Chapitre 9

Variables aléatoires discrètes

9.0.1 Lois de probabilité de variables aléatoires discrètes, cas d'un univers fini

Exercice 9.0.1 ♡♡

On lance deux dés équilibrés à n faces. On note S la somme des deux dés.

1. *Montrer que pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(S = i) = \dfrac{i-1}{n^2}$.*
2. *Pour tout $i \in [\![n+2, 2n]\!]$, montrer que $P(S = i) = \dfrac{2n-i+1}{n^2}$.*
3. *Calculer $P(S \leqslant n+1)$.*

Exercice 9.0.2 ♡

On considère 4 lettres et 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les 4 enveloppes et on définit une variable aléatoire X égale au nombre de lettres qui atteindront leur destinataire.

1. *Décrire un univers Ω adapté à cette expérience.*
2. *Déterminer $X(\Omega)$ puis la loi de X et son espérance.*

Exercice 9.0.3 ♡ ***Loi de Pascal***

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Indication 9.0 : Si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile, et pour les lancers précédents, penser à la loi binomiale.

Exercice 9.0.4 ♡ ***Un problème posé par D. Bernoulli***

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini.

1. *Démontrer que si A et B sont deux événements alors :*
   (a) $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$;
   (b) $1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$;
   (c) $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$.
2. *Démontrer que $E(1_A) = P(A)$*
3. *Soit $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n événements. Interpréter la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$.*
   Quel est le nombre moyen d'événements réalisés ?
4. *(Problème posé par Daniel Bernoulli) Parmi les $2n$ personnes formant n couples, m personnes décèdent. En moyenne, combien de couples ont survécu ?*

Exercice 9.0.5 ♡♡

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n > 3$). On extrait 3 jetons simultanément. On note X, Y, Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

1. *Déterminer la loi de Y ;*
2. *Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y+1))$ et $V(Y)$. Vérifier le résultat dans le cas $n = 3$.*

Indication 9.0 : Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

Exercice 9.0.6 ♡♡ ***Loi hypergéométrique***

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![1, a+b]\!]$). On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

1. *Déterminer le support de X (on discutera suivant que $n \geqslant a$ et $n \geqslant b$) ?*
2. *Démontrer la formule de Vandermonde :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

3. Combien y a-t-il de poignées possibles ? En déduire la loi de X. On pourra noter $N = a+b$ le nombre total de boules.
4. Calculer l'espérance de X.
5. Déterminer de même l'espérance de $X(X-1)$ puis la variance de X.
6. Comparer l'espérance et la variance de X à celle d'une loi binomiale de paramètres n et $a/(a+b)$. Commentaires ?

Exercice 9.0.7 ♡♡♡ Allumettes de Banach

Banach, qui était fumeur, avait deux boîtes d'allumettes, l'une dans la poche gauche, l'autre dans la poche droite. Chaque fois qu'il allumait sa pipe, il puisait au hasard dans l'une des boîtes. Immanquablement, au bout d'un certain temps, l'une des boîtes était vide alors que l'autre pouvait encore contenir quelques allumettes. Combien d'allumettes ?
On suppose que les deux boîtes sont changées simultanément et qu'elles contiennent initialement le même nombre N d'allumettes.
On définit la variable aléatoire X_N comme étant le nombre d'allumettes présentes dans une boite lorsque l'on se rend compte que l'autre est vide.

1. Déterminer un univers Ω adapté à cette expérience. On utilisera des mots écrits avec des « G » et des « D ». Y a-t-il équiprobabilité sur Ω ? Quelle est la probabilité d'un événement donné ?
2. Quel est le support de X_N ? Déterminer la loi de X_N ?
3. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, calculer $P(X_N = k+1)/P(X_N = k)$ et montrer que
$$(2N-k)P(X_N = k+1) = 2(N-k)P(X_N = k).$$
4. Sommer cette relation pour k variant de 0 à N. En utilisant la formule de transfert, calculer $E(X_N)$.
5. Donner la loi et l'espérance de Y_N égal au nombre d'allumettes présentes dans une boite lorsque Banach utilise la dernière allumette de l'autre.

Quel est, en moyenne, le nombre d'allumettes restantes, dans l'autre boîte (deux interprétations) :
(1) lorsqu'on prend la dernière allumette d'une boîte ?
(2) lorsqu'on veut prendre une allumette et que l'on se rend compte que la boîte que l'on vient d'ouvrir est vide ?

