Chapitre 10

Espaces euclidiens

10.0.1 Espaces préhilbertiens réels

Exercice 10.0.1 ♡

Soit l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ *muni du produit scalaire*

exo_prod_scal_matrices

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. *Montrer que* $(. \mid .)$ *définit un produit scalaire sur* E.
2. *Trouver une base orthonormale* ε *de* E.
3. *Trouver les coordonnées du vecteur* $P = X + 1$ *dans* ε.

Exercice 10.0.2 ♡

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs* $v_1 = (0,3,1,-1)$ *et* $v_2 = (1,2,-1,1)$. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Déterminer un système d'équations de* $F^{\perp}$ *puis une base orthonormale de* $F^{\perp}$.

Exercice 10.0.3 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel, et* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *une famille de vecteurs de* E *de norme* 1 *tels que :*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k).e_k.$$

1. *Montrer que si* $i \neq j$, *alors* $\left(e_i \mid e_j\right) = 0$.
2. *Montrer que* B *est une base orthonormale de* E.

Exercice 10.0.4 ♡

Soient E *un espace préhilbertien réel et une application* $f : E \mapsto E$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. *Montrer que* $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x)\| = \|x\|$ *et* $\big(f(x) \mid f(y)\big) = \big(x \mid y\big)$.
2. *Calculer* $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ *et en déduire que l'application* f *est linéaire.*

Exercice 10.0.5 ♡ ***Un produit scalaire sur*** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

Pour deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *on définit :*

$$(A \mid B) = \operatorname{Tr}(A^T B)$$

1. *Montrer que* $(. \mid .)$ *est un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées* $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces orthogonaux pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer la projection orthogonale d'une matrice* A *sur l'espace des matrices antisymétriques.*
4. *Montrer que si* $\|.\|$ *est la norme dérivant de ce produit scalaire alors*

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\operatorname{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|.$$

Exercice 10.0.6 ♡

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$(\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X = 0) \Longleftrightarrow (M^T = -M)$$

Exercice 10.0.7 ♡

Soit E *un espace euclidien et* $S = (e_1, \dots, e_n)$ *une famille de vecteurs unitaires tels que :*

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2 = \|x\|^2$$

Montrer que S *est une base de* E.

Exercice 10.0.8 ♡

Soit E *un espace euclidien, et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Montrer que*

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$;
2. $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$;
3. $E = F \oplus G \iff E = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$.

Exercice 10.0.9 ♡

Soit φ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une matrice* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = \mathrm{Tr}\,(BA)$$

Exercice 10.0.10 ♡♡ **Égalité de la médiane**

Soit $\|\bullet\|$ *une norme euclidienne sur* E.

1. *(Re)démontrer l'égalité de la médiane :*
   $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
2. *En déduire que* $\forall x, y, z \in E, \|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 + \|z+x\|^2 + \|x+y\|^2$

Exercice 10.0.11 ♡♡ **Une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit un espace préhilbertien réel E *et deux vecteurs* $x, y \in E$.

1. *Développer l'expression*
$$\left\| \|y\|^2.x - \left(x \mid y\right).y \right\|^2.$$
2. *Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.*

Exercice 10.0.12 ♡♡

Soit E *un espace préhilbertien réel et* $f, g : E \mapsto E$ *deux applications telles que :*

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \left(x \mid f(y)\right) = \left(g(x) \mid y\right).$$

Montrer que f *et* g *sont linéaires.*

Exercice 10.0.13 ♡♡

1. *Soit* E *un espace euclidien et* $f \in \mathfrak{L}(E)$ *tel que*
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \left(x \mid y\right) = 0 \implies \left(f(x) \mid f(y)\right) = 0.$$
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ *tel que*
$$\forall x, y \in E, \quad \left(f(x) \mid f(y)\right) = \alpha\left(x \mid y\right).$$
2. *Si* $f \in GL(E)$ *vérifie :*
$$\forall (x,y) \in E^2 \text{ non-nuls}, \quad \frac{\left(f(x) \mid f(y)\right)}{\|f(x)\|\,\|f(y)\|} = \frac{\left(x \mid y\right)}{\|x\|\,\|y\|},$$
   montrer qu'il existe $\alpha > 0$ *tel que :*
$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \alpha\|x\|.$$

Exercice 10.0.14 ♡♡

Sur l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, $E = \mathbb{R}_2[X]$, *on définit*

$$(P \mid Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et trouver une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 10.0.15 ♡♡

Soit $(.\mid.)$ *un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$, e *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* A *la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique.*

1. *Lorsque* $n = 2$, *montrer que* $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ *et* $\det(A) > 0$.
2. *Lorsque* $n \geqslant 3$, *montrer que* $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ *et* $\det(A) > 0$.
3. *Montrer que* $\forall p \geqslant 2$, A^p *est une matrice symétrique définie positive (et donc qu'elle définit également un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$*). On distinguera les cas* p *pair et impair.*

Exercice 10.0.16 ♡♡

Dans un espace euclidien de dimension n, *on dit qu'une famille* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de vecteurs normés est* μ*-presque orthogonale* $(\mu > 0)$ *si et seulement si pour tous réels* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|^2 \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2$$

1. *Montrer que la famille* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base orthonormale si et seulement si c'est une suite* 1*-presque orthogonale.*
2. *Montrer qu'une famille* μ*-presque orthogonale est libre.*

Exercice 10.0.17 ♡♡

Dans un espace euclidien E, *montrez qu'il existe une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *formée de vecteurs unitaires vérifiant :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1$$

Exercice 10.0.18 ♡♡

Soit E *un espace euclidien, et* $x_1, \dots, x_n \in E$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)$$

Exercice 10.0.19 ♡♡

Soit Φ *une injection de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi(k)}{k^2} = +\infty.$$

Exercice 10.0.20 ♡♡

Soit $a_1,\dots,a_m$ *m nombres réels strictement positifs. Démontrer que*

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{m} n a_n^2}{\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^2} > \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Exercice 10.0.21 ♡♡♡

Soit f *une fonction* $[0;1] \to \mathbb{R}$ *continue,* $n > 0$ *un entier naturel fixé tel que* $\int_0^1 (1-x^n) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *Montrer que :*

$$(2n+2)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10.0.22 ♡

1. *Soient* $a_1,\dots,a_n$, $b_a,\dots,b_n$, $c_1,\dots,c_n$ *des réels positifs. Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k\right).$$

2. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et telle que* $f(0) = 0$. *Montrer que pour tout* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$f^2(x) \leqslant x\left(\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right).$$

3. *Soit* n *réels strictement positifs* $x_1,\dots,x_n$ *tels que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$.

