Chapitre 12

Équations différentielles, systèmes d'équations différentielles

12.0.1 Révisions de première année

exo:2005:Feb:Sat:13:03:05

Équations différentielles linéaires du premier ordre

0:00 **Exercice 12.0.1** ♡

Résoudre

$$(\mathrm{E})\ : (x^2+1)y' + xy = 1$$

2:31 **Exercice 12.0.2** ♡

Résoudre pour un entier $n \geqslant 1$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n)\ : y' + \frac{nx}{x+1}y = (x+1)^n e^x$$

sur les intervalles $\mathrm{I}_1 =]-\infty, -1[$ *et* $\mathrm{I}_2 =]-1, +\infty[$.

Exercice 12.0.3 ♡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *continues vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

4:48 **Exercice 12.0.4** ♡

Soit $k > 0$ et $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ : y' + ky = f(t)$$

vérifie $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice 12.0.5 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0$$

possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.0.6 ♡

Déterminer sur l'intervalle I la solution générale des équations différentielles :

1. $y' + y = t^2$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
2. $2ty' + y = \frac{1}{t}$, $\mathrm{I} =]0, +\infty[$;
3. $ty' - y = t\ln t$, $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

Exercice 12.0.7 ♡

1. *Déterminer deux réels α et β tels que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\},\quad \frac{t-2}{1-t^2} = \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{1+t}.$$

2. *Résoudre le problème de Cauchy* $\begin{cases} t(t^2+1)y' + 2y = t^2 \\ y(1/e) = 0 \end{cases}$.

Exercice 12.0.8 ♡

Soient $\alpha \in \mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π périodique. Soit g une solution de l'équation différentielle

$$y' + \alpha y = f.$$

1. *Montrer que :* $\forall t \in \mathbb{R},\quad g(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(g(0) + \int_0^t f(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\,\mathrm{d}u\right)$.
2. *Montrer que g est 2π-périodique si et seulement si $g(0) = g(2\pi)$.*

3. *En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle qui soit 2π-périodique.*

Exercice 12.0.9 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \cos x + \sin x$
2. $y' - 3y = 2$
3. $y' - 2x\ y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$
4. $y' + 2y = e^{2x}$
5. $y' + y = \sin 2x$
6. $y' - 5y = e^{5x}$

Exercice 12.0.10 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin x$
3. $y' - y = (x+1)\, e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$
5. $y' + y = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{2x}$
6. $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.

Exercice 12.0.11 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)\, y' + 2xy = e^x + x$.
2. $\left(1+x^2\right) y' + xy = \sqrt{1+x^2}$
3. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$.
4. $\left(1+x^2\right) y' = xy + \left(1+x^2\right)$.
5. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.
6. $\left(x^2+1\right)^2 y' + 2x\left(x^2+1\right) y = 1$.
7. $\sqrt{1+x^2}\, y' - y = 1$.

Exercice 12.0.12 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(2+\cos x)\, y' + \sin x\ y = (2+\cos x) \sin x$.
2. $y' - y = e^x \sin 2x$.
3. $(1+e^x)\, y' + e^x\ y = 1 + e^x$.
4. $\operatorname{ch} x\ y' - \operatorname{sh} x\ y = \operatorname{sh}^3 x$.
5. $\left(1+\cos^2 x\right) y' - \sin 2x\ y = \cos x$
6. $\left(x^2+1\right) y' + xy = 1$
7. $y' - \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x} y = \operatorname{sh} x$.

Exercice 12.0.13 ♡

Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y \operatorname{cotan} x = \sin x$ *sur* $]0,\pi[$.
2. $xy' + y = \sin^3 x$ *sur* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $x\left(1+\ln^2 x\right) y' - 2\ln x\ y = \left(1+\ln^2 x\right)^2$.
4. $\sin x\ y' - \cos x\ y + 1 = 0$ *sur* $]0,\pi[$.
5. $y' + (\tan x)\, y = \cos^3 x$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
6. $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 1$ *sur* $]-1,1[$.

Exercice 12.0.14 ♡

Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $y' + (\tan x)\ y - \sin 2x = 0$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\operatorname{sh} x\ y' - \operatorname{ch} x y = 1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *puis sur* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $x^3 y' + 4\left(1-x^2\right) y = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. $\sqrt{x^2-1}\ y' + y = 1$ *sur* $[1,+\infty[$.
5. $\sin^3 x\ y' = 2\cos x\ y$ *sur* $]0,\pi[$.

