Chapitre 11

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

11.0.1 Fonctions réelles

Exercice 11.0.1 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que f' ne s'annule pas. Prouver que f ne peut être périodique.

Exercice 11.0.2 ♡

Montrer que si f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique $(\mathrm{T} > 0)$ alors f' est aussi T-périodique.

Exercice 11.0.3 ♡

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'admet pas de limite en 0.
En déduire que si une fonction admet un $\mathrm{DL}(0, n)$ alors sa dérivée n'admet pas forcément un $\mathrm{DL}(0, n-1)$.

Exercice 11.0.4 ♡♡ ***Oral CCP PC***

Pour $t \in]0, 1]$, on définit :

$$\varphi(t) = \frac{1 - t^3}{t}.$$

1. *Calculer $\varphi'(t)$ et montrer que φ définit une bijection de $]0, 1]$ vers $[0, +\infty[$.*
2. *On note u la bijection réciproque de φ.*
   (a) *Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad (u(x))^3 + xu(x) - 1 = 0$.*
   (b) *On admet que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{3(u(x))^2 + x}$.*
3. (a) *Montrer que $u(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.*
   (b) *Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $u(x) - 1/x$.*
4. *Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - u(x)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$.*
5. *Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \left|u(x) - u(y)\right| \leqslant \frac{1}{3}\left|x - y\right|$.*
6. *Montrer que la suite définie par $a_{n+1} = u(a_n)$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ est convergente. Déterminer sa limite l.*

Exercice 11.0.5 ♡ ***Mines 2005***

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\mathrm{M}_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f(x)\right| \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f''(x)\right|.$$

Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que si $\mathrm{M}_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f'(x)\right|$ alors

$$\mathrm{M}_1 \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0 \mathrm{M}_2}.$$

Exercice 11.0.6 ♡ ***Mines 1995,2000,2002 pour 1., X 1996 pour 2.***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, +\infty]$.

1. *On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que toutes les dérivées d'ordre 1 à $n - 1$ sont elles-aussi bornées sur $\mathbb{R}$.*
2. *On suppose que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \lim_{x \to +\infty} f^{(i)} x) = 0$$

Exercice 11.0.7 ♡

Montrer que la fonction

$$f:\begin{cases} [0,\frac{\pi}{4}[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{e}^{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ln(\cos(x))} \end{cases}$$

est dérivable au point $x=0$ et calculer $f'(0)$.

Exercice 11.0.8 ♡

Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

possède un développement limité à tout ordre mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 11.0.9 ♡ ***TPE 2009, Mines 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^2([0,1])$ vérifiant $f(0)=0$. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 11.0.10 ♡ ***Centrale 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant que $f(0)=f'(0)=0$ et telle qu'il existe $a>0$ avec $f(a)=0$. On note (C) la courbe représentative de f. Montrer qu'il existe un point de (C) autre que l'origine en lequel la tangente passe par l'origine.

Exercice 11.0.11 ♡ ***ESPCI 2005***

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} l\in\mathbb{R}$. La fonction f' possède-t-elle une limite finie en $+\infty$?

Exercice 11.0.12 ♡♡♡ ***CCP 2007***

Trouver toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en un point au moins et qui vérifient l'équation

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

Indication 11.0 : Introduire F *une primitive de f et prouver l'égalité*

$$\forall (a,b,x,y)\in\mathrm{R},\quad \mathrm{F}(b+y)+\mathrm{F}(b-y)-\mathrm{F}(a+y)-\mathrm{F}(a-y)=2f(y)\left(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\right).$$

En déduire alors que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et discuter.

Exercice 11.0.13 ♡♡♡ ***X 1995, ENGEES 2001***

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue telle que :

$$\exists a\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 0\leqslant f(x)\leqslant a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 11.0.14 ♡♡ ***TPE 2005***

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $f_n : x\mapsto \sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}$. On cherche la plus petite valeur $x_n\in\mathbb{R}_+^*$ telle que f_n atteigne un maximum local en x_n.

1. *Calculer x_n.*
2. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ (On donnera la réponse sous forme d'intégrale).*

Exercice 11.0.15 ♡♡♡ ***Mines 2003***

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. On suppose que $f(a)=f(b)=0$ et on pose $\mathrm{M}=\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12}.$$

11.0.2 Fonctions vectorielles

Exercice 11.0.16 ♡

Soit f une application dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et soit $a\in\mathrm{I}$. Calculer $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(a+h^2)-f(a+h)\right)$ puis $\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(f(a+h)-f(a-h)\right)$.

Exercice 11.0.17 ♡

On désigne par $\det$ le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et par $(.\mid .)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Soient $f,g,h\in\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que $\varphi=\det(f,g)\in\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et calculer φ'.*
2. *Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et calculer leur dérivée :*
   (a) $\left(f\mid\det(f,g)\right)$;
   (b) $\det\left(f,\det(g,h)\,k\right)$.