   Étudier le cas d'égalité.

Exercice 10.0.23 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit a *et* b *deux réels tels que* $a<b$.

1. *Soit* h *une fonction continue et positive de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. *Soit* E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

   On pose, $\forall\,(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. *Majorer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ *en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 10.0.24 ♡♡♡ **Polynômes de Legendre**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *du produit scalaire défini par :*

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n)$ *la base orthonormalisée par la méthode de Gram-Schmidt de la base canonique* $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$. *Pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, *on pose :*

$$\mathrm{L}_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\mathrm{P}_k.$$

1. *Calculer les polynômes* L_0 *à* L_3.
2. *Démontrer que pour tout* n, *le polynôme* L_n *possède* n *racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle* $]-1,1[$.

Exercice 10.0.25 ♡♡♡ **Centrale PC 2016**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ *du produit scalaire défini par :*

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_{-2}^{2} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dispose des fonctions Python polynômes de `numpy` *et* `integer`.

1. *Montrer que* $(.\,|\,.)$ *est bien un produit scalaire.*
2. *Écrire une fonction Python qui calcule le produit scalaire entre deux polynômes.*
3. *Montrer que les sous-espaces vectoriels formés des polynômes pairs et des polynômes impairs sont supplémentaires orthogonaux.*
4. *Déterminer une base orthonormée de* E.
5. *On pose*

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{X}\mathrm{P}' + (\mathrm{X}^2-4)\mathrm{P}'' \end{array}\right. .$$

   Montrer que f *est une symétrie.*
6. *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique.*

Exercice 10.0.26 ♡ **CCP 2009**

Soit E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions* $\mathscr{C}^2$ *sur* $[0,1]$. *Soit* $\mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} : f'' = f\}$ *et* $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} : f(0) = f(1) = 0\}$.

1. *Montrer qu'on définit un produit scalaire sur* E *en posant*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f|g\rangle = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t.$$

2. *Montrer que* $(\mathrm{sh},\mathrm{ch})$ *forme une base de* V.

3. (a) *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *Pour* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *on pose* $k = f - (\lambda \operatorname{ch} + \mu \operatorname{sh})$. *Montrer que :*

$$k \in \mathrm{W} \Longleftrightarrow \left[\lambda = f(0) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\right].$$

   (b) *Montrer que* V *et* W *sont supplémentaires dans* E.

4. *Soit* $f \in \mathrm{V}$ *et soit* $\|.\|$ *la norme associée au produit scalaire.*

   (a) *Montrer que* $\|f\|^2 = f(1)f'(1) - f(0)f'(0)$.

   (b) *Calculer* $\|\operatorname{sh}\|^2$ *et* $\|\operatorname{ch}\|^2$.

5. *Montrer que* $\mathrm{V}^{\perp} = \mathrm{W}$.

Exercice 10.0.27 ♡

On munit l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *du produit scalaire défini par*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose $\mathrm{H} = \{f \in \mathrm{E} : f(0) = 0\}$. *Soit* $g \in \mathrm{H}^{\perp}$. *En utilisant une fonction* $f : x \mapsto xg(x)$, *montrer que* $g = 0$. *Conclusion ?*

Exercice 10.0.28 ♡♡♡ ***Mines 2011***

Soit E *un espace euclidien et* f *un endomorphisme de* E. *On suppose que l'application* f *est* 1*-lipschitzienne. Montrer que* $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ *et* $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ *sont supplémentaires orthogonaux.*

10.0.2 Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Exercice 10.0.29 ♡

Soit $(\mathrm{E}, (.\,|\,.))$ *un espace euclidien et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *telle que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad (u(x) \mid x) = 0$.

1. *Montrer que :* $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$.
2. *En déduire que :* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u$.

Exercice 10.0.30 ♡

Soit $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *muni de son produit scalaire canonique* $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$.

1. *Calculer l'orthogonal de* D *l'ensemble des matrices réelles diagonales de taille* 2.
2. *Calculer l'orthogonal de* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille* 2.

Exercice 10.0.31 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Soit E *un espace euclidien.*

1. *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* E.
   Démontrer que $(\mathrm{A}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{A}$.
2. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

   (a) *Démontrer que* $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$.

   (b) *Démontrer que* $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.

Exercice 10.0.32 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère* $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre* n.
On pose $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{AB})$ *où tr désigne la trace et* ${}^t\mathrm{A}$ *désigne la transposée de la matrice* A.

1. *Prouver que* $\langle\,,\rangle$ *est un produit scalaire sur* E.
2. *On note* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble matrices symétriques de* E *et* $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de* E.

   (a) *Prouver que* $\mathrm{E} = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

   (b) *Prouver que* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. *Soit* F *l'ensemble des matrices diagonales de* E.
   Déterminer $\mathrm{F}^{\perp}$.

10.0.3 Projections orthogonales

Exercice 10.0.33 ♡

Soit F *le sous-espace de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par* $(1,0,1)$ *et* $(1,2,-1)$.

1. *Donner une équation de* F.
2. *Déterminer une base de l'orthogonal de* F.
3. *Déterminer le projeté orthogonal de* $(1,1,1)$ *sur* F.

Exercice 10.0.34 ♡

1. *Montrer que* $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$ *définit un produit scalaire sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. *Dans la suite, on considère* E *muni de ce produit scalaire.*
2. *Orthonormaliser la base canonique* $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
3. *Calculer la distance de* X^2 *à* $\mathrm{F} = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Exercice 10.0.35 ♡

Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice relativement à la base canonique est*

$$\mathrm{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.

Exercice 10.0.36 ♡

Soit $(\mathrm{E}, (.\,|\,.))$ *un espace préhilbertien réel et soit* $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un projecteur. Montrer que* p *est orthogonal si et seulement si*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Exercice 10.0.37 ♡

Soit $(\mathrm{E},(.\mid.))$ *un espace euclidien de dimension* 3, $u \in \mathrm{E}$, $u \neq 0$ *et* $\mathscr{P} = (\mathrm{Vect}\, u)^{\perp}$. *Soit* p *la projection orthogonale sur* $\mathscr{P}$ *et* s *la réflexion d'axe* $\mathscr{P}$.

1. *Montrer que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad p(x) = x - \dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u.$
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad s(x) = x - 2\dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u.$
3. *On considère dans* $\mathbb{R}^3$ *le plan* $\mathscr{P}$: $\quad x - y + z = 0$. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion d'axe* $\mathscr{P}$.

