degré n exactement;
2. $\chi_A(X)$ est unitaire;
3. $\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$;
4. Si *le polynôme caractéristique* χ_A *est scindé*, de racines les valeurs propres de A, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ comptées avec leur ordre de multiplicité,

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \det(A) \end{cases}}$$

Démonstration *Le lemme nous assure que* χ_A *est un polynôme de degré au plus* n.
De plus, son terme constant est $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$.
On poursuit alors par récurrence sur n.
Si $n = 1$, *la proposition est démontrée.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On développe $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ relativement à la première colonne :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = (X - a_{1,1})\Delta_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1}\Delta_{k,1}$$

où pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\Delta_{k,1}$ compte exactement $n-2$ polynômes de degré $n-2$ sauf $\Delta_{1,1}$ qui en compte $n-1$.
D'après le lemme, on a $\deg a_{k,1}\Delta_{k,1} \leqslant n-2$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$.
Par ailleurs, si A' est la matrice extraite de A en lui supprimant sa première colonne et sa première ligne, alors $\delta_{1,1} = \det(XI_{n-1} - A') = \chi_{A'}(X)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence à $A' \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ alors $\Delta_{1,1} = X^{n-1} - \operatorname{Tr}(A')X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A')$.
On en déduit alors que :

$$\chi_A(X) = (X - a_{1,1})(X^{n-1} - \operatorname{Tr}(A')X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A')) + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1}\Delta_{k,1}}_{\in \mathbb{K}_{n-2}[X]} = X^n - \operatorname{Tr}(A) + Q$$

où $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. On prouve ainsi par récurrence que χ_A est de la forme annoncée.
Si de plus ce polynôme est scindé, on obtient les égalités sur la trace et le déterminant en utilisant les relations coefficients-racines.

Remarque 3.9 Une matrice de taille $n \times n$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Remarque 3.10 Comme tout polynôme (à coefficients réels ou complexes) admet au moins une racine complexe (théorème fondamental de l'algèbre), on en déduit que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre complexe. Ce résultat est faux pour les matrices réelles : la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ qui n'admet aucune racine réelle. Plus généralement, une matrice de rotation $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $P_{R_\theta}(X) = (\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta$ et lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, la matrice R_θ n'admet aucune valeur propre réelle.

Remarque 3.11 Les matrices A et A^T ont même polynôme caractéristique (donc même spectre).

Remarque 3.12 Si l'on connaît $n-1$ valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ de A comptées avec leur ordre de multiplicité, A possède n valeurs propres, et la dernière valeur propre s'obtient avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = \operatorname{Tr}(A)$.

PLAN 3.1 : Pour calculer les valeurs propres d'un endomorphisme

1. *Il suffit de calculer les racines de son polynôme caractéristique χ_u.*
2. *S'il est scindé, on vérifie alors son calcul en utilisant que*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{Tr}(A) \\ \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = \det(A) \end{cases}$$

où les λ_i sont comptées avec leur ordre de multiplicité.

DÉFINITION 3.6 ★ **Ordre de multiplicité d'une valeur propre**
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre d'un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$. On appelle *ordre de multiplicité* de la valeur propre λ, l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme $\chi_u(X)$ et on note $m_u(\lambda)$ cet entier que l'on appelle également *exposant caractéristique* de λ.

$$\begin{cases} (X-\lambda)^{m_u(\lambda)} \text{ divise } \chi_u(X) \\ (X-\lambda)^{m_u(\lambda)+1} \text{ ne divise pas } \chi_u(X) \end{cases}$$

✎ *Notation 3.3* Si aucune confusion n'est à craindre, on écrit $m(\lambda)$ plutôt que $m_u(\lambda)$.

THÉORÈME 3.13 ★ **Ordre de multiplicité et dimension des sous-espaces propres**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ une valeur propre de u. On a l'inégalité :

$$\boxed{1 \leqslant \dim E(\lambda) \leqslant m_u(\lambda)}.$$

Démonstration On considère $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $E(\lambda)$ qu'on complète en une base $e=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. La matrice de u dans e est de la forme

$$\begin{pmatrix}\lambda I_p & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$$

avec $B\in\mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C\in\mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et son polynôme caractéristique est donc de la forme $\chi_u(X)=(\lambda-X)^p\chi_C(X)$ d'où $(\lambda-X)^p \mid \chi_u$ ce qui donne $\dim E(\lambda)=p\leqslant m(\lambda)$.

Remarque 3.13 Si $\mathrm{rg}(A)=r<n$, alors 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité $n-r$ au moins.

Remarque 3.14 L'ordre de multiplicité de 0 peut être strictement supérieur à $n-\mathrm{rg}(A)$: si $J=\begin{pmatrix}0 & & & \mathbb{O}\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 1 & 0\end{pmatrix}$, $P_J(X)=X^n$, l'ordre de multiplicité de 0 est n et pourtant $\mathrm{rg}(A)=n-1$.

3.3 Diagonalisation

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont de dimension finie.

DÉFINITION 3.7 ★ **Endomorphisme diagonalisable**
On dit qu'un endomorphisme $u\in\mathfrak{L}(E)$ est *diagonalisable* si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

THÉORÈME 3.14 ★★★ **Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il existe une base formée de vecteurs propres de u**
Un endomorphisme $u\in\mathfrak{L}(E)$ est *diagonalisable* si et seulement si il existe une base e de E formée de vecteurs propres. De plus, dans cette base,

$$\mathrm{Mat}_e(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbb{O}\\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de u (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Démonstration Supposons que u est diagonalisable. Alors il existe une base $e=(e_1,\dots,e_n)$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_e(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbb{O}\\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Pour pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $u(e_i)=\lambda_i e_i$. Autrement dit e est une base formée de vecteurs propres de u et les λ_i sont les valeurs propres associées.
La réciproque est immédiate.

DÉFINITION 3.8 ★ **Matrices diagonalisables**
Soit une matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que *la matrice* A *est diagonalisable* si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé [1] à A est diagonalisable.

