

Chapitre 16

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

16.0.1 Calcul de primitives

Exercice 16.0.1

Déterminer les primitives suivantes :

- $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$
- $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$
- $\int \sqrt{1-x} dx$
- $\int \cos x \sin x dx$
- $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
- $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

Exercice 16.0.2

Déterminer les primitives suivantes :

- $\int \tan x dx$
- $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
- $\int \frac{\ln x}{x} dx$
- $\int x e^{x^2} dx$
- $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$
- $\int \operatorname{th} x dx$

Exercice 16.0.3

Déterminer les primitives suivantes :

- $\int \frac{1}{x (\ln x)^4} dx$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$
- $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} dx$
- $\int \cos x \sin^3 x dx$
- $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
- $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx$

Exercice 16.0.4

Déterminer les primitives suivantes :

- $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
- $\int \frac{1}{1+e^x} dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
- $\int \tan^2 x dx$
- $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
- $\int (2x-1)^2 (x+1) dx$

16.0.2 Calcul d'intégrales

Exercice 16.0.5

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- $\int_1^{\operatorname{ch} 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$
- $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
- $\int_e^{e^2} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$
- $\int_{1+e}^{1+2e} \frac{x^2}{x-1} dx$

16.0.3 Linéarisation

Exercice 16.0.6

Déterminer les primitives suivantes :

2. En déduire : $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$.

Exercice 16.0.13 ♡♡

Calculer pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

Exercice 16.0.14 ♡♡

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

1. Justifier que pour tout entier $n > 0$, l'intégrale I_n existe.
2. Calculer pour $n \geq 2$, $I_n - I_{n-2}$, I_0 et I_1 .
3. En déduire la valeur de I_n pour tout entier n .

16.0.5 Fractions rationnelles

cette section sera complétée à l'occasion du chapitre sur les fractions rationnelles.

Exercice 16.0.15

Calculer :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)} dx$ | 4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} dx$ | 7. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$ |
| 2. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2-1} dx$ | 5. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2x+5)(x+2)} dx$ | 8. $\int_0^{-1} \frac{1}{(x^2-3x+2)^2} dx$ |
| 3. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+4x-5} dx$ | 6. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)} dx$ | 9. $\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+2)} dx$ |

Exercice 16.0.16

Calculer la primitive (préciser l'intervalle)

$$F = \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

16.0.6 Changement de variable

Exercice 16.0.17 ♡

Déterminer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable précisé :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ en posant $u = \ln x$ | 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ en posant $u = \cos x$. |
| 2. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx$ en posant $u = \sqrt{x+1}$. | 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$ en posant $u = \tan x$. |

- $\int \sin^2 x dx$
- $\int \cos^4 x dx$
- $\int \operatorname{sh}^5 x dx$
- $\int \cos^2 x \sin 2x dx$
- $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx$
- $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx$

16.0.4 Intégration par parties

Exercice 16.0.7

Déterminer les intégrales suivantes :

- $\int_1^e \ln x dx$
- $\int_0^1 \arctan x dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$
- $\int_0^1 (x+2) e^x dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$
- $\int_0^{\pi} (x-1) \cos x dx$

Exercice 16.0.8

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

- $\int \ln x dx$
- $\int \arcsin x dx$
- $\int x \arctan x dx$
- $\int (x+1) \operatorname{sh} x dx$
- $\int \operatorname{argsh}(3x) dx$
- $\int \ln(1+x^2) dx$

Exercice 16.0.9

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

- $\int x \operatorname{ch}^2 x dx$
- $\int x \ln(x+1) dx$
- $\int \operatorname{argth} x dx$
- $\int \operatorname{ch} x \cos x dx$
- $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
- $\int x \ln^2 x dx$

Exercice 16.0.10

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2(t) dt$.

Exercice 16.0.11

Soit une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx$$

Exercice 16.0.12

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une relation entre $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$.

- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \cos u$.
- $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ en posant $u = \sqrt{x}$.

Exercice 16.0.18

Déterminer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

- $\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx$
- $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$
- $\int \sqrt{x^2+1} dx$
- $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$
- $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Exercice 16.0.19

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

- $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$
- $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx$
- $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$

Exercice 16.0.20

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer à l'aide de changements de variables, les intégrales

$$I_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad I_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad I_3 = \int_a^b (x-a)^n dx$$

Exercice 16.0.21

En utilisant un bon changement de variables, calculer pour $0 < a < b$, l'intégrale

$$I = \int_a^b (x-a)^3 (b-x)^4 dx$$

Exercice 16.0.22

Soit un réel $a > 0$. Calculer en utilisant un bon changement de variables, l'intégrale

$$I = \int_{1/a}^a \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

Indication 16.0 : Comment laisser les bornes invariantes ?