Exercice 10.0.38 ♡

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ *de la projection orthogonale sur le plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $x + 2y - 3z = 0$. *En déduire la matrice de la réflexion d'axe ce plan.*

Exercice 10.0.39 ♡

1. *Montrer que le système*

$$\begin{cases} x + y - z - t &= 0 \\ x + 3y + z - t &= 0 \end{cases}$$

définit un plan $\mathscr{P}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

2. *Construire une base orthonormale* (f_1, f_2) *de* $\mathscr{P}$.
3. *Former la matrice relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *de la projection orthogonale* p *sur le plan* $\mathscr{P}$ *puis celle de la symétrie orthogonale* s *d'axe* $\mathscr{P}$.
4. *Soit* $\mathrm{X} = (1,1,1,-1)$, *calculer* $d(\mathrm{X},\mathrm{P})$.

Exercice 10.0.40 ♡

Sur l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *on définit pour deux polynômes* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$,

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_0^1 t\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Vérifier que c'est un produit scalaire.*
2. *Déterminer une base orthonormale du sous-espace* $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal du polynôme* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3$ *sur le sous-espace* F.

Exercice 10.0.41 ♡

Soit $(\mathrm{E}, n, (.\mid.))$ *un espace euclidien et un vecteur* $x \in \mathrm{E}$. *Soit un vecteur non-nul* $a \in \mathrm{E}$. *On définit la droite vectorielle* $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(a)$ *et son orthogonal* $\mathrm{H} = \mathrm{D}^{\perp}$. *Exprimer les distances* $d(x,\mathrm{H})$ *et* $d(x,\mathrm{D})$ *en fonction de la norme du vecteur* x *et du produit scalaire* $(x \mid a)$.

Exercice 10.0.42 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel et* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormale. Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Exercice 10.0.43 ♡♡

Soit E *un espace euclidien et* p *un projecteur. Montrer que* p *est un projecteur orthogonal si et seulement si*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exercice 10.0.44 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit E *l'espace vectoriel des applications continues et* 2π*-périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que* $\left(f \mid g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *définit un produit scalaire sur* E.
2. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par* $f : x \mapsto \cos x$ *et* $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F *de la fonction* $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 10.0.45 ♡ **Oral CCP MP 2015**

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *l'application* $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{A}') = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}'\right)$, *où* $\mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}'\right)$ *désigne la trace du produit de la matrice* ${}^t\mathrm{A}$ *par la matrice* A'.

On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On admet que φ *est un produit scalaire sur* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Démontrer que* $\mathscr{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Déterminer une base de* $\mathscr{F}^{\perp}$.
3. *Déterminer la projection orthogonale de* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sur* $\mathscr{F}^{\perp}$.
4. *Calculer la distance de* J *à* $\mathscr{F}$.

Exercice 10.0.46 ♡

Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire usuel* $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\right)$, *on pose :*

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit aussi $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{U}^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

1. *Montrer que* $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad \left(\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\right)^k = \mathrm{U}^{n-k}$.
2. *Montrer que* $(\mathrm{U}^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ *est une base orthogonale de* F.
3. *Déterminer la projection orthogonale d'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *sur* F.

Exercice 10.0.47 ♡

Soit $(\mathrm{E},(.\mid .))$ *un espace préhilbertien réel, et* p,q *deux projecteurs orthogonaux. Montrer les équivalences :*
(i) $p+q$ *est un projecteur orthogonal*
(ii) $\forall x\in\mathrm{E},\ \big(p(x)\mid q(x)\big)=0$
(iii) $poq=qop=0$
(iv) $\operatorname{Im} p\perp \operatorname{Im} q$

Exercice 10.0.48 ♡

Dans l'espace $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur* $n=(1,1,1)$ *et le sous-espace* $\mathrm{F}=\{n\}^{\perp}$. *Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F *dans la base canonique. Si* $x=(3,2,1)$, *déterminer* $d(x,\mathrm{F})$.

Exercice 10.0.49 ♡♡ ***CCP 2007***

On munit $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ *d'un produit scalaire en posant pour* $\mathrm{P}=\sum_{n=0}^{3}a_n\mathrm{X}^n$ *et* $\mathrm{Q}=\sum_{n=0}^{3}b_n\mathrm{X}^n$ *:*

$$\langle \mathrm{P}|\mathrm{Q}\rangle=\sum_{n=0}^{3}a_nb_n.$$

.

On considère l'ensemble $\mathrm{F}=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]:\mathrm{P}(1)=0\}$.

1. *Montrer que* F *est un espace vectoriel et donner sa dimension.*
2. *Calculer* $p_{\mathrm{F}}(1)$ *où* p_{F} *est la projection orthogonale sur* F.

Exercice 10.0.50 ♡

Dans l'espace $\mathrm{E}=\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *muni du produit scalaire défini par :*

$$\forall(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2,\quad \langle\mathrm{P}|\mathrm{Q}\rangle=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$$

déterminer la projection de $\mathrm{P}=\mathrm{X}^2$ *sur le sous-espace vectoriel* $\mathrm{F}=\mathrm{V}ect(1,\mathrm{X})$. *Calculer la distance de* $\mathrm{P}=\mathrm{X}^2$ *à* F.

Exercice 10.0.51 ♡ ***Centrale 2003***

On se place dans $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice, relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel*

$$\mathrm{F}=\big\{(x,y,z,t):x+y+z+t=0\quad\text{et}\quad x-y+z-t=0\big\}.$$

Exercice 10.0.52 ♡ ***CCP 2003***

On considère le plan $\mathscr{P}$ *d'équation* $x+y-2z=0$ *relativement à la base orthonormée* $\mathscr{B}=(i,j,k)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Trouver une base orthonormée de* $\mathscr{P}$ *dont le premier vecteur est colinéaire à* $(1,1,1)$.
2. *Donner la matrice, relativement à* $\mathscr{B}$, *de la projection orthogonale sur* P.
3. *Calculer la distance de* $\mathrm{M}(x,y,z)$ *à* $\mathscr{P}$.
4. *Donner la matrice, relativement à* $\mathscr{B}$, *de la symétrie orthogonale par rapport à* $\mathscr{P}$.