PROPOSITION 3.15 ★★★ **Matrices diagonalisables**
Une matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists P\in GL_n(\mathbb{K}):\quad \exists D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbb{O}\\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}:\quad A=P^{-1}DP$$

Démonstration On note $u\in\mathfrak{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ admettant A comme matrice dans la base canonique e de $\mathbb{K}^n$.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que A est diagonalisable donc il existe une base e' de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle $\mathrm{Mat}'_e(u)=P^{-1}AP$ est diagonale où P représente la matrice de changement de base de e à e'. Donc A est semblable à une matrice diagonale.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* A *est semblable à une matrice diagonale, alors il existe une base* e' *de* E *dans laquelle la matrice de* u *est diagonale et donc* A *est diagonalisable.*

THÉORÈME 3.16 ★★★ **Caractérisation de la diagonalisabilité**
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On a équivalence entre :

1. u est diagonalisable.
2. E admet une base formée de vecteurs propres.
3. $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{E}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}(\lambda_p)}$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres de u.
4. La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E :

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{E}(\lambda) = \dim \mathrm{E}}.$$

Démonstration

— $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ *Voir théorème 3.14.*

— $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ *On sait déjà que la somme des sous-espaces propres est directe. Il faut montrer qu'elle est égale à* E. *On note* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de vecteurs propres de* E. *Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *il existe* $j \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $e_i \in \mathrm{E}(\lambda_j)$ *donc* $\mathrm{E} = \mathrm{V}ect(e) \subset \bigoplus_{k=1}^p \mathrm{E}(\lambda_i)$. *Comme par ailleurs, on a* $\bigoplus_{k=1}^p \mathrm{E}(\lambda_i) \subset \mathrm{E}$, *il s'ensuit que* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^p \mathrm{E}(\lambda_i)$.

— $\boxed{3 \Rightarrow 2}$ *Réciproquement, on suppose que* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^p \mathrm{E}(\lambda_i)$. *Si pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$, *on note* e^i *une base de* $\mathrm{E}(\lambda_i)$ *alors ces* p *bases sont évidemment constituées de vecteurs propres de* u. *On note* e *la réunion de ces bases. On sait alors, d'après le théorème* **??** *page* **??**, *que comme* $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}(\lambda_p)$ *alors* e *est une base de* E.

— $\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$ *Cette équivalence est une conséquence directe du théorème* **??** *page* **??**.

Remarque 3.15

1. Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$, la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Si f est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme u et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{e \mapsto f}$ est la matrice des vecteurs propres de u dans la base e, alors $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D}\mathrm{P}$ où D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de u.
3. *diagonaliser* une matrice A consiste à calculer explicitement la matrice diagonale D la matrice inversible P telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D}\mathrm{P}$ et éventuellement à calculer explicitement P^{-1}.

THÉORÈME 3.17 ★ **Caractérisation par les exposants caractéristiques**
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable si et seulement si :

1. Le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Pour toute valeur propre λ_i de u, $\boxed{\dim \mathrm{E}(\lambda_i) = \mathrm{m}_u(\lambda_i)}$.

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$ *En notant* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de* u *comptées avec leur ordre de multiplicité, puisque* u *est diagonalisable, il existe une base* e *de vecteurs propres de* u. *Dans cette base,* $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$. *Le polynôme caractéristique de* u *est donc* $\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ *qui est scindé. De plus, s'il existe* $k \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $\dim \mathrm{E}(\lambda_k) < \mathrm{m}(\lambda_k)$ *alors*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{E}(\lambda) < \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{m}(\lambda) = n = \dim \mathrm{E}$$

ce qui vient contredire que $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}(\lambda)$. *Donc pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim \mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{m}(\lambda)$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ *Puisque* $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{\mathrm{m}(\lambda_1)} \ldots (X - \lambda_p)^{\mathrm{m}(\lambda_p)}$ *et que* $\deg \chi_u = n$, *il vient que*

$$n = \mathrm{m}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}(\lambda_p)$$

Par conséquent,

$$\dim \mathrm{E}(\lambda_1) + \cdots + \dim \mathrm{E}(\lambda_p) = \dim \mathrm{E}$$

Comme on sait que la somme des sous-espaces propres est directe, on en déduit, d'après la proposition précédente, que $\mathrm{E}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}(\lambda_p) = \mathrm{E}$ *et donc que* u *est diagonalisable.*

Remarque 3.16 Avec la formule du rang, $\dim E(\lambda) = n - \mathrm{rg}(u - \lambda I_n)$. Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement $E(\lambda)$, il suffit de calculer le rang de la matrice $(A - \lambda I)$ pour vérifier la CNS de diagonalisabilité.

COROLLAIRE 3.18 ★ **Une condition suffisante de diagonalisabilité**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ où E est de dimension n. Si l'endomorphisme u possède n valeurs propres *distinctes*, alors il est diagonalisable.

Démonstration *Le polynôme caractéristique est* $\chi_u(X) = (\lambda_1 - X)\dots(\lambda_n - X)$ *et pour toute valeur propre* λ_i,

$$1 \leqslant \dim E(\lambda_i) \leqslant m(\lambda_i) = 1$$

Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ *et* $\dim E(\lambda_i) = m(\lambda_i) = 1$. *D'après le théorème précédent, u est diagonalisable.*
On peut également remarquer que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes), donc forme une base de vecteurs propres de u.*

Remarque 3.17 Ce cas est le plus simple possible. Lorsque u possède n valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si v est un endomorphisme qui commute avec u, ces sous-espaces propres $E(\lambda_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)$ sont stables par v, et donc les vecteurs propres de u sont également des vecteurs propres de v : la base ε est formée de vecteurs propres communs à u et à v : $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mathrm{Mat}_\varepsilon(v) = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

PLAN 3.2 : Pour tester si une matrice est diagonalisable

On veut montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

1. *On calcule son polynôme caractéristique* $\chi_A(X)$.
2. *On factorise* $\chi_A(X)$.
3. *Si* $\chi_A(X)$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et n'a que des racines simples, c'est terminer, A est diagonalisable.*
4. *Sinon, on cherche la dimension des sous-espaces propres correspondant aux racines multiples* λ. *Pour ce faire, on peut utiliser que* $\dim E(\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.
5. *Si cette dimension est à chaque fois égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondant et que* $\chi_A(X)$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *alors A est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.*

Exemple 3.4 Montrons que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est diagonalisable.