Exercice 12.0.15 ♡

Soit $k > 0$. Montrer qu'il existe une unique condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$ telle que la solution du problème de Cauchy

$$y' - ky = \sin t \qquad y(0) = y_0$$

soit bornée sur $[0,+\infty[$.

Exercice 12.0.16 ♡♡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 12.0.17 ♡

Résoudre pour un entier $n \geqslant 1$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n)\ : y' + \frac{nx}{x+1} y = (x+1)^n e^x$$

sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1,+\infty[$.

Exercice 12.0.18 ♡♡

On considère une fonction $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer que pour toute solution non-nulle φ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ : y' - a(x) y = 0$$

il existe un unique réel α tel que la fonction définie par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ soit T- périodique.

Exercice 12.0.19 ♡♡

Trouver toutes les fonctions $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0,+\infty[$, vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t) dt$$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 12.0.20 ♡

Résoudre les équations différentielles (E) *données par :*

1. $y'' - 3y' + 2y = e^t$
2. $y'' - 4y' + 4y = (t^2+1)e^{2t}$
3. $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$
4. $y'' + y = \sin 2t$
5. $y'' + y' - 2y = \sin t e^t$
6. $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)e^{2t} + t - 2$

Exercice 12.0.21 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $y'' - 2y' + y = te^t$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos 2t - 2\sin 2t$
3. $y'' + 9y = \cos 2t e^t$.
4. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
5. $y'' + y' + y = e^t \cos t$.
6. $y'' - 3y' + 2y = (t^2+1)e^t$

Exercice 12.0.22 ♡♡

Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{E}_m) \quad y'' - 2y' + my = \cos x$$

Exercice 12.0.23 ♡♡

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (solutions réelles) :

$$my'' - (1+m^2)y' + my = xe^x$$

Exercice 12.0.24 ♡

exo:2005:Feb:Wed:15:56:35

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t$.

Exercice 12.0.25 ♡

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t}$.

Exercice 12.0.26 ♡

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + y = \mathrm{e}^{-t}\cos t$.

Exercice 12.0.27 ♡ **Oral CCP 2015**

exo:2005:Feb:Wed:15:55:33

1. *Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.*
2. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.*

Exercice 12.0.28 ♡

exo:2005:Feb:Wed:15:55:55

Résoudre :

1. $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x}\cos(3x)$;
2. $y'' - 2y' + y = x^2 \operatorname{ch}(x)$;
3. $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \cos^2 x$.

12.0.2 Problèmes de raccord

Exercice 12.0.29 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad x^2 y' + y = 1$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 12.0.30 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad (x^2-1)y' - xy + 3(x - x^3) = 0$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 12.0.31 ♡

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

1. *Résoudre (E) sur des intervalles qu'on précisera.*
2. *Déterminer les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 12.0.32 ♡♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad x^2 y' + y = 1$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 12.0.33 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : x(x^2+1)y' + y + x = 0$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 12.0.34 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 12.0.35 ♡

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : x^3 y' - y = 1$$

Structure de l'ensemble des solutions ?

Exercice 12.0.36 ♡

Montrer que l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad ty' + 2y = \frac{t}{t^2+1}$$

admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$. La déterminer.

Exercice 12.0.37 ♡

Résoudre sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad (1-t)\,y'(t) - y(t) = t.$$

Exercice 12.0.38 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ exo:2005:Feb:Sat:16:02:00

$$xy' - 2y = 0.$$

Exercice 12.0.39 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}_+$

$$(\mathrm{E}): \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

12.0.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 vectorielles

4:35 **Exercice 12.0.40** ♡

On considère le système autonome :

$$\begin{cases} x' &= 2x - y - z \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z \end{cases}$$

1. *Montrer que les courbes solutions sont toutes planes.*
2. *Résoudre le système.*

9:43 **Exercice 12.0.41** ♡

On considère le système $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

1. *Si* $\det(\mathrm{A}) = 0$, *montrer que les courbes solutions sont planes.*
2. *Que peut-on dire des solutions de* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ *lorsque* A *est une matrice nilpotente ?*
3. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

et montrer que les courbes solutions sont sur des cercles centrés à l'origine.