Exercice 10.0.53 ♡

Soit E *un espace euclidien et* p *un projecteur de* E. *On note*

$$|||p|||=\sup_{\|x\|=1}\big\|p(x)\big\|$$

où $\|.\|$ *désigne la norme sur* E *associée au produit scalaire.*

1. *Montrer que* $|||p|||\geqslant 1$.
2. *On suppose que* $|||p|||=1$. *Montrer que si* p *n'est pas un projecteur orthogonal alors on peut trouver un vecteur* $z\in\mathrm{E}$ *tel que* $\big\|p(z)\big\|>\|z\|$.
3. *Conclure que* $|||p|||=1$ *si et seulement si* p *est un projecteur orthogonal.*
4. *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{P}$ *des projecteur orthogonaux de* E *est une partie fermée et bornée de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

10.0.4 Symétrie orthogonales

Exercice 10.0.54 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel, et* $s\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *une symétrie vectorielle. Montrer que* s *est une symétrie orthogonale si et seulement si* $\forall x\in\mathrm{E},\|s(x)\|=\|x\|$.

Exercice 10.0.55 ♡

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel et* F *le plan d'équations* $x+2y+z=0,\ x-z+2t=0$. *Déterminer une b.o.n. de* F, *puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F, *et de la symétrie orthogonale par rapport à* F *dans la base canonique.*

Exercice 10.0.56 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel. Soit* $f:\mathrm{E}\mapsto\mathrm{E}$ *une application.*

1. *Montrer l'équivalence :*

$$\big(\forall x,y\in\mathrm{E},\big(f(x)\mid y\big)=-\big(x\mid f(y)\big)\big)\Longleftrightarrow\big(f\text{ est linéaire et }\forall x\in\mathrm{E},\big(f(x)\mid x\big)=0\big)$$

2. *Que peut-on dire de la matrice de* f *dans une base* e *orthonormale ?*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont orthogonaux.*
4. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} fof$.

Exercice 10.0.57 ♡

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel et* F *le plan d'équations* $x+2y+z=0,\ x-z+2t=0$. *Déterminer une b.o.n. de* F, *puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F, *et de la symétrie orthogonale par rapport à* F *dans la base canonique.*

Exercice 10.0.58 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Soit E *un espace préhilbertien et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie* $n>0$.

On admet que pour tout $x\in\mathrm{E}$, *il existe un élément unique* y_0 *de* F *tel que* $x-y_0$ *soit orthogonal à* F *et que la distance de* x *à* F *soit égale à* $\big\|x-y_0\big\|$.

Pour $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, *on pose* $\big(\mathrm{A}\mid\mathrm{A}'\big)=aa'+bb'+cc'+dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

10.0.5 Problèmes de minimisation

Exercice 10.0.59 ♡

Trouver le réel a qui minimise $\int_1^2 (\ln x - ax)^2 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 10.0.60 ♡

Soit $E = \mathscr{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t + c\cos t)\right)^2 dt$$

soit minimale.

Exercice 10.0.61 ♡

Soit $\alpha = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$.

1. Déterminer un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$, un sous-espace vectoriel F de E et $f \in E$ tel que $\alpha = d(f, F)^2$.
2. En déduire l'existence et le calcul de α.

Exercice 10.0.62 ♡ **Droite des moindres carrés**

Soient $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Interpréter $\Phi = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2\right)^{1/2}$ comme la distance d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire qu'il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en lequel cette borne inférieure est atteinte.
3. Calculer a en fonction de $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\overline{C}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Exercice 10.0.63 ♡

1. Montrer que $(f \mid g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(y)g'(t)\right) \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
3. Préciser le projeté orthogonal de $h \in E$ sur G.
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a, f(1) = b\}$. Justifier l'existence d'une borne inférieure pour l'ensemble $\left\{\int_0^1 \left(h(t)^2 + h'(t)^2\right) \mathrm{d}t \mid h \in E_{a,b}\right\}$.

Exercice 10.0.64 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

10.0.6 Groupe orthogonal

Exercice 10.0.65 ♡

Soit F un sev d'un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$ et soit $f \in O(E)$. Montrer que $f(F^\perp) = \left(f(F)\right)^\perp$.

Exercice 10.0.66 ♡

Soit f une isométrie vectoriel d'un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{id}_E\right) = \operatorname{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right)^\perp.$$

Exercice 10.0.67 ♡

Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une réflexion dont on déterminera l'axe.

Exercice 10.0.68 ♡ **Similitudes d'un espace euclidien**

Un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$ est une similitude vectorielle s'il existe une isométrie u et un réel strictement positif k tels que $f = ku$.

1. Montrer que si f est une similitude vectorielle alors f conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \left[(x \mid y) = 0 \implies \left(f(x) \mid f(y)\right) = 0\right].$$
2. Réciproquement, on suppose que g est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.
   (a) Pour $a, b \in E$ unitaires, calculer $(a + b \mid a - b)$.
   (b) Montrer que $\|g(a)\| = \|g(b)\|$. Peut-on avoir $\|g(a)\| = 0$?
   (c) En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle v et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $g = \lambda v$. Conclure.

Exercice 10.0.69 ♡

Soit E *euclidien de dimension* n*. Soit* f *une isométrie symétrique et* g *un endomorphisme antisymétrique de* E *vérifiant* $f o g = g o f$*. Calculer* $\big(f(x) \mid g(x)\big)$ *et montrer que* $f+g$ *et* $f-g$ *sont des isomorphismes.*

Exercice 10.0.70 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel. Soit* $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ *une application.*

1. *Montrer l'équivalence :* $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \big(f(x) \mid y\big) = -\big(x \mid f(y)\big)$ f *est linéaire et* $\forall x \in \mathrm{E}$, $\big(f(x) \mid x\big) = 0$
2. *Que peut-on dire de la matrice de* f *dans une base* e *?*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont orthogonaux.*
4. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f o f$*.*

Exercice 10.0.71 ♡

Soit M *la matrice d'un produit scalaire dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*. Montrer que* M^n *définit également un produit scalaire.*

Exercice 10.0.72 ♡

Soit $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *une matrice orthogonale. Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$$

Exercice 10.0.73 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit E *un espace euclidien de dimension* n *et* u *un endomorphisme de* E*.*
On note $\big(x|y\big)$ *le produit scalaire de* x *et de* y *et* $||.||$ *la norme euclidienne associée.*

1. *Soit* u *un endomorphisme de* E*, tel que :* $\forall x \in \mathrm{E}, ||u(x)|| = ||x||$*.*
   - (a) *Démontrer que :* $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$*.*
   - (b) *Démontrer que* u *est bijectif.*
2. *Démontrer que l'ensemble* $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ *des isométries vectorielles de* E *, muni de la loi* $\circ$ *, est un groupe.*
3. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. Soit* $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base orthonormée de* E*.*
   Prouver que : $u \in \mathscr{O}(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ *est une base orthonormée de* E*.*