Solution : *On calcule le polynôme caractéristique en développant par rapport à* C_2 :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix} = X(X-1)^2.$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$. *De plus,* $\mathrm{rg}(A - 0I_3) = \mathrm{rg}(A) = 2$ *car les colonnes* C_1 *et* C_3 *de A sont proportionnelles mais* C_1 *et* C_2 *ne le sont pas. Donc par la formule du rang* $\dim E(0) = \dim \mathrm{Ker} A = 1 = m(0)$. *On a aussi :*

$$\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

car les colonnes C_1 *et* C_3 *sont identiques et que* $C_2 = 0$. *Donc par la formule du rang* $\dim E(1) = \dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 2 = m(1)$. *Comme le polynôme caractéristique de A est scindé et que les ordres de multiplicité des valeurs propres de A sont égaux à la dimension des sous-espaces propres associés, on en déduit par critère de diagonalisabilité que A est diagonalisable.*

PLAN 3.3 : Comment diagonaliser une matrice

On suppose que la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable et on veut la diagonaliser.*

1. *On calcule son polynôme caractéristique* $\chi_A(X)$.
2. *On factorise* $\chi_A(X)$, *ce qui nous donne les valeurs propres de A.*

3. *Pour chaque valeur propre λ, on cherche une base du sous-espaces propre associé. Pour ce faire, on peut résoudre le système $(A-\lambda I_n)X=0$.*
4. *On met bout à bout les bases ainsi calculées pour en obtenir une de l'espace tout entier.*

Exemple 3.5 Nous nous proposons maintenant de diagonaliser (si c'est possible !) la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Solution :

$$\begin{aligned}\chi_A(X)&=\begin{vmatrix}-X&-1&2\\0&(1-X)&0\\1&1&-(1+X)\end{vmatrix}\\&=(1-X)\begin{vmatrix}-X&2\\1&-(1+X)\end{vmatrix}\\&\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{=\!=}(X-1)^2\begin{vmatrix}-X&2\\1&1\end{vmatrix}\\&\underset{C_2\leftarrow C_2+C_1}{=\!=}(X-1)^2(X+2)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A)=\{-2,1\}$. *On cherche les sous-espaces propres de* A. *Comme* $E(-2)=\mathrm{Ker}\,(A+2I_2)$, *on résout le système*

$$\begin{cases}2x-y+2z&=0\\ \quad 3y&=0\\ x+y+z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}z&=-x\\ y&=0\end{cases}.$$

Alors $E(-2)=\mathrm{Vect}\big(V_3\big)$ *où* $V_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}^T$. *On vérifie que* $\dim E(-2)=1=m(-2)$.
De même, $E(1)=\mathrm{Ker}(A-I_3)$ *qu'on calcule en résolvant* $x+y-2z=0$. *On trouve alors* $E(1)=\mathrm{Vect}\big(V_1,V_2\big)$ *où* $V_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}^T$ *et* $V_2=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$. *Comme* V_1 *et* V_2 *ne sont pas colinéaires,* $\dim E(1)=2=m(1)$.
Comme de plus χ_A *est scindé,* A *est diagonalisable. On obtient alors que* $D=P^{-1}AP$ *avec*

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

et où les colonnes de P *sont formées des vecteurs propres de* A *écrits dans le même ordre que les valeurs propres correspondantes dans* D.

Exemple 3.6 Quand on peut et afin d'éviter les calculs, il est préférable de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants directement par lecture matricielle. Reprenons l'exemple 3.4 avec la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Solution :
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* A *et e la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *alors on remarque, par lecture dans la matrice, que* $u(e_1+e_2-2e_3)=0$ *et que* $u(e_2)=e_2$ *donc* $0,1\in\mathrm{Sp}(A)$. *Alors le polynôme caractéristique de* A *est unitaire et de degré* 3, *il est de la forme* $\chi_A(X)=X(X-1)(X-\lambda)$ *où* $\lambda\in\mathbb{R}$. *En particulier,* χ_A *est scindé sur* $\mathbb{R}$. *Alors comme* $\mathrm{Tr}\,(A)=2$, 1 *est une valeur propre double et* $\chi_A=X(X-1)^2$. *On connaît un vecteur propre associé à* $\lambda=1$, *comme* $u(e_1-e_2)=e_1-e_2$, *on en obtient un deuxième.*
On en déduit que $E(0)=\mathrm{Vect}(V_1)$ *où* $V_1=\begin{pmatrix}1&1&-2\end{pmatrix}^T$. *Donc* $\dim E(0)=1=m(0)$. *Puis* $E(1)=\mathrm{Vect}(V_2,V_3)$ *où* $V_2=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}^T$ *et* $V_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}^T$. *Comme* V_2 *et* V_3 *ne sont pas colinéaires, la famille* (V_2,V_3) *est libre et* $\dim E(1)=2=m(1)$. *Comme de plus,* χ_A *est scindé sur* $\mathbb{R}$, A *est donc diagonalisable.*
On obtient finalement que $D=P^{-1}AP$ *avec*

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3.4 Trigonalisation des endomorphismes et des matrices

3.4.1 Définitions et propriétés

DÉFINITION 3.9 ★ **Endomorphisme trigonalisable**
On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ est *trigonalisable* si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure

DÉFINITION 3.10 ★ **Matrice trigonalisable**
Soit une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : \quad \exists \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} : \quad \mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$$

THÉORÈME 3.19 ★★★ **Critère de trigonalisabilité des endomorphismes**
Soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On a équivalence entre :

1. le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. l'endomorphisme u est trigonalisable.

Avant de le démontrer, donnons tout de suite sa traduction matricielle :

THÉORÈME 3.20 ★★★ **Critère de trigonalisabilité des matrices**
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

1. le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. A est trigonalisable.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. On prouve que u est trigonalisable par récurrence sur la dimension n de* E.
Si $n = 1$, u est évidemment trigonalisable.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable. Considérons un endomorphisme u défini sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E *de dimension $n+1$. Comme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il admet une racine $\lambda \in \mathbb{K}$. Cette racine est une valeur propre de u et il existe donc $e_1 \in \mathrm{E}$, $e_1 \neq 0$ tel que $u(e_1) = \lambda e_1$. On complète la famille (e_1) en une base $e = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de* E. *On a alors, si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$:*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0 & \tilde{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{L} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\tilde{\mathrm{A}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus $\chi_u(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda)\chi_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{X})$ et comme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il s'ensuit que $\chi_{\tilde{\mathrm{A}}}$ est aussi scindé sur $\mathbb{K}$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $\tilde{\mathrm{A}}$. Comme le polynôme caractéristique de cet endomorphisme est $\chi_{\tilde{\mathrm{A}}}$ qui est scindé sur $\mathbb{K}$, on sait qu'il existe $\tilde{\mathrm{P}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\tilde{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $\tilde{\mathrm{T}} = \tilde{\mathrm{P}}^{-1}\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{P}}$. Posons alors