Exercice 9.0.8 ♡ Loi d'un dé truqué

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 9.0.9 ♡ Garagiste

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec
$$P(X=0) = 0,1 \; P(X=1) = 0,3 \; P(X=2) = 0,4 \; P(X=3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Y sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 9.0.10 ♡ Vaches laitières

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Étudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée).

Exercice 9.0.11 ♡

Un sac contient n jetons numérotés, $n \geqslant 3$.

1. On en tire trois au hasard sans remise. On désigne par X le numéro du troisième jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On désigne maintenant par Y la valeur du jeton intermédiaire aux deux autres. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Donner l'espérance et la variance de ces deux lois.

Exercice 9.0.12 ♡

On tire 9 cartes dans un jeu de 52 cartes. On note X le nombre de carrés obtenus. Quelle est la loi de X ?

Exercice 9.0.13 ♡ ***Loi de Zipf***

On rappelle (voir exercice 8.0.93 page 7) que la fonction zêta de Riemann associe à tout $a \in]1,+\infty[$*, la somme de la série de Riemann convergente* $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$*. On définit alors une probabilité* P_a *sur* $\mathbb{N}^*$ *en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_a(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}$$

et on se donne une variables aléatoire X *à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *de loi cette probabilité. Cette probabilité est appelée* loi de Zipf de paramètre a.

1. *Soit* $k \in \mathbb{N}$*. On note* A_k *l'événement « k divise X ». Calculer* $P(A_k)$.
2. *Montrer que si* i *et* j *sont premiers entre eux alors* A_i *et* A_j *sont indépendants.*
3. *Montrer que la probabilité qu'aucun carré ne divise* X *est* $1/\zeta(2s)$.

Exercice 9.0.14 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

On dispose de n *boules numérotées de* 1 *à* n *et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.*
On lance simultanément les n *boules .*
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n *boules.*
On note X *la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.*

1. *Préciser les valeurs prises par* X.
2. (a) *Déterminer la probabilité* $P(X = 2)$.
   (b) *Finir de déterminer la loi de probabilité de* X.
3. (a) *Calculer* $E(X)$.
   (b) *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} E(X)$*. Interpréter ce résultat.*

Exercice 9.0.15 ♡ [redacted]

On tire 9 *cartes dans un jeu de* 52 *cartes. On note* X *le nombre de carrés obtenus. Quelle est la loi de* X *?*

Exercice 9.0.16 ♡ [redacted]

Un loueur de voiture propose deux voitures utilisables en moyenne 4 *jours sur* 5*. Il loue ces voitures avec une marge brut de* $50e$ *par jour et par voiture. On considère* X *la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour. On suppose que ce nombre de clients est compris entre* 0 *et* 3 *et que :*

$$P(X=0) = 0.1, \qquad P(X=1) = 0.3, \qquad P(X=2) = 0.4, \qquad P(X=3) = 0.2.$$

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire* Y *comptant le nombre de clients satisfaits par jour.*
2. *Calculer la marge brute par jour.*

9.0.2 Lois usuelles

Exercice 9.0.17 ♡ [redacted]

Pour chaque question, reconnaître la loi de X *et préciser les paramètres.*

1. *On lance un dé équilibré à* 6 *faces et on note* X *la variable aléatoire égale au numéro obtenu.*
2. *Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges et 2 noires. On tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.*
3. *Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges et 2 noires. On effectue des tirages successifs et avec remise jusqu'à obtenir une boule rouge et on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*
4. *On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note* X *le nombre de boules mises dans le premier sac.*
5. *Les 32 cartes d'un jeu sont alignées, faces cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur et on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de cartes découvertes.*
6. *Une urne contient* n *jetons numérotés de* 1 *à* n *(*$n \in \mathbb{N}^*$*). On les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton* 1 *et on note* X *le nombre de tirages effectués.*
7. *Une urne contient* n *jetons numérotés de* 1 *à* n *(*$n \in \mathbb{N}^*$*). On les tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton* 1 *et on note* X *le nombre de tirages effectués.*
8. *On pose* n *questions à un élève. Pour chaque question,* r *réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. L'élève répond au hasard à chaque question et on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.*

Exercice 9.0.18 ♡ [redacted]

Pour chaque question, reconnaître la loi de X*, en préciser les paramètres et donner* $E(X)$ *et* $V(X)$.