Exercice 10.0.74 ♡

Soit E *un espace vectoriel euclidien et* f *une application de* E *dans* E *qui conserve les distances et vérifie* $f(0) = 0$*. Montrer que* $f \in \mathrm{O(E)}$*.*

Exercice 10.0.75 ♡

1. *Dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *muni du produit scalaire usuel et orienté, donner la matrice de la rotation d'angle* $\frac{\pi}{4}$*.*
2. *Caractériser l'endomorphisme de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *muni du produit scalaire usuel et orienté donné par* $\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*
3. *Caractériser l'endomorphisme de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel et orienté donné par* $\mathrm{B} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$*.*

Exercice 10.0.76 ♡ **ENSEA 2001, Centrale 2009, Centrale 2016**

Soit E *un espace euclidien de dimension* $\mathrm{N} \geqslant 2$*. Soit* $f \in \mathrm{O(E)}$ *un automorphisme orthogonal de* E*. On pose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id_E})$ *et* $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id_E})$ *sont orthogonaux.*
2. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id_E})$ *et* $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id_E})$ *sont supplémentaires orthogonaux.*
3. *Soit* $x \in \mathrm{E}$*. Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$*. On note* $p(x)$ *cette limite. Montrer que* p *est la projection orthogonale sur* $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id_E})$*.*

Exercice 10.0.77 ♡ **CCP 2007**

On se place dans $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel note* $\langle .|.\rangle$*. On introduit* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* f *l'application définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$f(x) = x + 2\alpha \langle x|e_1\rangle\, e_1$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ *est fixé.*

1. (a) *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$*. Écrire la matrice* A *de* f *dans la base* e*.*
   - (b) *On considère* $e'_1 = ae_1 + e_2$, $e'_2 = be_1 + e_2$ *et* $e'_3 = e_3$*. Donner les valeurs de* a *et* b *pour que* $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *soit une base orthogonale directe et pour que* $(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3))$ *soit orthogonale.*
2. *On considère l'endomorphisme* g *canonique associé à la matrice* $\mathrm{A^T}$*.*
   - (a) *Montrer que* $g \circ f$ *admet pour valeurs propres* $1, \lambda$ *et* $\frac{1}{\lambda}$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*.*
   - (b) *Donner les valeurs propres de* $f \circ g$*.*

10.0.7 Isométries vectorielles du plan euclidien

Exercice 10.0.78 ♡

Identifier et préciser les éléments géométriques des endomorphismes f *et* g *de* $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associés à :*

1. $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$;
2. $\mathrm{B} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 10.0.79 ♡

Soit $\mathscr{P}$ *un plan euclidien de base orthonormale* (i, j)*. Déterminer la matrice dans cette base de la réflexion* s *d'axe* $\mathrm{Vect}(2i - j)$*.*

[redacted]***Exercice 10.0.80***[redacted] ♡ [redacted]

Démontrer que tout matrice de $O_2(\mathbb{R})$ *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. *Que dire de la diagonalisabilité dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *?*

[redacted]***Exercice 10.0.81***[redacted] ♡ [redacted]

Soient u *et* v *deux vecteurs non nuls de même norme d'un plan euclidien* $\mathscr{P}$.

1. *On note* (x, y) *et* (x', y') *les coordonnées respectives de* u *et* v *dans une base orthonormale* e *de* $\mathscr{P}$. *Montrer qu'il existe une unique matrice* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *avec* $a^2 + b^2 = 1$ *telle que :*
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$
Qu'a-t-on démontré ?
2. (a) *Que peut-on dire des vecteurs* $u + v$ *et* $u - v$ *?*
   (b) *Quelle est l'image de* u *par la réflexion* s *d'axe* $\mathrm{Vect}(u + v)$ *?*
   (c) *Si* s' *est la réflexion d'axe* $\mathrm{Vect}(u)$, *que dire de* $r = s \circ s'$ *et de* $r(u)$ *?*
   (d) *Supposons que* r' *soit une rotation vectorielle de* $\mathscr{P}$ *telle que* $r'(u) = v$. *Montrer, en considérant* $r'' = r^{-1} \circ r'$ *que* $r = r'$. *En quoi cela confirme-t-il le résultat de la première question ?*

10.0.8 Produit vectoriel

[redacted]***Exercice 10.0.82***[redacted] ♡ [redacted]

Soit E *un espace euclidien de dimension* 3, *et* (u, v) *un système libre de* E. *On définit l'application :*
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (v \mid x).u + (u \mid x).v \end{array} \right.$$
Montrer que f *est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.*

[redacted]***Exercice 10.0.83***[redacted] ♡ [redacted]

Soit u, v, w *trois vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension* 3. *Démontrer :*

1. $(u \wedge v) \wedge w = (u \mid w)\, v - (v \mid w)\, u$. *(double produit vectoriel)*
2. $(w \wedge u) \wedge (u \wedge v) = [u, v, w]u$.
3. $[v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v] = [u, v, w]^2$.

[redacted]***Exercice 10.0.84***[redacted] ♡ [redacted]

Soit u, v, w, t *quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension* 3. *Démontrer :*

1. $(u \wedge v \mid w \wedge t) = (u \mid w)(v \mid t) - (u \mid t)(v \mid w)$
2. $(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -[u, v, w]t + [u, v, t]w$
3. $[t, v, w]u + [u, t, w]v + [u, v, t]w = [u, v, w]t$.

[redacted]***Exercice 10.0.85***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit (x, y, z) *une base d'un ev euclidien orienté* E *de dimension* 3. *Déterminer* $u, v, w \in E$ *tels que*
$$v \wedge w = x, \quad w \wedge u = y, \quad u \wedge v = z.$$

10.0.9 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

[redacted]***Exercice 10.0.86***[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que
$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
est orthogonale et calculer A^{-1}.

[redacted]***Exercice 10.0.87***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ *un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^n$. *On définit la matrice*
$$A = I_n - 2uu^T.u$$

1. *Montrer que* $A \in O_n(\mathbb{R})$.
2. *Reconnaître* A.