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathrm{P}} \end{pmatrix}.$$

De $\det(\mathrm{P}) = \det(\tilde{\mathrm{P}})$, *on tire que $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. De plus, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathrm{P}}^{-1} \end{pmatrix}$. Enfin, en utilisant la formule du produit par blocs, on a :*

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathrm{P}}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L} \\ 0 & \tilde{\mathrm{A}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathrm{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L}\tilde{\mathrm{P}} \\ 0 & \tilde{\mathrm{P}}^{-1}\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{L}\tilde{\mathrm{P}} \\ 0 & \tilde{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

qui est bien triangulaire supérieure car T *l'est.*
La propriété est alors prouvée par récurrence.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement si u est trigonalisable, alors dans une base e de E sa matrice est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(où, d'après la proposition 3.9, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité). Donc $\chi_u(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^n (\mathrm{X} - \lambda_i)$ qui est bien scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque 3.18 Tout polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ donc tout endomorphisme de E et toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. C'est évidemment faux dans $\mathbb{R}$. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a un spectre réel vide.

3.4.2 Trigonalisation en dimension 2

PROPOSITION 3.21 **Trigonalisation en dimension 2 Hors programme**
Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ de matrice A dans une base donnée.
On suppose que u (ou A) est trigonalisable mais pas diagonalisable. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que A soit semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Démonstration *Comme l'endomorphisme u est trigonalisable, il admet au moins un vecteur propre f_1 associé à une valeur propre λ. Si on choisit un vecteur $f_2' \in \mathrm{E}$ non colinéaire à f_1, on forme une base $f = (f_1, f_2')$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$ avec $\lambda', \alpha \in \mathbb{K}$. Remarquons que quelque soit le vecteur f_2 choisi, on a $\lambda' = \lambda$. En effet si ce n'était pas le cas alors u serait diagonalisable. De la même façon on a $\alpha \neq 0$. Donc $\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On a donc $u(f_2') = \alpha f_1 + \lambda f_2'$ et en prenant $f_2 = f_2'/\alpha$ en lieu et place de f_2', la matrice de u dans la base (f_1, f_2) est de la forme annoncée. En effet $u(f_2) = u(f_2'/\alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha f_1 + \lambda f_2) = f_1 + \lambda f_2'$.*

3.4.3 Trigonalisation en dimension 3

On a un théorème analogue en dimension 3 :

PROPOSITION 3.22 **Trigonalisation en dimension 3 Hors programme**
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ de matrice A dans une base donnée.
On suppose que u (ou A) est trigonalisable mais pas diagonalisable. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que A soit semblable à une des trois matrices :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Démonstration *On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines de χ_u. Comme u n'est pas diagonalisable, ces racines ne sont pas toutes distinctes. Il y a alors deux possibilités, soient deux d'entre elles sont égales soient elles sont toutes égales.*

$\boxed{\text{Cas où seulement deux valeurs propres parmi les trois sont égales :Si } \lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \mu \neq \lambda}$ *Quitte à considérer $u - \mu\,\mathrm{id}$ en lieu et place de u, on peut supposer $\mu = 0$. Comme $1 \leqslant \dim \mathrm{E}(\lambda) \leqslant \mathrm{m}_u(\lambda) = 1$ on a $\dim \mathrm{E}(\lambda) = 1$. Soit f_1 un vecteur propre associé à λ. Il engendre donc $\mathrm{E}(\lambda_1)$. On a aussi $1 \leqslant \dim \mathrm{E}(\mu) \leqslant \mathrm{m}_u(\mu) = 2$. Comme u n'est pas diagonalisable, il vient $\dim \mathrm{E}(\mu) = 1$. Soit f_2 un vecteur propre associé à μ. Il engendre donc $\mathrm{E}(\mu)$. On complète (f_1, f_2) en une base (f_1, f_2, f_3') de E. On a alors*

$$\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Mais γ étant sur la diagonale, c'est une valeur propre de A et donc $\gamma = \mu = 0$. De plus[2]*, $\mathrm{rg}(u) = 2$ donc $\beta \neq 0$. On cherche $f_3 = x f_1 + y f_2 + z f_3'$ tel que $u(f_3) = f_2 + \mu f_3$. Il vient $x\lambda f_1 + z(\alpha f_1 + \beta f_2) = f_2$ soit*

$$(x\lambda + z\alpha) f_1 + (z\beta - 1) f_2 = 0.$$

Comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, on obtient $z = \frac{1}{\beta}$ et $x = -\frac{\alpha}{\beta\lambda}$ ($\lambda \neq 0$ car $\lambda \neq \mu$). On trouve ainsi f_3 non coplanaire à f_1 et f_2 tel que dans la base $f = (f_1, f_2, f_3)$ la matrice de u a la forme voulue.

2. En effet, il existe f_1 et f_2 deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}\, u$ donc $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}\, u \geqslant 2$. Comme u n'est pas inversible, $\mathrm{rg}(u) = 2$.

$\boxed{\text{Cas où les trois valeurs propres sont égales : } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda}$ *Quitte à considérer* $u - \lambda\,\mathrm{id}$ *en lieu et place de* u*, on peut supposer que* $\lambda = 0$*. Comme* u *est trigonalisable, dans une bonne base sa matrice est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que u *est nilpotent d'indice* 3 *(*$u^3 = 0$*). Il y a alors deux cas :*

$\boxed{\text{Si } u^2 \neq 0}$ *L'endomorphisme* u *est alors nilpotent d'indice* u*. Alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $u(x) \notin \mathrm{Ker}\, u$*. On montre facilement que* $e = (u^2(x), u(x), x)$ *est une base de* E*. Dans cette base,*