Exercice 11.0.18 ♡♡

On considère le mouvement d'un point $\mathrm{M}(t)$ dans le plan au cours du temps. On suppose que ce mouvement est décrit par une fonction vectorielle $\vec{f}:\mathrm{I}\longrightarrow\mathscr{P}$ de classe C^2 et ne s'annulant pas appelée vecteur position du point M. On a donc :

$$\forall t\in\mathrm{I},\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}=\vec{f}(t)$$

On appellera vecteur vitesse et vecteur accélération du point M à l'instant t les vecteurs $\vec{v}(t):=\vec{f}\,'(t)$ et $\vec{a}(t):=\vec{f}\,''(t)$

1. *On suppose que le mouvement du point M est circulaire de centre O, c'est-à-dire que $t\mapsto\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\right\|$ est constante. Montrer qu'alors les vecteurs position et vitesse sont orthogonaux pour tout $t\in\mathrm{I}$.*
2. *On suppose maintenant que le mouvement du point $\mathrm{M}(t)$ est à accélération de centre O, ce qui signifie que à chaque instant, son vecteur accélération est colinéaire à son vecteur position. Montrer alors que $t\mapsto\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t),\vec{v}(t)\right)$ est constante.*

3. *Montrer que si le mouvement du point* M *est à la fois circulaire et à accélération de centre* O *alors il est uniforme (c'est-à-dire que la norme de son vecteur vitesse est constante).*

Exercice 11.0.19 ♡

Soient $u, v, w \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ *tel que*

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 11.0.20 ♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on pose :*

$$\mathrm{D}_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

Montrer que la fonction D_n *est dérivable et calculer* $\mathrm{D}'_n(x)$*. En déduire* $\mathrm{D}_n(x)$*.*

Exercice 11.0.21 ♡

Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *une application dérivable sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, la matrice* $\mathrm{P}(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{P}'(t)$ *est antisymétrique et en déduire que si* n *est impair, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a* $\mathrm{P}'_n(t) \notin \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*.*

Exercice 11.0.22 ♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ *une application dérivable en* 0*. On suppose que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f(2x) = 2f(x)$*. Montrer que* f *est linéaire.*

Exercice 11.0.23 ♡

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$*. Montrer que l'application* $\varphi : t \mapsto \det(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + tu)$ *est dérivable en* 0 *puis calculer* $\varphi'(0)$*.*

Exercice 11.0.24 ♡

Trouver les fonctions f *définies sur* $\mathbb{R}$ *et valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *telles que :*

$$\exists \alpha \in]1,+\infty[, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| f(x) - f(y) \right\| \leqslant |x-y|^{\alpha}$$

où $\|.\|$ *est la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Exercice 11.0.25 ♡ ***CCP 2007***

On considère une application $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *dérivable et telle que* $\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_n$*. Montrer que* $\mathrm{M}'(0)$ *est antisymétrique.*

Exercice 11.0.26 ♡

On considère le système différentiel

$$(\mathrm{S}) : \quad \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{AX}$$

où $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *est une matrice de rang* 2 *et* $\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{X}(t)$ *est une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^3$*. La fonction* X *étant une solution de* (S)*, la courbe intégrale de* X *est l'ensemble des points* $\mathrm{X}(t)$ *où* t *décrit* $\mathbb{R}$*. Montrer que les courbes intégrales sont planes et situées dans des plans parallèles.*

11.0.3 Courbes en coordonnées cartésiennes

Exercice 11.0.27 ♡

On considère la courbe paramétrée (γ) *définie par*

$$\begin{cases} x(t) & = \cos(t^2 - t^3) \\ y(t) & = \ln(1 + 3t^2 + t^2 \sin t) \\ z(t) & = \mathrm{e}^t - 1 \end{cases}.$$

Quelle est la tangente à (γ) *au point* M *de paramètre* $t = 0$ *?*

Exercice 11.0.28 ♡

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et soit* (γ) *la courbe paramétrée définie par*

$$\begin{cases} x(t) & = \mathrm{e}^t - \lambda t \\ y(t) & = \sin t - \lambda t + \dfrac{t^2}{2} \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de λ *pour lesquelles le point de paramètre* $t = 0$ *est un point régulier de la courbe* (γ)*. Donner une équation de la tangente en ce point.*

Exercice 11.0.29 ♡ ***Mines 2013***

Soient $(a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'') \in \mathbb{R}^9$*. On considère la courbe paramétrée* (γ) *définie par :*

$$\begin{cases} x(t) & = at^2 + a't + a'' \\ y(t) & = bt^2 + b't + b'' \\ z(t) & = ct^2 + c't + c'' \end{cases}.$$