4. *Si* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice antisymétrique réelle, montrer que les courbes solutions sont sur des sphères centrées à l'origine.*

2:09 **Exercice 12.0.42** ♡

Résoudre

$$(\mathrm{S}): \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y - e^{-t} \end{cases}$$

0:59 **Exercice 12.0.43** ♡

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \mathrm{X}' &= \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(0) &= \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

et en déduire la matrice e^{A}.

Exercice 12.0.44 ♡

Comment résoudre un système linéaire d'ordre 2 *:*

$$\begin{cases} x'' &= ax' + by' + cx + dy \\ y'' &= ex' + fy' + gx + hy \end{cases}$$

Exercice 12.0.45 ♡

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) &= 2 \\ y(0) &= -2 \end{cases}.$$

Exercice 12.0.46 ♡

Résoudre le système différentielle :

$$\begin{cases} x' &= -3x + 5y - 5z \\ y' &= -4x + 6y - 5z \\ z' &= -4x + 4y - 3z \end{cases}.$$

Exercice 12.0.47 ♡

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* A *et les matrices* $\mathrm{B}_b = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^*$ *sont semblables.*
2. *Résoudre le système différentiel de la variable* t *:* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ *où* $\mathrm{X} : t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)^{\mathrm{T}}$.
3. *Montrer que les courbes intégrales de ce système sont planes.*

Exercice 12.0.48 ♡

On considère le système différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \begin{cases} x'(t) &= -x(t) - y(t) + t^2 + 2t + 3 \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) - t^2 - 2t - 1 \end{cases}.$$

1. *Déterminer la solution générale du système différentiel homogène* (H) *associé à* (E).
2. *Trouver une solution particulière de* (E) *(On cherchera* x *et* y *sous forme de fonctions polynomiales de degrés respectifs 1 et 2).*
3. *Déterminer la solution générale du système.*

Exercice 12.0.49 ♡

On considère le système différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \begin{cases} x'(t) & = -tx(t)+y(t)+1 \\ y'(t) & = (1-t^2)x(t)+ty(t)+t \end{cases}.$$

1. *Écrire ce système sous forme matricielle et vérifier que* $X_1 : t \mapsto (1,t)^{\mathrm{T}}$ *et* $X_2 : t \mapsto \left(t, t^2+1\right)^{\mathrm{T}}$ *sont solutions du système homogène associé. En déduire l'ensemble solution de* (H).
2. *Trouver une solution particulière de* (E) *sous la forme* $X = aX_1 + bX_2$ *où* a *et* b *sont deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Déterminer la solution générale du système.*

Exercice 12.0.50 ♡

On considère le système différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \begin{cases} x'(t) & = 2tx(t)-y(t)+t\cos t \\ y'(t) & = x(t)+2ty(t)+t\sin t \end{cases}.$$

1. *Déterminer le plan vectoriel* $\mathrm{Vect}(X_1,X_2)$ *des solutions du système homogène associé* (H) *en procédant au changement de fonctions inconnues donné par* $\begin{cases} u(t) & = x(t)\mathrm{e}^{-t^2} \\ v(t) & = y(t)\mathrm{e}^{-t^2} \end{cases}$.
2. *Trouver une solution particulière de* (E) *sous la forme* $X = aX_1 + bX_2$ *où* a *et* b *sont deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Déterminer la solution générale du système.*

Exercice 12.0.51 ♡

Résoudre le système différentiel $(\mathrm{E}) : \quad X'(t) = AX(t)+B(t)$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1+4t-6t^2 \\ -2t-12t^2 \\ 1+6t^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.0.52 ♡ **TPE 2011**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' & = 3x-y \\ y' & = x+y \end{cases}.$$

Exercice 12.0.53 ♡

Résoudre le système différentiel d'inconnues les fonctions x, y, z, t *d'une variable réelle :*

$$\begin{cases} x' & = y \\ y' & = 3x+2z \\ z' & = 2y+3t \\ t' & = z \end{cases}$$

Exercice 12.0.54 ♡

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.0.55 ♡

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *(Prendre* $P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *comme matrice de passage en vérifiant la validité de ce choix).*

Exercice 12.0.56 ♡ **CCP 2000**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Diagonaliser* A *(Prendre* $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *comme matrice de passage en vérifiant la validité de ce choix).*
2. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX + B(t)$ *avec* $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

12.0.4 Cauchy-Lipschitz linéaire

Exercice 12.0.57 ♡

Soit $x : I \mapsto \mathbb{K}$ *une solution non-nulle de*

$$(\mathrm{E}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

Montrer que les zéros de x *sont isolés.*

Exercice 12.0.58 ♡♡♡

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On considère l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}) : \quad y'' + f(x)y = 0.$$

Soit y *une solution de* (E). *On suppose qu'il existe un réel* $a \in I$ *tel que* $y(a) = 0$.