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Si } u^2 = 0}$ *Dans ce cas,* $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$*. Comme* $\mathrm{Ker}\, u$ *est un sous-espace propre,* $\dim \mathrm{Ker}\, u \geqslant 1$*. Si* $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$ *alors* $\dim \mathrm{Im}\, u = 1$ *(on ne peut avoir* $\dim \mathrm{Im}\, u = 0$ *sinon* $u = 0$ *et* u *est diagonalisable) ce qui est impossible à cause de la formule du rang. Donc* $\dim \mathrm{Ker}\, u = 2$ *et la formule du rang amène* $\dim \mathrm{Im}\, u = 1$*. On considère alors une base* (e_1, e_2) *de* $\mathrm{Ker}\, u$ *qu'on complète en une base* (e_1, e_2, e_3) *de* E*. Dans cette base,*

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$*. Comme le polynôme caractéristique de cette matrice doit être le même que celui de* u*, on a* $\gamma = 0$*. Dans la base* $(\alpha e_1 + \beta e_2, e_2, e_3)$ *la matrice de* u *est alors*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PLAN 3.4 : Pour trigonaliser un endomorphisme

On se place dans le cas particulier suivant. On suppose que $\dim \mathrm{E} = 3$*, que* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$*, que* χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *avec une racine simple* λ_1 *et une racine double* λ_2*. On suppose que* $\dim \mathrm{E}(\lambda_1) = \dim \mathrm{E}(\lambda_2) = 1$ *ce qui nous permet d'affirmer que* u *n'est pas diagonalisable.*

1. *On cherche un vecteur* e_1 *qui formera une base de* $\mathrm{E}(\lambda_1)$*.*
2. *De même, on cherche un vecteur* e_2 *qui formera une base de* $\mathrm{E}(\lambda_2)$*.*
3. *On cherche un vecteur* e_3 *en résolvant* $(u - \lambda_2\, \mathrm{id}_\mathrm{E}) = e_2$*.*
4. *On vérifie que* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *est bien une base de* E

On a alors

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

PLAN 3.5 : Petit résumé en dimension 3

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$*.*

1. *Si* u *a trois valeurs propres simples alors* u *est diagonalisable et a pour matrice* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ *dans une base bien choisie.*
2. *Si* u *a une valeur propre simple et une double :*
   1. *si* $\dim \mathrm{E}(\lambda_2) = 2$ *alors* u *est diagonalisable et a pour matrice* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *dans une base bien choisie.*
   2. *sinon il n'est pas diagonalisable mais trigonalisable et pour ce faire, on utilise la méthode 4 et admet comme matrice* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *dans une base bien choisie.*
3. *Si* u *a une valeur propre triple* λ *:*

1. *Si* $\dim \mathrm{E}(\lambda_2) = 3$ *alors* u *est diagonalisable et a pour matrice* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *dans n'importe quelle base de* E. *Autrement dit* u *est l'homothétie vectorielle de rapport* λ.
2. *Si* $\dim \mathrm{E}(\lambda_2) < 3$ *alors* u *n'est pas diagonalisable mais trigonalisable. De plus :*
   1. *si* $\dim \mathrm{E}(\lambda_2) = 2$, u *admet comme matrice* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *dans une base bien choisie.*
   2. *si* $\dim \mathrm{E}(\lambda_2) = 1$, u *admet comme matrice* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *dans une base bien choisie.*

Exemple 3.7 On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

1. *On note la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* A. *On a* $u(e_1) = e_1$ *et* $u(e_3 - e_2) = e_3 - e_2$ *donc* $\{0,1\} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *et* $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-\alpha)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$. *La trace de* A *est alors égale à la somme des valeurs propres de* A *et on en tire la valeur propre manquante :* $\alpha = 1$. *Donc* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = 1$ *et* $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^3$. *On calcule que* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3) = 1$ *donc par la formule du rang,* $\dim \mathrm{E}(1) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3) = 2 \neq \mathrm{m}(1)$. *On en déduit que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *Comme* χ_{A} *est scindé sur* $\mathbb{R}$, A *est trigonalisable. On sait que si* $a = e_3 - e_2$, $b = e_1$ *alors* $u(a) = a$ *et que* $u(b) = b$. *Cherchons un vecteur* $c = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $u(c) = a + c$ *ou, matriciellement* $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)\mathrm{C} = \mathrm{A}$ *où* A *et* C *sont les matrices respectives de* a *et* c *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *On aboutit à l'équation* $y + z = 1$ *et une solution est* $c = (0,0,1)$. *On vérifie alors que* (a,b,c) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$. *Puis avec* $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_e((a,b,c)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on aboutit à* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{DP}$. *Les matrices* A *et* B *sont bien semblables.*

3.5 Applications de la diagonalisation

3.5.1 Calcul des puissances d'une matrice

Si A est une matrice diagonalisable, on dispose d'un algorithme pour calculer A^k $(k \in \mathbb{N})$:

1. Il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{où } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1} \quad \text{où } \mathrm{D}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Remarque 3.19 On peut également trouver l'inverse de A lorsqu'on a déjà calculé les matrices P et D : A est inversible si et seulement si $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n \neq 0$ et alors

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}\mathrm{P}$$

3.5.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants

Soit $\left(a_0,\dots,a_{p-1}\right)\in\mathbb{K}^p$. On note (R_p) la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+p}=a_0u_n+a_1u_{n+1}+\cdots+a_{p-1}u_{n+p-1}$$

PROPOSITION 3.23
L'ensemble des suites solutions de la relation de récurrence (R_p) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ noté $\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}$ de dimension p.

Démonstration *Le fait que $\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ est une conséquence directe de la linéarité de la relation de récurrence. Remarquons par ailleurs que l'application*

$$\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)} & \longrightarrow & \mathbb{K}^p\\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,\dots,u_{p-1})\end{array}\right.$$

est un isomorphisme. On vérifie facilement que θ est linéaire. Si $(u_n)\in\operatorname{Ker}\theta$ alors $\left(u_0,\dots,u_{p-1}\right)=0_{\mathbb{K}^p}$ et en utilisant la relation de récurrence, on montre par une récurrence facile que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=0$. Donc (u_n) est la suite nulle. Par conséquent, $\operatorname{Ker}\theta=\{0\}$ et θ est injectif. La surjectivité de θ est évidente : ainsi, pour $\left(u_0,\dots,u_{p-1}\right)\in\mathbb{K}^p$, on peut construire une unique suite $(v_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{K})$ satisfaisant R_p pour tout $n\geqslant p$ et la condition initiale $\left(v_0,\dots,v_{p-1}\right)=\left(u_0,\dots,u_{p-1}\right)$ et on a alors $\theta((v_n))=\left(u_0,\dots,u_{p-1}\right)$ donc θ est sujectif. Comme $\dim\mathbb{K}^p=p$, il vient alors que $\dim\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}=p$

L'espace $\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}$ admet donc une base constituée de p suites satisfaisant la relation (R_p). Pour trouver le terme général d'une suite de $\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}$ ainsi que ces p suites, on procède ainsi.