[redacted]***Exercice 10.0.88***[redacted] ♡ [redacted]

Etudier l'endomorphisme u *de* $\mathbb{R}^3$ *euclidien de matrice* $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique.*

[redacted]***Exercice 10.0.89***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. *Quel endomorphisme* u *de* $\mathbb{R}^3$ *euclidien représente-t-elle ?* *Montrer que* u *est la composée d'une rotation et d'une réflexion.*

[redacted]***Exercice 10.0.90***[redacted] ♡ [redacted]

Dans $\mathbb{R}^3$ *euclidien usuel,* $e = (i, j, k)$ *la base canonique, on considère la rotation* r *d'axe* $\mathrm{Vect}(i + j + k)$ *d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *Déterminer la matrice de* r *dans la base canonique.*

[redacted]***Exercice 10.0.91***[redacted] ♡♡ [redacted]

Dans $\mathbb{R}^2$ *euclidien usuel, trouver une base* i, j *telle que dans cette base, la transformation* $u = xi + yj \mapsto (2x - y)i + (3x - y)j$ *soit une rotation.*

[redacted]***Exercice 10.0.92***[redacted] ♡♡ [redacted]

On considère un espace euclidien E *de dimension* n *et* e *une base de cet espace. On note* A *la matrice du produit scalaire dans cette base. Trouver une CNS sur la base* e *pour que la matrice* A *soit orthogonale.*

[redacted]***Exercice 10.0.93***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
Trouver une CNS pour que A *soit orthogonale. Caractériser alors l'endomorphisme associé à* A *dans la base canonique.*

[redacted]*Exercice 10.0.94*[redacted] ♡♡ [redacted]

Etudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *euclidien usuel ayant pour matrice*

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

[redacted]*Exercice 10.0.95*[redacted] ♡♡ [redacted]

Etude dans $\mathbb{R}^3$ *de l'endomorphisme ayant pour matrice* A *dans la base canonique, où*

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc+da) & 2(bd-ca) \\ 2(bc-da) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd+ba) \\ 2(bd+ca) & 2(cd-ba) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

[redacted]*Exercice 10.0.96*[redacted] ♡ [redacted]

Montrer qu'une matrice $A \in SO_3(\mathbb{R})$ *possède* 1 *comme valeur propre en étudiant* $\det(A - I_3)$.

[redacted]*Exercice 10.0.97*[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP 2015*** [redacted]

Soit E *un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté par la base orthonormée* (i, j, k).

Soit f *l'endomorphisme de* E *dont la matrice dans la base* (i, j, k) *est* $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) *Prouver que* f *est un endomorphisme orthogonal.*
   (b) *Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par* f.
2. *En déduire la nature de* f *ainsi que ses éléments caractéristiques.*

10.0.10 Endomorphismes symétriques, matrices symétriques

[redacted]*Exercice 10.0.98*[redacted] ♡ [redacted]

Diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormale.

[redacted]*Exercice 10.0.99*[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(E, (.\mid.))$ *un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 3$ *et* a, b *deux vecteurs unitaires de* E *formant une famille libre. On considère l'application :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a \mid x)\, a + (b \mid x)\, b \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme symétrique de* E.
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* f *et diagonaliser* f *dans une base orthonormée.*

[redacted]*Exercice 10.0.100*[redacted] ♡ [redacted]

Soient $(E, (.\mid.))$ *un espace euclidien,* $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, a *un vecteur unitaire de* E *et* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *donné pour tout* $x \in E$ *par* $u(x) = k\,(x \mid a)\, a + x$.

1. *Montrer que* u *est un endomorphisme symétrique.*
2. *En utilisant la matrice de* u *dans une base bien choisie, trouver une condition nécessaire et suffisante sur* k *pour que* u *soit un automorphisme orthogonal de* E. *Dans chaque cas, identifier* u.

[redacted]*Exercice 10.0.101*[redacted] ♡ [redacted]

Dans $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme* f *dont la matrice dans la base canonique est :*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *Sans calcul, dite pourquoi* $\mathbb{R}^4$ *admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de* A.
2. *Montrer que* f *est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres réelles possibles pour* f.
3. *Sans calculer le polynôme caractéristique de* f, *déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de* f. *En déduire le polynôme caractéristique de* f.
4. *Déterminer le sous-espace propre* $E(1)$. *En donner une base, puis une base orthonormale.*
5. *Montrer que le sous-espace propre* $E(-1)$ *vérifie* $E(-1) = (E(1))^\perp$. *En déduire un vecteur générateur de* $E(-1)$.
6. *Donner une base orthonormale dans laquelle la matrice* f *est diagonale. Identifier* f.

[redacted]*Exercice 10.0.102*[redacted] ♡ [redacted]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$. *Montrer que* A *est diagonalisable et déterminer sans calcul son spectre ainsi que ses sous-espaces propres.*

[redacted]*Exercice 10.0.103*[redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Que dire de la diagonalisabilité des matrices* AA^T *et* A^TA *?*
   (a) *Montrer que les produits* MN *et* NM *de deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *ont les mêmes valeurs propres.*
   (b) *Soit* λ *une valeur propre non nulle de* MN *(et donc* NM*). Montrer que les sous-espaces propres* $E_{MN}(\lambda)$ *et* $E_{NM}(\lambda)$ *ont la même dimension.*

2. Montrer que les valeurs propres de AA^T et A^TA ont le même ordre de multiplicité.
3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $AA^T = U^TA^TAU$.

[redacted] Exercice 10.0.104 [redacted] ♡ [redacted]

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^TA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives.
2. Démontrer l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.
3. Soit $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. existe-t-il une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^TA$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible.

[redacted] Exercice 10.0.105 [redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle. Que peut-on dire de son spectre complexe ?

[redacted] Exercice 10.0.106 [redacted] ♡ [redacted]

Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^T$ soit nilpotente.

[redacted] Exercice 10.0.107 [redacted] ♡ [redacted] Ensi [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant :

1. A et A^T commutent ;
2. A est nilpotente.

Montrer que $A = 0$.

[redacted] Exercice 10.0.108 [redacted] ♡ [redacted]

Déterminer les couples de matrices $(X, Y) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant

$$\begin{cases} X^TYX &= I_n \\ Y^TXY &= I_n \end{cases}$$

[redacted] Exercice 10.0.109 [redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Montrer que $\operatorname{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$ où α est la plus petite et β la plus grande valeur propre de S.

[redacted] Exercice 10.0.110 [redacted] ♡ [redacted]

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathfrak{L}(E)$. On définit l'ensemble

$$E_u = \{x \in E \mid \|u(x)\| = |||u|||\ \|x\|\}$$

1. Montrer que E_u est un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0_E\}$.
2. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $E_u = E$.

[redacted] Exercice 10.0.111 [redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$\begin{cases} A^TA = AA^T \\ A^2 = -I_n \end{cases}$$

Montrer que A est une matrice orthogonale.