1. *Que peut-on dire de* $y'(a)$ *?*
2. *Montrer qu'il existe un réel* $\delta > 0$ *tel que* $y(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I \setminus \{a\}$ *tel que* $|x| < \delta$.
3. *On suppose que* α *et* β *sont deux zéros consécutifs de* y *et que* $y'(a) > 0$. *Quel est le signe de* y *sur l'intervalle* $]\alpha,\beta[$ *? Quel est le signe de* $y'(\beta)$ *?*

12.0.5 Équations différentielles linéaires du second ordre, cas général

[redacted]*Exercice 12.0.59*[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ : t^2 y'' + 4ty' + 2y = 1.$$

1. *Montrer que* $t \mapsto 1/2$ *est une solution particulière de* (E).
2. *Déterminer la solution générale de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en procédant au changement de variable* $t = \mathrm{e}^x$.

[redacted]*Exercice 12.0.60*[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ : 4ty'' + 2y' - y = 0.$$

1. *Déterminer la solution générale de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en procédant au changement de variable* $t = x^2$.
2. *Déterminer la solution générale de* (H) *sur* R_-^*.

[redacted]*Exercice 12.0.61*[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP 2015*** [redacted]

1. *On considère la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) *Justifier sans calcul que* A *est diagonalisable.*
   (b) *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *On considère le système différentiel* $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z *désignant trois fonctions de la variable* t, *dérivables sur* $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

[redacted]*Exercice 12.0.62*[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP 2015*** [redacted]

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *On note* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé à* A.
   Trouver une base (v_1, v_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b *et* c.
3. *En déduire la résolution du système différentiel* $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

12.0.6 Résolution par changement de fonction inconnue

[redacted]*Exercice 12.0.63*[redacted] ♡ [redacted]

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$\left(t^2+1\right) y'' + \left(t^2 - 2t + 1\right) y' - 2ty = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.

[redacted]*Exercice 12.0.64*[redacted] ♡ [redacted]

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}):\quad y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(t) = e^{t^2} y(t)$.

[redacted]*Exercice 12.0.65*[redacted] ♡ [redacted]

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E})\qquad -\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) y'' + 4x\left(x^2+1\right) y' + \left(x^4 - 4x^2 + 3\right) y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = \frac{y(x)}{1+x^2}$.

[redacted]*Exercice 12.0.66*[redacted] ♡ [redacted]

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E})\ : y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

1. *Soit* y *une solution du problème. On pose pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:* $z(t) = y\left(e^t\right) e^{-\frac{t}{2}}$.
   (a) *Exprimer* $y(x)$ *en fonction de* $z(\ln(x))$ *pour tout* $x > 0$.
   (b) *En déduire que la fonction* $t \mapsto z(t)$ *vérifie sur* $\mathbb{R}$ *une équation* $\left(\mathrm{E}'\right)$ *d'ordre 2 à coefficients constants.*
   (c) *Résoudre* $\left(\mathrm{E}'\right)$.
2. *Résoudre* (E).

[redacted]*Exercice 12.0.67*[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}):\quad xy'' - (3+x)y' + 3y = 0.$$

1. *Vérifier que* $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ *est solution de* (E) *pour une valeur convenable de* a.
2. (a) *Posons* $y(x) = \mathrm{e}^{ax} z(x)$. *Quelle est l'équation différentielle vérifiée par* z *?*
   (b) *Posons* $u(x) = z'(x)$. *Montrer que* u *est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre* 1.
   (c) *En déduire un système fondamental de solutions de* (E). *Quelles sont les solutions sur* $\mathbb{R}$ *tout entier ?*

Exercice 12.0.68 ♡ ***CCP 2007***

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad 4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1.$$

1. *Trouver une solution polynomiale de degré* 2.
2. *Trouver une solution sur* $]0,+\infty[$ *(On pourra poser* $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$*).*
3. *Trouver une solution sur* $]-\infty,0[$.
4. *Quelles sont les solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

12.0.7 Résolution d'équations différentielles par changement de variable

Exercice 12.0.69 ♡

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *puis sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

(on posera $t = \sqrt{x}$*)*

Exercice 12.0.70 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}) : \quad x^2y'' + 3xy' + y = x^2$$

en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Exercice 12.0.71 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}) : \quad \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + 4y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$.