1. X *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$P(X = n+1) = \frac{2}{n+1} P(X = n).$$

2. X *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$3P(X = n+2) = 4P(X = n+1) - P(X = n).$$

Exercice 9.0.19 ♡ [redacted]

1. *Montrer que pour* $n \geq 1$, $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1} = \binom{2n}{n}$.
2. *Une urne contient* n *boules blanches et* n *boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Soit* X *le rang de sortie de la dernière boule noire. Déterminer la loi de* X *ainsi que son espérance*

[redacted]**Exercice 9.0.20**[redacted] ♡ [redacted]

Un laboratoire se propose d'analyser le sang d'une population de n individus afin de déceler la présence d'un virus. La probabilité d'être infecté par ce dernier est de p. La probabilité d'être infecté est indépendante de la probabilité qu'une autre personne soit infectée.
Le laboratoire dispose pour cela de deux protocoles :

Protocole 1 : On analyse le sang des n individus.

Protocole 2 : On regroupe les individus par groupe de k (avec k qui divise n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. *Préciser la loi de la variable aléatoire* X *égale au nombre de groupe positifs.*
2. *Soit* Y *la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le second protocole. Calculer l'espérance de* Y *en fonction de n, k et p.*
3. *Comparer les deux protocoles pour $n = 1000$, $k = 10$ et $p = 0.01$.*

[redacted]**Exercice 9.0.21**[redacted] ♡ [redacted]

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. *Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :*

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. *Soit* X *la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de* X*, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?*

[redacted]**Exercice 9.0.22**[redacted] ♡ [redacted]

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. *Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.*
2. *Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?*

[redacted]**Exercice 9.0.23**[redacted] ♡ [redacted]

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. *Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?*
2. *Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?*
3. *Soit* X *la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de* X*, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?*
4. *Calculer* $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 5]$.

[redacted]**Exercice 9.0.24**[redacted] ♡ [redacted]

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

[redacted]**Exercice 9.0.25**[redacted] ♡ [redacted]

On considère une urne contenant une boule rouge, deux boules noires et trois boules jaunes. On effectue des tirage successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.
On note X *la variable aléatoire « nombre de tirages effectués ».*
Déterminer la loi de X *puis calculer son espérance et sa variance.*

[redacted]**Exercice 9.0.26**[redacted] ♡ [redacted] **Paradoxe du chevalier de Méré** [redacted]

Comparer les probabilités des deux événements « obtenir au moins un as avec 6 *dés » et « obtenir au moins deux as avec* 12 *dés ».*

[redacted]**Exercice 9.0.27**[redacted] ♡ [redacted] **Avion** [redacted]

A et B *sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).*

Indication 9.0 : Noter X *la variable aléatoire du nombre de moteurs de* A *qui tombent en panne, et* Y *la variable aléatoire du nombre de moteurs de* B *qui tombent en panne. On arrive à destination si* $\mathrm{X} = 0, 1$ *ou si* $\mathrm{Y} = 0$.

[redacted]**Exercice 9.0.28**[redacted] ♡ [redacted] **Pièce de monnaie** [redacted]

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. *On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?*
2. *On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?*

[redacted]**Exercice 9.0.29**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP MP 2015** [redacted]

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. *Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.*
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X *la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.*
   On note Y *le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.*
   (a) *Déterminer la loi de* X*, son espérance et sa variance.*
   (b) *Déterminer la loi de* Y*, son espérance et sa variance.*
2. *Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.*
   (a) *Déterminer la loi de* X.
   (b) *Déterminer la loi de* Y.