[redacted] Exercice 10.0.112 [redacted] Oral Mines 2000 [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^3 = A^TA$.

1. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Donner un contre-exemple qui montre que A n'est pas forcément diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si on ne suppose plus A inversible, montrer que A est encore diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

[redacted] Exercice 10.0.113 [redacted] ♡ [redacted] Racine carrée d'une matrice symétrique positive [redacted]

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $R^2 = A$.

[redacted] Exercice 10.0.114 [redacted] ♡ [redacted] Décomposition polaire d'une matrice réelle [redacted]

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une unique matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telles que $M = \Omega S$.

[redacted] Exercice 10.0.115 [redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Montrer que $\operatorname{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$ où α est la plus petite et β la plus grande valeur propre de S.

[redacted] Exercice 10.0.116 [redacted] ♡ [redacted]

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathfrak{L}(E)$. On définit l'ensemble

$$E_u = \{x \in E \mid \|u(x)\| = |||u|||\ \|x\|\}$$

1. Montrer que E_u est un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0_E\}$.
2. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $E_u = E$.

[redacted] Exercice 10.0.117 [redacted] ♡ [redacted] Oral CCP MP 2015 [redacted]

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 10.0.118 ♡♡♡ **Type X**

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *deux matrices symétriques réelles. On note* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ *(respectivement* $\mu_1 \leqslant \mu_2$*) les deux valeurs propres de* A *(respectivement de* B*). Montrer que :*

$$\mathrm{Tr}\,(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2.$$

Exercice 10.0.119 ♡♡ **Écrit CCP PC 2008 - Extrait**

Dans cette partie, S *désigne une matrice de* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *une matrice diagonale semblable à* S*. On pose* $\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$*.*

1. (a) *Montrer que pour tout* $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(DY|Y)_n \leqslant \alpha \|Y\|_n^2$.
   (b) *En déduire que pour tout* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leqslant \alpha$
   (c) *En utilisant une décomposition du vecteur* X *sur une base orthonormée de vecteurs propres de* S*, montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si* X *est un vecteur propre de* S *associé à la valeur propre* α*.*
2. *Soit* $X \in \mathfrak{M}(,\mathbb{1})\mathbb{R}$*. On note* $X \geqslant 0$ *si tous les coefficients de* X *sont positifs.* $E = \left\{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0\right\}$, $\Sigma = \left\{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \|X\|_n = 1\right\}$*, et* $C = E \cap \Sigma$*.*
   (a) *Montrer que* E *est un fermé de* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*
   (b) *Montrer que* C *est un fermé borné de* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*
   (c) *Soit* $\varphi :\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ X \longmapsto (SX|X)_n$*. Donner l'expression de* $\varphi(X)$ *en fonction des coefficients de* S *et de ceux de* X *; en déduire que* φ *est continue sur* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*
   (d) *On pose* $\mu = \sup_{X\in C} \varphi(X)$*. Justifier l'existence de* μ *et montrer qu'il existe* X_0 *appartenant à* C *tel que* $\varphi(X_0) = \mu$*.*
   (e) *Montrer que* $\mu \leqslant \alpha$*.*
3. *On suppose dans cette question que* $S \geqslant 0$ *(ce qui signifie qu'on suppose tous les coefficients de* S *positifs ou nuls).*
   (a) *Si* $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est un vecteur propre unitaire de* S *associé à la valeur propre* α*, on pose* $W = (|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$*.*
      i. *Montrer que* W *est élément de* C*.*
      ii. *Montrer que* $|\varphi(X)| \leqslant \varphi(W)$*.*
      iii. *Montrer que* $|\alpha| \leqslant \mu$*.*
   (b) *En déduire* $\alpha \geqslant 0$*, puis que la matrice* S *admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre* α*.*
   (c) *Montrer que pour tout* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\lambda_i| \leqslant \alpha$*.*

Exercice 10.0.120 ♡ **Centrale 2007**

1. *Montrer que l'application*

$$\varphi : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\,(A^TB) \end{cases}$$

   est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*
2. *Soit* B *une matrice symétrique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que*

$$f : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & BMB \end{cases}$$

   est un endomorphisme symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire précédemment défini.*
3. *Déterminer les éléments propres de* f *dans le cas où* $n = 2$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*

Exercice 10.0.121 ♡

Soit $A \in$ *une matrice symétrique réelle d'ordre* n *telle que* $A^m = I_n$ *pour un entier* $m \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que* $A^2 = I_n$*.*

Exercice 10.0.122 ♡♡ **Mines 2011**

Soit E *un espace euclidien et* f *un endomorphisme symétrique de* E*. Déterminer les endomorphismes symétriques* g *de* E *tels que* $g^3 = f$*.*

Exercice 10.0.123 ♡ **Centrale 2005**

On définit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left((x, y, z), (x', y', z')\right) & \longmapsto & xx' + yy' + zz' - \dfrac{1}{2}\left(xy' + yx' + zy' + yz'\right) \end{cases}.$$

1. *Montrer que* φ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Soit* e *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\mathrm{Mat}_e\left(f\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*. Montrer que* f *est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien* $(\mathbb{R}^3, \varphi)$*. Conséquences ?*

Exercice 10.0.124 ♡

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices* M *symétriques réelles d'ordre* n *vérifiant* $X^TAX \geqslant 0$*. Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. *Montrer que :*

$$\left[A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right] \Longleftrightarrow \left[\exists M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\ :\quad A = M^TM\right].$$

2. *Comparer* $\mathrm{Ker}\left(A^TA\right)$, $\mathrm{Ker}\left(AA^T\right)$, $\mathrm{Ker}\,(A)$ *et* $\mathrm{Ker}\left(A^T\right)$*.*
3. *Comparer* $\mathrm{Im}\left(A^TA\right)$, $\mathrm{Im}\left(AA^T\right)$, $\mathrm{Im}\,(A)$ *et* $\mathrm{Im}\left(A^T\right)$*.*
4. *Comparer* $\mathrm{rg}\left(A^TA\right)$, $\mathrm{rg}\left(AA^T\right)$, $\mathrm{rg}\,(A)$ *et* $\mathrm{rg}\left(A^T\right)$*.*

Exercice 10.0.125 ♡♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. On note* $\|.\|$ *la norme euclidienne usuelle sur* $\mathbb{R}^n$*.*

1. *On pose* $N(A) = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$*. Vérifier que cette définition a un sens.*
2. *Montrer qu'il existe* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|X_0\| = 1$ *et* $N(A) = \|AX_0\|$*.*
3. *Montrer que* $(N(A))^2 = \max \mathrm{Sp}(A^TA)$*.*