Exercice 12.0.72 ♡

Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad (1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$$

d'inconnue $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *supposée deux fois dérivables. On pourra utiliser le changement de variable défini par* $t = \arcsin x$.

12.0.8 Changement de variables pour les équations différentielles d'ordre 2

Exercice 12.0.73 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}) : y'' + (4e^t - 1)y' + 4e^{2t}y = 0$$

On peut également considérer un changement de fonction inconnue.

Exercice 12.0.74 ♡

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}) : t^2y'' + 4ty' - (t^2-2)y = 0$$

avec le changement de fonctions $z(t) = t^2y(t)$.

Exercice 12.0.75 ♡

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre

$$(\mathrm{E}) : x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

où $q : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ *est continue et* $p : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$.

1. *Montrer qu'il est possible de trouver une fonction* $z : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ *deux fois dérivable telle que le changement de fonction* $x = zy$ *se ramène à une équation différentielle de la forme :*
$$(\mathrm{E}') : y'' + \mathrm{Q}(t)y = 0$$

Exercice 12.0.76 ♡

Lemme de Sturm *On considère une équation différentielle d'ordre* 2 *homogène*

$$(\mathrm{H}) : x'' + q(t)x = 0$$

et (x_1,x_2) *une base de* $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$.

1. *Soit* x *une solution non nulle de* (E). *On suppose que* x *s'annule en un point* $a \in \mathrm{I}$. *Montrer que* $x'(a) \neq 0$ *et que* x *change de signe en* a.
2. *Montrer que les zéros de* x *sont isolés (on suppose que* I *est fermé).*
3. *Soit* (x_1,x_2) *un système fondamental de solutions de* (E). *On suppose que* a *et* b *sont deux zéros consécutifs de* x_1 *dans* I *:*
$$x_1(a) = x_1(b) = 0 \text{ et } \forall t \in]a,b[,\ x_1(t) > 0$$
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $x_2(c) = 0$. *En d'autres termes, les zéros de* x_1 *et* x_2 *sont entrelacés. On raisonnera par l'absurde en considérant la fonction* $z = \dfrac{x_1}{x_2}$.

12.0.9 Solutions développables en série entière

Exercice 12.0.77 ♡

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad (1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

[redacted]**Exercice 12.0.78**[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle donnée pour tout $t \in]-1,1[$ par :

$$(\mathrm{E}) : \quad (1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0.$$

1. *Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle* (E).
2. *Après avoir calculé les rayons de convergence des séries entières correspondantes, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.*
3. *A-t-on ainsi toutes les solutions de* (E) *sur* $]-1,1[$ *?*

[redacted]**Exercice 12.0.79**[redacted] ♡ [redacted]

Trouver les solutions développables en série entière puis achever la résolution de :

$$(\mathrm{E}) : \quad y'' + xy' + y = 0.$$

[redacted]**Exercice 12.0.80**[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ *:*

$$(\mathrm{E}) : \quad t^2 y'' - ty' + ty = 1 - \ln t.$$

1. *Chercher une solution* y_0 *de l'équation homogène associée à* (E) *sous la forme* $t \mapsto t^\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. *Chercher la solution générale sur* I *de l'équation* (E) *en posant* $y = y_0 z$ *et où* z *est une fonction deux fois dérivable sur* I.
3. *Déterminer l'unique solution* f *de* (E) *sur* I *telle que* $f(1) = f'(1) = 0$.

[redacted]**Exercice 12.0.81**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP 2015** [redacted]

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.*
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. *Est-ce que toutes les solutions de* $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ *sur* $]0;1[$ *sont développables en série entière à l'origine ?*

[redacted]**Exercice 12.0.82**[redacted] ♡♡ [redacted] **CCP 2003** [redacted]

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2xy = 1.$$

Soit f *la solution de* (E) *vérifiant* $f(0) = 0$.