9.0.3 Lois de probabilité de variables aléatoires discrètes, cas d'un univers dénombrable

Exercice 9.0.30 ♡

On lance un dé parfait une infinité de fois et on considère X *la variable aléatoire prenant pour valeur le rang d'apparition du premier* 6*. Déterminer la loi de* X *ainsi que son espérance.*

Exercice 9.0.31 ♡♡

On répète le lancer d'un dé équilibré à 12 *faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat pair que l'on divise finalement par* 2*. La variable aléatoire* X *prend alors la valeur obtenue. Montrer que* X *suit la loi uniforme.*

Exercice 9.0.32 ♡

Pour une variable aléatoire X *telle que* $X(\Omega) = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$*, on pose :*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}, \quad P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. *Vérifier qu'on définit ainsi bien une loi de probabilité pour* X.
2. *La variable aléatoire* X *est-elle d'espérance finie ?*

Exercice 9.0.33 ♡

On considère une variable aléatoire X *telle que* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. *Vérifier qu'il existe une probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = u_n$.
2. *Montrer que* X *n'est pas d'espérance finie.*
3. *Montrer, sans chercher à la calculer que* $\sqrt{X}$ *est d'espérance finie.*

Exercice 9.0.34 ♡

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$*, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :*

- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. *On suppose la fortune du joueur infinie.*
   Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. *On suppose toujours la fortune du joueur infinie.*
   Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. *Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que* $2^n - 1$ *brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que* n *parties. Que devient son espérance de gain ?*

Exercice 9.0.35 ♡

Une urne contient des boules blanches en proportion b*, des boules rouges en proportions* r *ainsi que des boules vertes en proportion* v*. On a donc :* $0 < b < 1$, $0 < r < 1$, $0 < v < 1$ *et* $b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
On note X *la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*

1. *Déterminer la loi de* X.
2. *Montrer que* X *admet une espérance donnée par :*

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Exercice 9.0.36 ♡

On effectue des tirages successifs dans une urne qui contient initialement une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule noire.
On définit la variable aléatoire Y *égale au rang d'apparition de la première boule noire et la variable aléatoire* Z *égale au rang d'apparition de la première boule blanche.*

1. *Déterminer la loi de* Y *et la loi de* Z.
2. *La variable aléatoire* Y *admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*
3. *La variable aléatoire* Z *admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*

Exercice 9.0.37 ♡

On répète de façon indépendante une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A *se réalise à chaque fois avec la probabilité* $p \in]0, 1[$.
On note X *la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de l'événement* A *et* Y *celle égale au rang de sa deuxième réalisation.*

1. *Déterminer la loi de* X*. Montrer que* X *admet une espérance et la calculer.*
2. *Déterminer la loi de* Y*. Montrer que* Y *admet une espérance et la calculer.*
3. *Comparer les espérances de* X *et de* Y*. Commenter.*

Exercice 9.0.38 ♡ ***Paradoxe de Saint Pétersbourg***

On vous propose le jeu suivant. On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir Face. Si T *lancers sont nécessaires, vous gagnez* 2^{T} *e. Êtes-vous prêt à parier* $1e$ *?* $10e$ *?* $100\,000e$ *? Quelle serait une mise « honnête » selon vous ?*

Exercice 9.0.39 ♡♡ ***Le concierge***

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n *clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.*

1. *Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.*
2. *En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.*

Indication 9.0 : *Noter* V_k *l'événement "la porte n'est pas ouverte après le* k*-ième essai" et exprimer la probabilité* p_k *que la porte soit ouverte après* k *essais en fonction des* $\mathrm{P}(\mathrm{V}_k)$*. Puis calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{V}_k)$ *en utilisant les probabilités conditionnelles.*

Exercice 9.0.40 ♡♡

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$*. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note* X *le nombre d'enfants d'un couple et* P *la proportion de garçons.*

1. *Exprimer* P *en fonction de* X*.*
2. *Donner la loi de la variable aléatoire* X*.*
3. *Que vaut* $\mathrm{E}(\mathrm{P})$ *? Qu'en pensez-vous ?*

Exercice 9.0.41 ♡♡ ***Pile ou face***

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p*, où* $p \in]0,1[$*. Si* $n \geqslant 1$*, on note* T_n *le numéro de l'épreuve amenant le* $n-$*ième pile. Enfin, on pose* $\mathrm{A}_1 = \mathrm{T}_1$ *et* $\mathrm{A}_n = \mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}$*.*

1. *Quelle est la loi de* T_1 *? Donner la valeur de son espérance.*
2. *Soit* $n \geqslant 2$*. Montrer que* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.*

Exercice 9.0.42 ♡

On dispose d'une pièce déséquilibrée amenant pile avec la probabilité $2/3$*. On note* X *le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la première fois deux piles consécutifs et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$*. On suppose les lancers indépendants.*