Montrer que (γ) *est une courbe plane.*

Exercice 11.0.30 ♡

On considère la courbe paramétrée (γ) *définie par :*

$$\begin{cases} x(t) & = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ y(t) & = \dfrac{t(t-2)}{t-1} \end{cases}.$$

1. *Déterminer les branches infinies de* (γ) *en étudiant les limites quand* t *tend vers* t_0 *de* $\frac{y(t)}{x(t)}$ *puis de* $y(t)-ax(t)$ *avec* $a=\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$ *et* $t_0=1,2,\infty$.
2. *Achever l'étude de* (γ) *et la construire avec soin. On précisera l'allure de* (γ) *au voisinage du point de paramètre* $t=0$ *et on déterminera les coordonnées du point double.*

Exercice 11.0.31 ♡

Tracer les courbes paramétrées définies par :

1. $\begin{cases} x(t) &= t-\sin t \\ y(t) &= 1-\cos t \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x(t) &= \cos^2 t+\ln(\sin t) \\ y(t) &= \cos t\sin t \end{cases}$.

Exercice 11.0.32 ♡

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{cases}.$$

Exercice 11.0.33 ♡

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \dfrac{\sin t}{2+\cos t} \end{cases}.$$

Exercice 11.0.34 ♡

Étudier la courbe paramétrée donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t^3+2}{t} \end{cases}$$

Exercice 11.0.35 ♡ **Folium de Descartes**

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Exercice 11.0.36 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

Exercice 11.0.37 ♡♡

1. *Étudier la courbe paramétrée* Γ *définie par* $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$;
2. *Déterminer une équation cartésienne de la tangente* D_t *à* Γ *au point de paramètre* t.
3. *Déterminer l'intersection de la droite* D_t *avec les axes de coordonnées et calculer la longueur du segment obtenu.*

Exercice 11.0.38 ♡ **Courbe de Lissajoux**

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$

Exercice 11.0.39 ♡♡ **Lemniscate de Bernoulli**

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = \dfrac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases}$

Exercice 11.0.40 ♡♡ **Tractrice**

On considère la courbe paramétrée Γ *donnée par :*

$$\begin{cases} x(t) = t-\operatorname{th} t \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

et appelée tractrice.

1. *Donner le domaine de définition de* x *et* y.
2. *Montrer que* Γ *admet une propriété de symétrie qui permet de réduire son étude à un intervalle qu'on précisera.*
3. *Étudier les variations de* x *et* y.
4. *Étudier les branches infinies de* Γ.
5. *Préciser la nature du point* A *de paramètre* 0 *ainsi que la tangente en ce point.*
6. *Tracer la courbe.*
   (a) *Pour tout réel* $t>0$, *déterminer une équation cartésienne de la tangente* $\mathscr{D}_t$ *à* Γ *au point* $M(t)$ *de paramètre* t.
   (b) *Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point* $N(t)$ *dont on déterminera les coordonnées.*
   (c) *Déterminer la distance* $M(t)N(t)$.
   (d) *Préciser la nature du mouvement du point* $N(t)$.

Exercice 11.0.41 ♡♡

On se donne la courbe paramétrée

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t+\dfrac{1}{2t-1} \\ y(t) = t^2-\dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$

1. *Préciser le domaine de définition de* $f : t\mapsto (x(t),y(t))$. *Étudier ensuite les variations de* x *et de* y *en fonction du paramètre* t.
2. (a) *Quelle est la nature des branches infinies de* Γ *lorsque* t *tend vers* $\pm\infty$.
   (b) *Montrer que lorsque* t *tend vers* $\frac{-1}{2}$ *(respectivement* $\frac{1}{2}$*),* Γ *possède une asymptote dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote. de la tangente en ce point.*

(c) Tracer le support de Γ.

Exercice 11.0.42 ♡♡ **Bicorne**

Étudier la courbe donnée par : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t} \\ y(t) &= \cos t \end{cases}$.

Exercice 11.0.43 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

On montrera l'existence d'une parabole asymptote.

Exercice 11.0.44 ♡♡

Construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

Exercice 11.0.45 ♡♡

Construire la courbe

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{3t+1} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{3t+1} \end{cases}.$$

Exercice 11.0.46 ♡♡

On considère la famille de courbes paramétrées :

$$x(t) = \cos^3 t + m\sin t \quad y(t) = \sin^3 t + m\cos t$$

1. Faire l'étude de C_0.
2. Pour quelles valeurs de m, la courbe C_m admet-elle des points stationnaires ?
3. Trouver l'équation paramétrique de l'ensemble des points stationnaires et représenter cet ensemble.