Exercice 16.0.23

Calculer en utilisant un bon changement de variables l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Indication 16.0 : Comment laisser les fonctions $\sin x$, $\cos^2 x$ et les bornes invariantes ?

16.0.7 Calcul de primitives et d'intégrales - Techniques mélangées

Exercice 16.0.24 ♡♡

Calculer $I = \int_0^1 \frac{t^5}{(t^4+1)^2} dt$.

Exercice 16.0.25 ♡♡

Calculer $\int_0^1 \frac{t}{(t^4+t^2+1)^2} dt$.

Exercice 16.0.26 ♡♡

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

Exercice 16.0.27 ♡♡

Calculer $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2} dx$.

Exercice 16.0.28 ♡♡

Calculer $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.

Exercice 16.0.29 ♡♡

Calculer $\int \frac{x^4}{x^2+1} \arctan x dx$.

Exercice 16.0.30 ♡♡

Calculer $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ sur \mathbb{R} (justifier l'intervalle).

Exercice 16.0.31 ♡♡

Calcul de $\int \frac{\operatorname{sh} x}{3 + \operatorname{sh}^2 x} dx$.

Exercice 16.0.32 ♡♡

Calculer $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}} dx$ sur $I =]0, 1[$.

Exercice 16.0.33 ♡♡

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$ sur $I =]1, +\infty[$.

Exercice 16.0.34 ♡♡

Calculer $\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+2}} dx$.

Exercice 16.0.35 ♡♡

Calculer

$$\int_0^1 \arctan(\sqrt[3]{x}) dx$$

Exercice 16.0.36 ♡♡

Calculer

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^3} dx$$

Exercice 16.0.37 ♡♡

Calculer

$$I = \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx$$

Exercice 16.0.38 ♡♡

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Exercice 16.0.39 ♡♡

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$$

Exercice 16.0.40 ♡♡

Calculer

$$\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Exercice 16.0.41 ♡♡

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{6+x-x^2}}$$

Exercice 16.0.42 ♡♡

Calculer

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

Exercice 16.0.43 ♡♡

Calculer

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$$

Exercice 16.0.44 ♡♡

Calculer

$$I = \int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)} dx$$

Exercice 16.0.45 ♡♡

Calculer

$$\int \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x} dx$$

Exercice 16.0.46 ♡♡

Calculer

$$I = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2+2x} dx$$

Exercice 16.0.47 ♡♡

Calculer une primitive de

$$F = \int (x+1)^2 \sqrt{-x^2-2x+1} dx$$

(préciser l'intervalle)

Exercice 16.0.48 ♡♡

Calculer l'intégrale

exo_majorsations_d_integrales

$$I = \int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{t}$$

16.0.8 Propriétés de l'intégrale**Exercice 16.0.49** ♡

On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$
- 2 $f \leq 0$ ou $f \geq 0$.

Exercice 16.0.50 ♡

Considérons une application continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f admet une et une seule primitive F vérifiant $\int_0^1 F(t) dt = 0$.

Exercice 16.0.51 ♡ **Un théorème de point fixe**

On considère une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ et telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Indication 16.0 : Introduire la fonction $\varphi : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t) - t \end{cases}$.

Exercice 16.0.52 ♡

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

Indication 16.0 : Poser $\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ et introduire la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - \alpha$.

Exercice 16.0.53 ♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Trouver les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Exercice 16.0.54 ♡♡

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

Exercice 16.0.55 ♡♡♡

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que $\forall k \in [0, n], \int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

16.0.9 Majorations d'intégrales**Exercice 16.0.56** ♡

Soit $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 16.0.57 ♡

Soit deux fonctions continues et positives $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in [0, 1], f(x)g(x) \geq 1$.

1. Montrer que

$$\left[\int_0^1 f(t) dt \right] \left[\int_0^1 g(t) dt \right] \geq 1$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 16.0.58 ♡

Soit une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on note

$$I_k = \int_0^1 x^k |f(x)| dx$$

Montrer que pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{p+q}^2 \leq I_{2p} I_{2q}$.

Exercice 16.0.59 ♡

Soit l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$. Déterminer

$$\alpha = \inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$$

Exercice 16.0.60 ♡♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b f^3(x) dx = \int_a^b f^4(x) dx$$

Exercice 16.0.61 ♡♡

Soient deux fonctions strictement positives $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$. Montrer que

$$\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{g(t)}{f(t)} \right) dt \geq 2$$

Exercice 16.0.62 ♡♡

Soit une fonction convexe φ continue sur \mathbb{R} .