1. *Calculer* a_1*,* a_2 *et* a_3*.*
2. *Montrer que :* $\forall n \geqslant 3, \quad a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} + \frac{2}{9} a_{n-2}$*.*
3. *En déduire la loi de* X*. Vérifier par le calcul que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = 1$*.*
4. *La variable aléatoire* X *admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*

Exercice 9.0.43 ♡ ***Deux fois pile***

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X *la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour* $n \geqslant 1$*, on note* p_n *la probabilité* $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$*.*

1. *Expliciter les événements* $(\mathrm{X} = 2)$*,* $(\mathrm{X} = 3)$*,* $(\mathrm{X} = 4)$*, et déterminer la valeur de* p_2*,* p_3*,* p_4*.*
2. *Montrer que l'on a* $p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$*.,* $n \geqslant 4$*.*
3. *En déduire l'expression de* p_n *pour tout* n*.*
4. *Rappeler, pour* $q \in]-1,1[$*, l'expression de* $\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n$*, et calculer alors* $\mathrm{E}(\mathrm{X})$*.*

Exercice 9.0.44 ♡♡ ***Rangée de spots***

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1*,* S_2*,* S_3*,* S_4 *change d'état de la manière suivante :*

- *à l'instant* $t = 0$*, le spot* S_1 *est allumé.*
- *si, à l'instant* $t = n$*,* $n \geqslant 0$*, le spot* S_1 *est allumé, alors un (et un seul) des spots* S_1*,* S_2*,* S_3*,* S_4 *s'allume à l'instant* $t = n+1$*, et ceci de manière équiprobable.*
- *si, à l'instant* $t = n$*,* $n \geqslant 0$*, le spot* S_k $(2 \leqslant k \leqslant 4)$ *est allumé, le spot* S_{k-1} *s'allume à l'instant* $t = n = 1$*.*

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X *la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot* S_2 *s'allume.*

1. *Calculer la probabilité pour que le spot* S_1 *reste constamment allumé jusqu'à l'instant* n*.*
2. *Calculer la probabilité des événements* $(\mathrm{X} = 1)$ *et* $(\mathrm{X} = 2)$*.*
3. *Calculer la probabilité des événements* $(\mathrm{X} = n)$*, pour* $n \geqslant 3$*.*
4. *Déterminer l'espérance de* X*.*

Exercice 9.0.45 ♡ ***X PC 2016***

Lors d'une cueillette de champignons, on note N *la variable aléatoire représentant le nombre de champignons cueillis et on suppose que* $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathscr{P}(5)$*.*

La probabilité qu'un champignon cueilli soit comestible est de $2/3$ *et ces probabilités sont indépendantes.*

1. *Calculer la probabilité que parmi* 2 *champignons, un seul soit comestible.*
2. *Calculer la probabilité qu'aucun champignon ne soit comestible.*

Exercice 9.0.46 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}^*$*,* $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ *converge et* $\forall x \in]-1,1[$*,* $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$*.*

Soit $p \in]0,1[$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$*.*

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Prouver que X admet une espérance et la calculer.*

Exercice 9.0.47 ♡♡♡

1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
   (a) *Montrer que*
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} > k) - n\mathrm{P}(\mathrm{X} > n).$$
   (b) *On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.*
   (c) *Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer que la suite $\big(n\mathrm{P}(\mathrm{X} > n)\big)$ converge vers 0 puis que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Montrer enfin la relation suivante (très utile dans certains contextes)*
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > k).$$
2. *On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X le plus grand nombre obtenu.*
   (a) *Que vaut $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k)$? En déduire la loi de X.*
   (b) *Calculer l'espérance de X.*
   (c) *Calculer*
   $$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\mathrm{N}}.$$

Exercice 9.0.48 ♡♡ ***Mines-Ponts - P.C. 2015***
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On pose lorsque cela a un sens $f(t) = \mathrm{E}(t^{\mathrm{X}})$. On pose
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad u_k(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+1)\big).$$

1. *Calculer $f^{(k)}(1)$ en fonction de $u_k(\mathrm{X})$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.*
2. *Montrer que*
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X} = j) = \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{j-k} u_k(\mathrm{X})}{(k-j)!}.$$

Exercice 9.0.49 ♡ ***Mines-Ponts - P.C. 2015***
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Comparer les événements A : « X prend une valeur paire » et B : « X prend une valeur impaire ».