À chaque suite $(u_n)\in\mathrm{E}_{(\mathrm{R}_p)}$, on associe la suite à valeurs vectorielles $(\mathrm{U}_n)\in\mathscr{S}(\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p-1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

La relation de récurrence satisfaite par (u_n) induit une relation de récurrence sur (U_n)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\mathrm{U}_n$$

avec

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1}\end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 3.24 ★ **Matrice compagnon**
Soit $\mathrm{P}=\mathrm{X}^p-a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1}-\ldots-a_1\mathrm{X}-a_0\in\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. La matrice

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1}\end{pmatrix}$$

est appelée matrice compagnon du polynôme P. On a

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}}=\mathrm{P}}.$$

Démonstration *On a*

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\begin{vmatrix}\mathrm{X} & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{X} & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \mathrm{X} & -1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \mathrm{X}-a_{p-1}\end{vmatrix}.$$

On effectue dans ce déterminant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + X^2C_3 + \ldots + X^{n-1}C_n$. *Alors*

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & X & -1 \\ X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \ldots - a_1X - a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & X - a_{p-1} \end{vmatrix}$$

qu'on développe par rapport à la première colonne :

$$\chi_A(X) = (-1)^{n+1}P(X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ X & -1 & \ldots & 0 \\ (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ & & X & -1 \end{vmatrix} = P(X).$$

Le terme général de la suite (U_n) est alors déterminé par $U_n = A^nU_0$

Le problème est alors de calculer les puissances de A. Si le *polynôme caractéristique* P de la suite admet p racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, alors sa matrice compagnon A est diagonalisable : il existe une matrice diagonale D et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A = PDP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = PD^nP^{-1}U_0$ et il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\boxed{(u_n) = \alpha_1(\lambda_1^n) + \ldots + \alpha_p(\lambda_p^n)}.$$

3.5.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre 2

Le but de cette section est d'appliquer le paragraphe précédent aux suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

On commence, comme précédemment, par traduire ce problème dans le vocabulaire de l'algèbre linéaire. On va travailler sur l'espace vectoriel $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On introduit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{S}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{K}) \\ (u_n) & \longmapsto & (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) \end{cases}.$$

On vérifie facilement que θ est un endomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{K})$. Notre problème est de résoudre, pour une suite constante (d) donnée, l'équation

$$\varphi((u_n)) = (d)$$

d'inconnue (u_n). On reconnaît une équation linéaire. On sait que les suites solutions sont formées de la somme d'une suite solution particulière de l'équation et d'une solution de l'équation homogène. Rappelons que l'ensemble des solutions de l'équation homogène S_0 est exactement le noyau de φ et c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Suites vérifiant $u_{n+1} - au_n = b$

On commence par déterminer les solutions de l'équation homogène. Ce sont les suites géométriques de raison a et $S_0 = \mathrm{Vect}((a^n))$.

On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'une suite constante $(u_n) = (q)$. Le scalaire q doit vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $q - aq = b$ c'est-à-dire $q = \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$. Si $a = 1$ alors une solution particulière de l'équation est la suite arithmétique $(u_n) = (nb)$. On vérifie réciproquement que ces solutions conviennent. On en déduit que :

— Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha a^n + \frac{b}{1-a}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

— Si $a = 1$ alors (u_n) est arithmétique : $u_{n+1} = u_0 + nb$.

Suites vérifiant $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c$

On s'occupe dans un premier temps de l'équation homogène $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

Elle se transcrit matriciellement en

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

soit, par une récurrence facile : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Le problème se traduit alors en celui de calculer les puissances de A. Il faut donc tenter de diagonaliser A. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$.

On travaille alors sur $\mathbb{C}$.

1. Si le discriminant de ce polynôme est non nul, χ_A admet deux racines simples λ_1 et λ_2 et A est diagonalisable. Il existe donc une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ avec α, β dépendant de u_0 et u_1
2. Si le discriminant de ce polynôme est nul, χ_A admet une racine double λ. La dimension du sous-espace propre est 1. En effet, comme $\lambda = -a/2$, $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a/2 & 1 \\ -b & -a/2 \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda I_2) = -\frac{a^2-4b}{4} = 0$ car on reconnaît le discriminant de χ_A. Donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable. Il existe donc une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n P \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

   et on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$ avec α, β dépendant de u_0 et u_1

On peut alors écrire le théorème suivant :

THÉORÈME 3.25 ★ **Suites données par la récurrence** $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$
L'ensemble des suites $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. L'*équation caractéristique* associée est $r^2 + ar + b = 0$. On note Δ son discriminant :

1. Si $\Delta > 0$ alors elle admet deux racines réelles r_1 et r_2 et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors elle admet une racine double r_0 et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n}$$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = r^n \left(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)\right)}$$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Il reste à démontrer le cas $\Delta < 0$. L'étude précédente nous permet d'affirmer que l'espace des solutions sur $\mathbb{C}$ admet comme base $\left(r^n e^{in\theta}\right)$ et $\left(r^n e^{-in\theta}\right)$. Une autre base de l'espace des solutions sur $\mathbb{C}$ est alors $\left(r^n \cos(n\theta)\right)$ et $\left(r^n \sin(n\theta)\right)$. Mais ces deux solutions sont réelles donc elles forment aussi une base de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$.*

Cas général $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c$

Le problème est de trouver une solution particulière.

1. On la cherche sous la forme d'une suite constante (q). Cela marche si $1 + a + b \neq 0$.
2. si $1 + a + b = 0$, on la cherche sous la forme d'une suite arithmétique : $u_n = qn$. Cela marche si $2 + a \neq 0$.
3. Si $2 + a = 0$ et $1 + a + b = 0$, on cherche la suite sous la forme $u_n = qn^2$. On obtient $k(4 + a) = c$ soit $q = c/2$ et il y a toujours une solution.

3.6 Compléments

3.6.1 Le théorème spectral

On démontrera ce théorème dans le chapitre **??** mais il est opportun de le connaître dés maintenant.