[redacted]Exercice 10.0.126[redacted] ♡ [redacted] CCP 2009 [redacted]

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{AA}^\mathrm{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

1. *Montrer que* A *est inversible.*
2. *Montrer que* A *est symétrique.*
3. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

[redacted]Exercice 10.0.127[redacted] ♡ [redacted] X 2007, Théorème du minimax de Courant-Fischer [redacted]

Soit A *une matrice symétrique réelle d'ordre* n. *Soient* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ *ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Soient* $r \in [\![1,n]\!]$ *et* $\mathcal{V}_r$ *l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension* r *de* $\mathbb{R}^n$. *On pose*

$$\mu_r = \min_{\mathrm{V}\in\mathcal{V}_r}\left(\max_{\mathrm{X}\in\mathrm{V},\|\mathrm{X}\|=1} \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AX}\right)$$

où $\|.\|$ *désigne la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que* $\lambda_r = \mu_r$.
2. *On considère* $\sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n,\|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|$. *Qu'est ce que cet objet ? Montrer le.*
3. *On note* $\mathrm{N(A)} = \sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n,\|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|$. *Soit* A' *une deuxième matrice symétrique réelle d'ordre* n *et* $\lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$ *ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On note* $\mu'_r = \min_{\mathrm{V}\in\mathcal{V}_r}\left(\max_{\mathrm{X}\in\mathrm{V},\|\mathrm{X}\|=1} \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}'\mathrm{X}\right)$. *Montrer que*

$$\mu'_r - \mu_r \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}-\mathrm{A}').$$

[redacted]Exercice 10.0.128[redacted] ♡ [redacted] X 1992 [redacted]

Résoudre l'équation $\mathrm{XX}^\mathrm{T}\mathrm{X} = \mathrm{I}_n$ *d'inconnue* $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

[redacted]Exercice 10.0.129[redacted] ♡♡ [redacted] Centrale 2005 [redacted]

Soit $(\mathrm{E}, \langle .|.\rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n > 1$. *Soit* u *un endomorphisme de* E *vérifiant*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle x|u(x)\rangle = 0.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle x|u(y)\rangle = -\langle u(x)|y\rangle.$$
2. *Montrer que* u^2 *est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.*
3. *Montrer que* $\mathrm{Ker}\, u$ *et* $\mathrm{Im}\, u$ *sont supplémentaires orthogonaux.*
4. *Montrer que le rang de* u *est pair (on utilisera la restriction de* u *à* $\mathrm{Im}\, u$*).*
5. *On suppose que* $n = 3$. *Montrer qu'il existe une base* e *de* E *telle que :*

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

[redacted]Exercice 10.0.130[redacted] ♡♡♡ [redacted] Centrale 2003 [redacted]

Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures et qu'elle est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

10.0.11 Applications

[redacted]Exercice 10.0.131[redacted] ♡♡♡ [redacted] Déterminant de Gram [redacted]

Soit $(\mathrm{E}, \langle .|.\rangle)$ *un espace préhilbertien réel.*

On fixe un entier naturel non nul p *et des vecteurs* $x_1, \ldots, x_p$ *de* E. *On introduit le* déterminant de Gram *de ces* p *vecteurs :*

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = \det\left[\left(\langle x_i|x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right].$$

1. *Montrer que si la famille* $(x_1, \ldots, x_p)$ *est liée alors* $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = 0$.
2. *On suppose que la famille* $(x_1, \ldots, x_p)$ *est libre. Montrer qu'il existe une matrice* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ *telle que (décomposition de Cholesky)*
$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = \det\left(\mathrm{P}^\mathrm{T}.\mathrm{P}\right).$$
Montrer que P *peut être triangulaire en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*
3. *En déduire que* $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$ *est un réel positif et qu'il est nul si et seulement si* $(x_1, \ldots, x_p)$ *est liée.*
4. *Déduire de la question 2. une démonstration de l'inégalité d'Hadamard :*

$$\forall \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\det(\mathrm{M})| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2\right)}$$

[redacted]Exercice 10.0.132[redacted] ♡♡♡ [redacted] Déterminant de Gram et distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel [redacted]

Soit $(\mathrm{E}, \langle .|.\rangle)$ *un espace préhilbertien réel.*

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ *et des vecteurs* $x_1, \ldots, x_p$ *de* E, *on introduit le* déterminant de Gram *de ces* p *vecteurs :*

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = \det\left[\left(\langle x_i|x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right].$$

Soit V *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E. *Soit* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* V. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad d(x, \mathrm{V}) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_p, x)}{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_p)}}.$$

[redacted]Exercice 10.0.133[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. *Écrire* A^{-1} *sans calcul.*

[redacted]Exercice 10.0.134[redacted] ♡♡ [redacted] Inégalité d'Hadamard et déccomposition d'Iwasawa, X 2013 [redacted]

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer qu'il existe une matrice* T *triangulaire supérieure et une matrice* Ω *orthogonale telles que*
$$\mathrm{M} = \Omega\mathrm{T} \text{ (décomposition d'Iwasawa de la matrice M).}$$
2. *En déduire l'inégalité d'Hadamard :*
$$\det(\mathrm{M}^2) \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right).$$

Exercice 10.0.135 ♡♡

On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j-2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que A *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.*

Exercice 10.0.136 ♡ ***CCP 2001***

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= x-2y \end{cases}$.

Exercice 10.0.137 ♡ ***Centrale 2013***

Soient A, B, C, D *des matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On pose* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$. *On considère aussi* $\mathrm{E} = \left\{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}) : \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\right\}$.

1. *Vérifier que si* $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ *alors* M *est inversible et calculer* $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{E}$.
2. *Montrer que si* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathrm{E}^2$ *alors* $\mathrm{M}\mathrm{M}' \in \mathrm{E}$.
3. *Déterminer* $\mathrm{E} \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exercice 10.0.138 ♡ ***X 2013***

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique et* $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique et semblable à* A. *Montrer que* $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$.

Exercice 10.0.139 ♡ ***CCP 2013***

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{A} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ *est nilpotente. Montrer que* A *est une matrice antisymétrique. Le résultat reste-t-il valable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

Exercice 10.0.140 ♡♡♡ ***Inégalité d'Hadamard***

Prouver l'inégalité d'Hadamard :
$$\forall \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\det(\mathrm{M})| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)}.$$
Préciser le cas d'égalité et interpréter géométriquement cette inégalité.