Exercice 9.0.50 ♡♡♡
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{E} = [\![1, n]\!]$. On considère une suite de variables aléatoires $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivant chacune une loi uniforme sur E. On suppose que toutes les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathrm{A}_k = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_k\}$ vu comme sous-ensemble de E. On note aussi N_k le cardinal de A_k.

1. *Montrer que les variables aléatoires X_{k+1} et N_k sont indépendantes.*
2. *Calculer*
$$\mathrm{P}(\mathrm{N}_{k+1} = j \,|\, \mathrm{N}_k = j) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{N}_{k+1} = j+1 \,|\, \mathrm{N}_k = j).$$
3. *Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{N}_k)$ en fonction de k est de n.*
4. *Calculer la limite de $\mathrm{E}(\mathrm{N}_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$. Comment interprétez vous ce résultat ?*
5. *On note T_i le nombre de tirage que l'on doit faire une fois que l'on a obtenu i entiers différents pour obtenir de $(i+1)^e$.*
   (a) *Quelle est la loi de T_i. Quelle est son espérance ?*
   (b) *On note T le nombre de tirages pour obtenir tous les entiers de E dans les tirages. Déterminer un équivalent de l'espérance de T lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercice 9.0.51 ♡♡♡♡
Soit $a \in\,]1, +\infty[$. On définit le réel $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = n) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}$$

1. *Démontrer que l'on définit bien pas ce biais deux lois de probabilités.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'événement $\mathrm{X}_n = \{\mathrm{X} \text{ est un multiple de } n\}$.*
   (a) *Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n)$.*
   (b) *Soient i et j dans $\mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_i et X_j soient indépendants.*
3. *On note p_i le i^e nombre premier de sorte que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. On note S_n l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ divisibles par aucun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.*
   (a) *Déterminer l'événement $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{S}_n$.*

(b) En déduire le développement Eulérien de la fonction zêta de Riemann

$$\forall a > 1, \qquad \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

(c) Un entier est dit square free s'il n'est divisible par aucun carré parfait excepté 1. Calculer la probabilité que X soit sans facteur carré.

(d) Calculer la probabilité que X et Y soient premiers entre-eux.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X \wedge Y = n)$.

Exercice 9.0.52 ♡♡

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire suivant la même loi) et à valeurs strictement positives. On suppose que X_1 et $\frac{1}{X_1}$ possède une espérance. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

1. Calculer $E\left(\frac{X_k}{S_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1, n]]$.
2. Calculer $E\left(\frac{S_n}{S_m}\right)$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.0.53 ♡♡♡

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance.

1. Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance.
2. Montrer que $E(X)\,E(\frac{1}{X}) \geqslant 1$.

9.0.4 Couple de variables aléatoires

Exercice 9.0.54 ♡

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On effectue dans cette urne deux tirages successifs et sans remise. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 celui de la seconde.

1. Déterminer la loi (X_1, X_2) du couple (X_1, X_2) puis les lois marginales.
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Deviner le signe du coefficient de corrélation linéaire puis le calculer. Quelle est sa valeur lorsque $n = 2$? Le résultat vous semble-t-il logique ?

Exercice 9.0.55 ♡

On lance n dés équilibrés et on note X le nombre de numéros différents sortis. Pour $i \in [\![1,6]\!]$, on introduit X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si la face numéro i est apparue.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$.
2. Écrire X sous la forme d'une somme de variables aléatoires et en déduire son espérance.
3. Pour $(i, j) \in [\![1,6]\!]^2$, $i \neq j$, déterminer $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $V(X)$.

Exercice 9.0.56 ♡

Un objet est scindé en Y morceaux au cours d'une expérience. La variable aléatoire Y suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Chacun des Y morceaux a une probabilité p de ne pas être détruit indépendamment des autres morceaux. Soit Z le nombre de morceaux non détruits à l'issue de l'expérience.

1. Donner la loi conditionnelle de Z sachant $(Y = k)$ ($k \in [\![1, n]\!]$).
2. En déduire la loi de Z sous forme d'une somme (qu'on ne cherchera pas à calculer).
3. Calculer l'espérance de Z puis sa variance.