1. Si f est une fonction en escalier sur $[0, 1]$, montrer que

$$\varphi \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x) dx$$

2. Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x) dx\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x) dx$$

Exercice 16.0.63 ♥♥♥

Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ sa valeur moyenne. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de a et b telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$,

$$\int_a^b |f(x) - \bar{f}|^2 dx \leq C \int_a^b (f'(x))^2 dx$$

16.0.10 Limite de fonctions définies par une intégrale

Exercice 16.0.64 ♥

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Trouver la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx$$

Exercice 16.0.65 ♥

A l'aide de majorations simples, trouver les limites des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+e^{nx}} dx;$ | 4. $I_n = \int_0^1 e^{-nx}(1+x^n) dx;$ |
| 2. $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx;$ | 5. $I_n = \frac{1}{n} \int_n^{2n} \arctan x dx;$ |
| 3. $I_n = \int_0^1 x^n \sin(nx) dx;$ | 6. $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx.$ |

Exercice 16.0.66 ♥♥

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-2x}^{2x} \cos(t^4) dt$ | 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ | |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ | |

Indication 16.0 : Pour la dernière, penser à une intégration par parties.

Exercice 16.0.67 ♥♥

Soit la suite de fonctions (g_n) définies sur $[0, 1]$ par $g_n(x) = 0$ si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$ et $g_n(x) = n$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 f(t) g_n(t) dt$$

Exercice 16.0.68 ♥♥

On définit une fonction I en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $I(x) = \frac{1}{x} \int_0^\pi \sin(x^2 \sin t) dt$. Trouver la limite de $I(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Exercice 16.0.69 ♥♥♥

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Trouver la limite des suites de terme général :

- $H_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$
- $I_n = n \int_0^1 x^n f(x) dx$

Exercice 16.0.70 ♥♥♥

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et un réel $a \in [0, 1]$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 f(ax^n) dx$$

Exercice 16.0.71 ♥♥♥

Soit une fonction f continue sur \mathbb{R} . Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow 0$ de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$I(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2 + t^2} f(t) dt.$$

Indication 16.0 : Faire un changement de variables qui fera apparaître la variable x à l'intérieur de f .

16.0.11 Théorème fondamental, étude de fonctions définies par une intégrale

Exercice 16.0.72 ♥

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle à déterminer et calculer leur dérivée en fonction de f :

- | | |
|--|--|
| 1. $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$ | 3. $g(x) = \int_0^x f(t+x) dt$ |
| 2. $g(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sh} t f(\operatorname{ch} t) dt$ | 4. $g(x) = \int_1^x \frac{f(\ln t)}{t} dt$ |

Exercice 16.0.73 ♥

Soit une fonction f continue et positive sur le segment $[a, b]$. En utilisant la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, montrer que si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.

Exercice 16.0.74 ♡♡

Soit une fonction f continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que $f(1) = \int_0^1 f(t) dt$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 16.0.75 ♡

Montrer que la fonction définie par

$$\varphi(x) = \int_{\frac{x-1}{x}}^{\frac{x}{x+1}} \frac{dt}{t^2+1} + \int_1^{2x^2} \frac{dt}{t^2+1}$$

est constante.

Exercice 16.0.76 ♡

Déterminer le domaine de définition et la parité de l'application

$$g : x \mapsto \int_x^{3x} e^{t^2} dt$$

Exercice 16.0.77 ♡♡

On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\text{sh } t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est impaire.
- Déterminer la dérivée de F et en déduire ses variations.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Tracer la tangente à l'origine, puis la courbe représentative de f .

Exercice 16.0.78 ♡♡

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt$$

- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(x-t) g(t) dt$$

- En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
- Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 16.0.79 ♡♡

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2} dt$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .

- Montrer que f est impaire.
- Déterminer la dérivée de f et en déduire ses variations.
- Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

Exercice 16.0.80 ♡♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Montrer que f est bien définie.
- En effectuant un changement de variable, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = f\left(\frac{1}{2x}\right)$.
- En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 16.0.81 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt.$$

- Montrer que g peut-être prolongée par continuité en 0. On appellera encore g la fonction ainsi définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Exercice 16.0.82 ♡♡♡

On se propose d'étudier la fonction définie par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{ch } t}{t^2} dt$.

- Montrer que le domaine de définition de g est \mathbb{R}^* .
- Etudier la parité de la fonction g .
- Calculer la dérivée de la fonction g et dresser son tableau de variations.
- Calculer la limite de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

Exercice 16.0.83 ♡♡♡

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t) dt$$

où C est une constante strictement positive.

- Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right).$$

C'est le lemme de Gronwall, très utile pour étudier des équations différentielles.

- Que peut-on dire si $f(x) \leq \int_0^x f(t)g(t) dt$?

Indication 16.0 : Introduire la fonction $\varphi(x) = C + \int_0^x f(t)g(t) dt$ et calculer sa dérivée.

Exercice 16.0.84 ♡♡

Étudier la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt.$$

Exercice 16.0.85 ♡♡

Soient deux fonctions continues f et g sur $[0, 1]$. On suppose que $\forall x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que f et g sont \mathcal{C}^∞ ;
2. Montrer que $f = g = 0$.