1. *Justifier l'existence de* f *et exprimer* f *comme fonction intégrale.*
2. *Développer* f *en série entière et en déduire la valeur de* $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

[redacted]**Exercice 12.0.83**[redacted] ♡ [redacted] **Équation d'Euler** [redacted]

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *de deux façon différentes l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}) : x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

1. *En cherchant les solutions de* (E) *développables en série entière.*
2. *À l'aide du changement de variable* $x = \varepsilon e^t$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

[redacted]**Exercice 12.0.84**[redacted] ♡ [redacted] **CCP 2007** [redacted]

Intégrer l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad y'' + xy' - 2y = 0.$$

[redacted]**Exercice 12.0.85**[redacted] ♡ [redacted] **Minettes 2011** [redacted]

Déterminer les solutions de :

$$(\mathrm{E}) : \quad y'' + xy' + 3y = 0$$

développables en série entière sur un intervalle à préciser. A-t-on toutes les solutions de (E) *?*

[redacted]**Exercice 12.0.86**[redacted] ♡ [redacted] **CCP 2011** [redacted]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* (W_n) *est convergente et déterminer sa limite.*
2. *On rappelle la relation :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n.$$
   On considère l'équation différentielle :
   $$(\mathrm{E}) : \quad (x^2-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$
   Soit $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $x \in]-r,r[$ *et* $r > 0$. *Montrer que* S *est solution de* (E) *sur* $]-r,r[$ *si et seulement si*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n.$$
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{W}_{2n} x^{2n}$ *et montrer que* $\rho : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{W}_{2n} x^{2n}$ *est solution de* (E) *sur* $]-1,1[$.

[redacted]**Exercice 12.0.87**[redacted] ♡ [redacted] **Mines 2013** [redacted]

Déterminer les solutions développables en série entière de :

$$(\mathrm{E}) : \quad (x - x^2)y'' - 2y' + 2y = 0.$$

[redacted]**Exercice 12.0.88**[redacted] ♡♡ [redacted] **Centrale 2000** [redacted]

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' = xy$ *sont développables en série entière.*

12.0.10 Divers

Exercice 12.0.89 ♡♡

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)+f(x)\geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$$

Exercice 12.0.90 ♡♡

Soit $p:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction continue non-nulle et positive. Montrer que toute solution de

$$(\mathrm{E})\quad y''+p(x)y=0$$

s'annule au moins une fois.

Exercice 12.0.91 ♡♡

Soit $u:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}(2)$ telle que

$$u''(x)+p(x)u'(x)>0$$

Montrer que u atteint son maximum en a ou en b.

Exercice 12.0.92 ♡♡

Soient deux fonctions f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x\in[0,1]$,

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f et g sont nulles.

Exercice 12.0.93 ♡♡

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\cos x-x-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12.0.94 ♡♡

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ :3y^2(y''+y')+6yy'^2+y^3=e^{-x}$$

On considère une solution y de (E). Déterminer un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que la fonction y^n soit solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Trouver alors une solution de (E).

Exercice 12.0.95 ♡♡

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}(1)$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Exercice 12.0.96 ♡

Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(-x)$$

Exercice 12.0.97 ♡♡ **Centrale 2000**

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et bornée. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E})\ :\quad xy'-y+f(x)=0.$$

1. *Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.*
2. *Déterminer la solution y_0 de (E) telle que $\lim_{x\to+\infty} y_0'(x)=0$.*
3. *On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$. Que peut-on dire du comportement de y_0 en $+\infty$?*

Exercice 12.0.98 ♡♡

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Soit $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$ une fonction paire. On considère l'équation différentielle

$$y''(t)+\varphi(t)y(t)=0.$$

On note f_0 l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f_0(0)=1$ et $f_0'(0)=0$. On note f_1 l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f_1(0)=0$ et $f_1'(0)=1$.

1. *Montrer que si y est une solution de (E) sur I alors y est $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
2. *Montrer que si y est une solution de (E) sur I alors $t\mapsto y(-t)$ est aussi une solution de (E) sur I.*
3. *(a) Montrer que f_0 est une fonction paire et que f_1 est une fonction impaire.*
   (b) Exprimer la solution générale de (E) sur I à l'aide des fonctions f_0 et f_1.
   (c) Déterminer parmi les solutions de (E) celles qui sont paires et celles qui sont impaires