Exercice 9.0.57 ♡ **Service de dépannage**

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
   (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
   (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 9.0.58 ♡♡ **Chaîne de fabrication, Ecricome**

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A".

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k|\mathrm{Y} = n)$. (On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(\mathrm{Y} = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 9.0.59 ♡ **Une certaine variable aléatoire, Oral ESCP**

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 9.0.60 ♡ **Urnes de Pólya**

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. À chaque tirage, on tire une boule, on la remet puis on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issu du nième tirage.

1. Exprimer la loi de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.
2. En utilisant la relation précédente et la formule de transfert, exprimer $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1})$ en fonction de $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$. Démontrer que le proportion moyenne de boules blanches est constante. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ en fonction de n.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au rang n. On trouvera un résultat qui ne dépend pas de n.
4. On suppose que $a = b = 1$. Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 9.0.61 ♡

On suppose que le nombre N d'enfants d'une famille suit une lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque naissance, on suppose que la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0,1[$ et celle que l'enfant soit un garçon est $q = 1-p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X le nombre de garçons de la famille et Y le nombre de filles de la famille.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N,Y).
2. Quelle est la loi de X, la loi de Y ?

Exercice 9.0.62 ♡

On réalise une succession de lancers d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On définit deux suites de variables aléatoires $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

— pour tout $n \geqslant 1$, S_n est égal au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le nième pile.
— $\mathrm{T}_1 = \mathrm{S}_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, T_n est égal au nombre de lancers supplémentaires nécessaires pour obtenir le nième pile après le $(n-1)$ième pile.

1. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer la loi de T_n. Calculer son espérance et sa variance.
2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'espérance et la variance de S_n existent et que

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = \frac{n}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Exercice 9.0.63 ♡ **Guichet de poste**

Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p, ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1-p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre X de personnes arrivés à la poste suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(m)$. On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

1. Exprimer la probabilité conditionnelle de $\mathrm{Y} = k$ sachant que $\mathrm{X} = n$.
2. En déduire la loi conjointe du couple (X,Y).
3. Déterminer la loi de Y. On trouvera que Y suit une loi de Poisson de paramètre mp.

Exercice 9.0.64 ♡ **Des boules dans des boîtes**

On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y})$.

Exercice 9.0.65 ♡ **Vecteurs aléatoires et matrices**

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{B},\mathrm{P})$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1,\dots,n+1\}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose, pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2$

$$a_{i,j} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j).$$

On suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } |i+j-(n+2)| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.*
2. *Écrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{i,j}$. Vérifier que A est diagonalisable.*
3. *Déterminer les lois de probabilité de X et Y.*
4. *Pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2$, on pose :*

$$b_{i,j} = P(X = i | Y = j).$$

Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$. Montrer que le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ \vdots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de B.

[redacted]***Exercice 9.0.66***[redacted] ♡ [redacted]

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ jusqu'à l'obtention de deux piles. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

1. *Déterminer la loi de X puis son espérance.*
2. *Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi de Y puis l'espérance de Y.*
3. *On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.*

[redacted]***Exercice 9.0.67***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP 2015*** [redacted]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Déterminer la loi de Y.*

[redacted]***Exercice 9.0.68***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP 2015*** [redacted]

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p (p \in]0,1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. *Donner la loi de X. Justifier.*
2. *La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.*
   (a) *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.*
   (b) *Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.*
   (c) *Déterminer l'espérance et la variance de Z.*

[redacted]***Exercice 9.0.69***[redacted] ♡ [redacted]

On effectue une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes à deux issues possibles A et B.
On s'intéresse à la longueur X_1 de la première série ininterrompue de A ou B et à la longueur X_2 de la deuxième série ininterrompue.
Par exemple, si l'on obtient AAABBBBAB... alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 4$. Les séries peuvent ne contenir qu'une lettre. Par exemple, dans le tirage ABAABB..., on a $X_1 = 1$ et $X_2 = 1$.
On note p la probabilité du résultat A et $q = 1 - p$ celle du résultat B. On suppose $p \in]0,1[$.

1. *Déterminer les lois de X_1, (X_1,X_2) et X_2.*
2. *Calculer les espérances et les variances de X_1 et de X_2.*
3. *Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$.*

[redacted]***Exercice 9.0.70***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q = 1$. On jette n fois un dé pipé dont les faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3. Les lancers sont supposés indépendants.
À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q et celle d'obtenir 3 est $r = 1 - p - q$.
On appelle X (respectivement Y) le nombre de 1 (respectivement de 2) obtenus en n lancers.