Exercice 16.0.86 ♡♡

Soit la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1. Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .
2. Étudier la parité de g .
3. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$.
4. Prolonger g par continuité en 0.
5. Montrer que g ainsi prolongée est dérivable en 0 ?
6. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

16.0.12 Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 16.0.87 ♡

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
2. Étudier la monotonie de (I_n) .
3. En déduire que (I_n) est convergente.
4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire la limite de (I_n) .
6. En déduire un équivalent de la suite

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$$

Exercice 16.0.88 ♡

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire celles de (I_n) .
3. En déduire que (I_n) est convergente.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

5. En déduire la limite de (I_n) .

Exercice 16.0.89 ♡♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$

puis la limite de (I_n) .

4. En déduire un équivalent de I_n .

Exercice 16.0.90 ♡♡

On considère la suite de terme général $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la monotonie de (I_n) .
2. En déduire que (I_n) est convergente.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
4. En déduire la limite de (I_n) ainsi qu'un équivalent simple de I_n .

Exercice 16.0.91 ♡♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

2. En déduire que

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 16.0.92 ♡

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$$

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$;
- Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n ;
- En déduire la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Exercice 16.0.93 ♡♡ **Intégrale de Wallis**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

- En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
- Montrer que (I_n) est décroissante et positive. En déduire que (I_n) est convergente.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}.$$

- Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}$.
- Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
- En déduire que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 16.0.94 ♡♡♡

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[0, 1]$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$. Étudier la suite de terme général

$$I_n = n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx$$

Exercice 16.0.95 ♡♡♡

Soit deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$I_n = \left[\int_a^b f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}}$$

Indication 16.0 : On étudiera d'abord le cas où f est une fonction constante.

Exercice 16.0.96 ♡

Trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (\arcsin x)^n dx$$

Exercice 16.0.97 ♡♡

- Soit un entier $k \geq 1$. Encadrer l'intégrale $I_k = \int_k^{k+1} \ln t dt$.
- En déduire un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln n!$.

Exercice 16.0.98 ♡♡ **Suite de Mercator**

On considère la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

- Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.
On considère ensuite la suite, dite de Mercator, de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

- Exprimer pour $n \geq 1$, S_n en utilisant I_n .
- En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 16.0.99 ♡♡♡

Étudier la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

Indication 16.0 : On commencera par déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis $u_{n+2} - u_n$ et l'on s'intéressera ensuite aux deux suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} .

Exercice 16.0.100 ♡♡♡

On note pour un entier n non-nul :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^n \left(\int_0^n \frac{dy}{x+y+1} \right) dx$$

1. Calculer l'intégrale I_n pour $n > 0$.
2. Déterminer un équivalent de la suite (I_n) .
Indication 16.0 : On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 1 de \ln en 0.
3. Encadrer S_n à l'aide de I_n pour $n > 0$.
4. En déduire un équivalent de (S_n) .

Exercice 16.0.101 ♡♡♡

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$$

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n) ¹.

16.0.13 Algèbre linéaire et intégration

Exercice 16.0.102 ♡♡

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si $f \in E$, on note $T(f) = g$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker } T$ et $\text{Im } T$.

Exercice 16.0.103 ♡♡

Soient le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et les applications :

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_0^x f(t) dt \end{cases}$$

1. Prouver que φ et ψ sont des endomorphismes de E .
2. Calculer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer les noyaux et images de φ et ψ .

16.0.14 Formules de Taylor

Exercice 16.0.104 ♡

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

1. Une autre solution de cet exercice utilisant les sommes de Riemann est proposée dans l'exercice 16.0.118 page 11

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 16.0.105 ♡

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Exercice 16.0.106 ♡

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) - 2}{x^2}$.

Exercice 16.0.107 ♡

Trouver

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$$

Exercice 16.0.108 ♡

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$. On pose pour $x \in]0, 1[$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))}{\sin(\pi x)}$$

Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0 et 1.

Exercice 16.0.109 ♡♡

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et $X \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \left| (1+x^2)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \ln(1+x^2) \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

3. Trouver alors deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 (1+x^2)^{1/n} dx = a + \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

16.0.15 Sommes de Riemann

exo_avec_somme_de_riemann

Exercice 16.0.110

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice 16.0.111

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$$

Exercice 16.0.112

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Exercice 16.0.113

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Exercice 16.0.114

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$$

Exercice 16.0.115

Trouver la limite des suites de termes général

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$$

Exercice 16.0.116

Soient deux réels $\alpha > 0, \beta > 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$$

Exercice 16.0.117

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \sqrt{\frac{k}{k+n}}$$

Exercice 16.0.118

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$$

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 16.0.119

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{1/n}$$

Exercice 16.0.120

Trouver un équivalent de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n(k^2 + n^2)}}{n}$$

Exercice 16.0.121

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{1/n}$$