DÉFINITION 3.11 ★ **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :
$$A^T A = I_n.$$
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 3.20 Une matrice orthogonale est inversible et

$$A^{-1} = A^{T}.$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$AA^{T} = I_n.$$

THÉORÈME 3.26 ★★★ **Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables**
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique réelle*. Alors :

1. A est diagonalisable ;
2. Il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que

$$\boxed{A = P^{-1}DP = P^{T}DP}.$$

3.6.2 Une caractérisation de la diagonalisabilité avec des polynômes annulateurs Hors programme

Le résultat suivant est donné pour votre culture général. Il est hors programme depuis 2014 mais utile quand on traite des problèmes antérieurs à cette date.

THÉORÈME 3.27 ★★★ **Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples Hors programme**
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3.6.3 Cas des endomorphismes nilpotents Hors programme

PROPOSITION 3.28 ★★★ **Le spectre d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est $\{0\}$**
Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Démonstration *Un endomorphisme nilpotent n'est pas injectif donc $0 \in \mathrm{Sp}(u)$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Mais si r est l'indice de nilpotence de u alors $0 = u^r(x) = \lambda^r x$ et comme $x \neq 0$, il vient $\lambda = 0$. Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.*

THÉORÈME 3.29 ★★★ **Caractérisation de la nilpotence d'un endomorphisme en terme de réduction**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est nilpotent ;
2. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = X^n$;
3. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

Démonstration

$1 \implies 2$ *On suppose que u est nilpotent. On effectue une récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$ alors u est l'endomorphisme nul donc la matrice de u dans n'importe quelle base de E est la matrice nulle et la propriété est démontrée. On suppose la propriété vraie pour tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n-1$ avec $n \geqslant 2$ et on la prouve pour un endomorphisme nilpotent u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Comme u est nilpotent, u n'est pas injectif et il existe un vecteur e_1 de E non nul tel que $u(e_1) = 0$. On complète la famille (e_1) en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Dans cette base, la matrice de u est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Si r est l'indice de nilpotence de u alors comme $0 = M^r = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & A^r \end{pmatrix}$ où $L' \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, on sait que la matrice A est nilpotente. L'endomorphisme canoniquement associé à A est donc un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n-1$ et d'après l'hypothèse de récurrence, son polynôme caractéristique est X^{n-1}. Mais alors $\chi_A(X) = X^{n-1}$ et par formule du déterminant par blocs, on obtient que $\chi_u(X) = X^n$. La propriété est ainsi prouvée par récurrence.*

2 $\implies$ 3 *Le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples donc u est trigonalisable et son spectre est $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. Il existe donc bien une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.*

3 $\implies$ 1 *Si la matrice de u dans une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure stricte alors $u(e_1) = 0$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ et donc $u^{k-1}(e_k) = 0$. On en déduit que $u^n(e_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et donc que $u^n = 0$.*

On peut reformuler le théorème précédent en terme matriciel de la façon suivante :

THÉORÈME 3.30 ★★★ **Caractérisation de la nilpotence d'une matrice en terme de réduction**
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

1. La matrice A est nilpotente ;
2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$;
3. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

THÉORÈME 3.31 ★ **Une dernière caractérisation de la nilpotence**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est nilpotent ;
2. L'endomorphisme u est trigonalisable avec comme seule valeur propre 0.

Démonstration

1 $\implies$ 2 *Si u est nilpotent alors, d'après le théorème précédent, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte et donc u est diagonalisable avec comme seule valeur propre 0.*

2 $\implies$ 1 *Réciproquement, si u est trigonalisable avec comme seule valeur propre 0 alors sa matrice dans une base de E est triangulaire supérieure stricte et u est nilpotent.*

3.6.4 Réduction des matrices de rang 1 Hors programme

PROPOSITION 3.32 ★★★ **Matrices de rang 1**
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On a équivalence entre :

1. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$;
2. Il existe deux matrices colonnes non nulles $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, dans ce cas $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$.

Démonstration

1 $\implies$ 2 *Puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$, une de ses colonnes $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est non-nulle et les autres lui sont proportionnelles. Alors il existe $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{A} = [y_1\mathrm{X}; \dots;\dots;\ y_n\mathrm{X}] = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$.*

2 $\implies$ 1 *On considère deux matrices colonnes non nulles $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et l'on forme la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{A} = [y_1\mathrm{X};\ \dots; y_n\mathrm{X}]$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant 1$. Comme il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_j \neq 0$, et que $\mathrm{X} \neq 0$, la $j$ième colonne de A n'est pas nulle donc $\mathrm{A} \neq 0$ et donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$.*

Remarque 3.21 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors pour tout $\mathrm{V} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a alors $\mathrm{AV} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{V} = \langle \mathrm{V} | \mathrm{Y} \rangle \mathrm{X}$ où $\langle . | . \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 3.33 ★★★
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Alors :

$$\boxed{\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr}(A))} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{0, \operatorname{Tr}(A)\}}.$$

En particulier A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$

Démonstration *Puisque* $\operatorname{Ker}(A)$ *est de dimension* $n-1$, 0 *est valeur propre de* A *de multiplicité au moins* $n-1$. *Donc* $\chi_A(X) = X^{n-1}(X-a)$ *avec* $a = \operatorname{Tr}(A)$. *La matrice* A *est diagonalisable si et seulement si* $m(0) = n-1$, *c'est-à-dire* $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

Remarque 3.22 On peut préciser les choses relativement à la remarque **??**. En effet, si pour tout $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $AV = XY^T V = \langle V|Y\rangle X$ et que $X \neq 0$ alors $E_A(0) = \operatorname{Ker} A = \{Y\}^\perp$.
De plus, par formule du rang $\operatorname{Im} A$ est de rang 1 et comme $X \in \operatorname{Im} A$, on sait que $\operatorname{Im}(A) = Vect(X)$. De $AX = \langle X|Y\rangle X$ on tire que $tr(A) = \langle X|Y\rangle$.