Exercice 11.0.47 ♡♡♡

On considère la courbe paramétrée Γ :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2-2t \\ y(t) &= 2t^3-3t^2 \end{cases}$$

1. Tracer cette courbe et étudier le point stationnaire.
2. Écrire l'équation cartésienne de la tangente à Γ en un point $\mathrm{M}(t)$ ordinaire.
3. À quelle condition sur t_1, t_2 les tangentes issues des points ordinaires $\mathrm{M}(t_1)$ et $\mathrm{M}(t_2)$ sont-elles orthogonales ?
4. Soit un point $\mathrm{M}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$. Trouver une condition nécessaire pour que de M soient issues deux tangentes orthogonales à Γ.

Exercice 11.0.48 ♡ **Oral CCP PC**

Soit Γ l'arc paramétré définit par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{2t^3-1}{t^2-1} \\ y(t) &= t+1 \end{cases}.$$

1. Vérifier que quand $t \to \pm 1$ alors $x(t) \to \pm\infty$ et que $y(t)$ tend vers une limite finie. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Déterminer des constantes non nulles a et b telles que $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) - ay(t) - b = 0$. On dit que la droite d'équation $x = ay + b$ est asymptote à Γ.

Exercice 11.0.49 ♡ **Oral Cachan PT**

1. Étudier et tracer la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) &= \sin^2 t \\ y(t) &= (1+\cos t)\sin t \end{cases}$.

   Tracer les tangentes aux points particuliers.
2. Soient $\mathrm{M}_1(x(t), y(t))$ et $\mathrm{M}_2(x(t+\pi), y(t+\pi))$. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$ sont orthogonaux.
3. Donner une équation paramétrée par $\mathrm{X}(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$ du lieu $\mathscr{C}$ des milieux de $[\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2]$.
4. Simplifier $\left(\mathrm{X}(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + (\mathrm{Y}(t))^2$ et en déduire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ ainsi que sa nature.

Exercice 11.0.50 ♡ **E3A PC 2012**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= 3-2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}.$$

1. Soit $\mathscr{D}_1$ la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$. Montrer que l'on obtient toute la courbe $\mathscr{D}$ à partir de $\mathscr{D}_1$. Préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.
2. (a) Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin t$ et $\cos t$.

   (b) Montrer que la courbe $\mathscr{D}_1$ présente deux points singuliers pour $t = 0$ et $t = t_0$ que l'on déterminera. On note I le point de paramètre t_0.

(c) Donner l'allure de la courbe au voisinage de O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

(d) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{i} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{D}_1$ en I.

Écrire une équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

On admet que I est un point de rebroussement de première espèce.

(e) Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3,0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

i. Vérifier que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point Ω.

ii. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1$.

iii. Soit J le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $\frac{\pi}{3}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}_2$ au point J.

iv. Tracer dans $\mathcal{P}$ muni du repère $\mathcal{R}$ les courbes $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{T}$.

v. Montrer que la courbe $\mathcal{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

vi. Calculer la longueur de $\mathcal{D}$.

Exercice 11.0.51 ♡♡

On se donne la courbe paramétrée

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{2t-1} \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. Étudier ensuite les variations de x et de y en fonction du paramètre t.
2. (a) Quelle est la nature des branches infinies de Γ lorsque t tend vers $\pm\infty$.

   (b) Montrer que lorsque t tend vers $\frac{-1}{2}$ (respectivement $\frac{1}{2}$), Γ possède une asymptote dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote. de la tangente en ce point.

   (c) Tracer le support de Γ.

Exercice 11.0.52 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

On montrera l'existence d'une parabole asymptote.

Exercice 11.0.53 ♡♡

Construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

Exercice 11.0.54 ♡♡

Construire la courbe

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{3t+1} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{3t+1} \end{cases}.$$

Exercice 11.0.55 ♡♡

On considère la famille de courbes paramétrées :

$$x(t) = \cos^3 t + m\sin t \quad y(t) = \sin^3 t + m\cos t$$

1. Faire l'étude de C_0.
2. Pour quelles valeurs de m, la courbe C_m admet-elle des points stationnaires ?
3. Trouver l'équation paramétrique de l'ensemble des points stationnaires et représenter cet ensemble.

Exercice 11.0.56 ♡♡♡

On considère la courbe paramétrée Γ :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 - 2t \\ y(t) &= 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$$

1. Tracer cette courbe et étudier le point stationnaire.
2. Écrire l'équation cartésienne de la tangente à Γ en un point $M(t)$ ordinaire.
3. À quelle condition sur t_1, t_2 les tangentes issues des points ordinaires $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont-elles orthogonales ?
4. Soit un point $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$. Trouver une condition nécessaire pour que de M soient issues deux tangentes orthogonales à Γ.