Remarque 3.23 En appliquant les résultats du paragraphe précédent, on en déduit qu'une matrice de rang A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

On peut calculer $\operatorname{Tr}(A)$ grâce à l'égalité suivante :

PROPOSITION 3.34 ★ **Une relation pour calculer la trace des matrices de rang** 1
Soit A une matrice de rang 1 alors

$$\boxed{A^2 = \operatorname{Tr}(A)A.}$$

Démonstration *On a alors avec les notations de la proposition 3.32 :* $A^2 = XY^TXY^T = \left(Y^TX\right)XY^T = \lambda A$ *avec* $\lambda = Y^TX$. *Mais en appliquant la trace à cette dernière égalité, il vient* $\lambda = \operatorname{Tr}\left(Y^TX\right) = \operatorname{Tr}\left(XY^T\right) = \operatorname{Tr}(A)$.

Remarque 3.24 On peut alors préciser la remarque 3.23 Si $\operatorname{Tr}(A) = 0$, A est 2-nilpotente.

PLAN 3.6 : Pour réduire une matrice de rang 1

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1. *On vérifie que* $\operatorname{rg}(A) = 1$
2. *Alors* $\operatorname{Ker} A$ *est de dimension* $n-1$ *et* $m_A(0) \geqslant n-1$.
3. *Il existe alors* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\chi_A(X) = X^{n-1}(X-\lambda)$.
4. *Comme ce polynôme est scindé sur* $\mathbb{K}$, *on a* $\lambda = \operatorname{Tr}(A)$.
5. *On peut calculer* $\operatorname{Tr}(A)$ *en calculant* A^2 *et la relation* $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$.
6. *La matrice* A *est diagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

3.6.5 Réduction des matrices de rang 2 Hors programme

PLAN 3.7 : Pour réduire une matrice de rang 2 dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

1. *On vérifie que* $\operatorname{rg}(A) = 2$
2. *Alors* $\operatorname{Ker} A$ *est de dimension* $n-2$ *et* $m_A(0) \geqslant n-2$.
3. *Il existe alors* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ *tels que* $\chi_A(X) = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\lambda')$ *et* $\operatorname{Sp}(A) = \{0, \lambda, \lambda'\}$.
4. *Comme ce polynôme est scindé sur* $\mathbb{K}$, *on a* $\lambda + \lambda' = \operatorname{Tr}(A)$.
5. *Si* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *alors* $\chi_A \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $\lambda' = \overline{\lambda}$.
6. *Le spectre de* A^2 *est* $\left\{0, \lambda^2, \lambda'^2\right\}$ *donc* $\lambda^2 + \lambda'^2 = \operatorname{Tr}(A^2)$ *(Penser au produit par blocs pour calculer* A^2*).*
7. *On résout alors*

$$\begin{cases} \lambda + \lambda' & = \operatorname{Tr}(A) \\ \lambda^2 + \lambda'^2 & = \operatorname{Tr}(A^2) \end{cases}.$$

8. *La matrice A est diagonalisable si et seulement si*

$$\big[[\lambda \neq \lambda' \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda' \neq 0] \quad \text{ou} \quad [\lambda = \lambda' \quad \text{et} \quad \dim E_A(\lambda) = 2 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0]\big].$$

Remarque 3.25 Le point 6 est conséquence du fait que comme on travaille dans $\mathbb{C}$, χ_A est scindé et donc que A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure. Alors A^2 est semblable à T^2 et on lit les valeurs propres de A^2 sur la diagonale de T^2.

3.6.6 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ Hors programme

Prenons un peu d'avance sur le chapitre **??**. Considérons une suite matricielle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ et une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Une telle suite sera *convergente* de limite A si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [A_n]_{i,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} [A]_{i,j}\,.$$

On a alors le résultat important suivant :

THÉORÈME 3.35 ★★★ **Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite de matrices inversibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (GL_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$.

Démonstration *On pose pour $n \geqslant 1$, $A_n = A + \frac{1}{n}I_n$. On a $\det(A_n) = \det(A - \frac{I_n}{n}) = (-1)^n \chi_A\left(\frac{1}{n}\right)$. Si il n'existe par de rang à partir duquel la suite $(\det(A_n))$ ne s'annule plus, alors χ_A s'annule une infinité de fois ce qui est absurde car c'est un polynôme de degré n. Ainsi, la suite (A_n) est formée à partir d'un certain rang de matrices inversibles.*
Il est par ailleurs clair que $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$.

On combine souvent cette proposition avec la suivante qui sera aussi démontrée dans le chapitre **??**.

PROPOSITION 3.36 ★★★ **Caractérisation séquentielle de la continuité du déterminant**
Soient $(A_n) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ qui tend vers la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \det(A)$.

3.7 L'essentiel

1. Vous devez savoir réduire une matrice d'ordre 2 ou 3 (voir même 4) rapidement. Pensez qu'on trouve souvent bon nombre d'éléments propres par simple lecture matricielle.
2. En dimension 2, il ne faut pas calculer le polynôme caractéristique par un déterminant mais utiliser la formule du cours.
3. Il faut savoir trouver les valeurs propres des matrices de rangs 1 et 2 les yeux fermés...
4. Toute matrice de A de rang 1 s'écrit $A = XY^T$ où X et Y sont des matrices colonnes non nulles... Voir l'exercice **??**. C'est bien commode pour trouver les éléments propres de A.
5. Un endomorphisme nilpotent n'est jamais diagonalisable...
6. Le polynôme caractéristique est souvent utilisé pour établir des propriétés tierces à la réduction. Il faut savoir reconnaître ces situations. Faites la liste des exercices vus en TD qui utilisent cette remarque !
7. Une des plus fameuses parmi celles-ci consiste à démontrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (GL_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Cette suite peut de plus être prise de la forme $A + \varepsilon_m I_n$ où $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle.
8. Si deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel commutent, tout sous-espace propre $E_u(\lambda)$ de u est stable pour v. En particulier, si $\dim E_u(\lambda) = 1$ alors tout vecteur générateur de $E_u(\lambda)$ est un vecteur propre de v. C'est essentiel !
9. Les critères de diagonalisation et de trigonalisation doivent être parfaitement appris ainsi que la condition suffisante de diagonalisation.
10. Toute matrice (ou tout endomorphisme) est trigonalisable dans $\mathbb{C}$...
11. Il faut avoir bien compris les applications de la réduction à la résolution d'une récurrence linéaire, d'un système différentiel et au calcul des puissances d'une matrice.
12. En dimension infinie, la recherche des éléments propres d'en endomorphisme passe le plus souvent par une analyse et synthèse. Le calcul du polynôme caractéristique est totalement hors sujet...