1. (a) *Quelles sont les lois respectives de X et Y ?*
   (b) *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
2. *On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.*
   (a) *Déterminer les lois respectives de X et de Y.*
   (b) *Vérifier que X et Y sont indépendantes.*

[redacted]***Exercice 9.0.71***[redacted] ♡♡ [redacted] ***Minimum et maximum de deux dés*** [redacted]

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. *Donner la loi de X. En déduire E(X).*
2. *Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire E(Y).*
3. *Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire Cov(X,Y).*

9.0.5 Séries génératrices d'une variable aléatoire à valeurs entières

[redacted]*Exercice 9.0.72*[redacted] ♡ [redacted]

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi de probabilité est définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

1. *Calculer sa série génératrice à l'aide de fonctions usuelles.*
2. *En déduire son espérance et sa variance.*

[redacted]*Exercice 9.0.73*[redacted] ♡ [redacted]

On considère deux variables aléatoires X *et* Y *indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$.

1. *Montrer directement que* $\mathrm{Z} = \mathrm{X}+\mathrm{Y}$ *suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.*
2. *Retrouver ce résultat grâce aux séries génératrices.*
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Déterminer la loi conditionnelle de* X *sachant que* $(\mathrm{S}=n)$.

[redacted]*Exercice 9.0.74*[redacted] ♡ [redacted]

Soit X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$ *et* $r_n = \mathrm{P}(\mathrm{X}>n)$. *On note* G *la série génératrice de* X.

1. *Quelle relation a-t-on entre la série* $\sum p_n$ *et la suite* (r_n) *?*
2. *Montrer que la série entière* $\sum r_n t^n$ *a un rayon de convergence* $\mathrm{R} \geqslant 1$.
3. *Pour* $|t|<1$, *on pose* $\mathrm{H}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. *Montrer que* $\mathrm{H}(t) = \dfrac{1-\mathrm{G}(t)}{1-t}$.

[redacted]*Exercice 9.0.75*[redacted] ♡ [redacted]

Soient $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ *des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et soient* $\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_n$ *leurs séries génératrices respectives. Calculer pour tout* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{N}$, *la série génératrice* G *de* $\alpha_1\mathrm{X}_1+\ldots+\alpha_n\mathrm{X}_n$.

[redacted]*Exercice 9.0.76*[redacted] ♡ [redacted] *Loi d'attente du premier succès et formule du binôme négatif* [redacted]

On effectue une série d'expériences aléatoires de type succès-échec indépendantes et avec une probabilité de succès commune égale à p ($p \in]0,1[$). *On se place donc dans l'univers* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *muni de la loi de probabilité rendant les lancers mutuellement indépendants.*
On note T_n *le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le nième succès.*

1. *Identifier la loi de* T_1.
2. *Donner directement la loi de* T_2, *puis de* T_n *pour* n *quelconque.*
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $i \in \mathrm{T}_n(\Omega)$, *déterminer la loi de* $\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n$ *conditionnée à* $(\mathrm{T}_n = i)$. *En déduire la loi de* $\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n$.
4. *À l'aide de* $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_1 = \sum_{k=2}^{n} (\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1})$, *déterminer* $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n)$.
5. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *démontrer que* $\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n$ *et* T_n *sont indépendantes. En déduire* $\mathrm{V}(\mathrm{T}_n)$.
6. *En tirant parti de l'indépendance de* $\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n$ *et* T_n, *calculer la fonction génératrice de* T_n. *En déduire la* formule du binôme négatif *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

[redacted]*Exercice 9.0.77*[redacted] ♡ [redacted] *Oral CCP MP 2015* [redacted]

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$ *de variable réelle* t.
   On note $\mathrm{R_X}$ *son rayon de convergence.*
   (a) *Prouver que* $\mathrm{R} \geqslant 1$.
   On pose alors $\mathrm{G_X}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$ *et note* $\mathrm{D_{G_X}}$ *l'ensemble de définition de* $\mathrm{G_X}$.
   Justifier que $[-1,1] \subset \mathrm{D_{G_X}}$.
   Pour tout réel t *fixé, exprimer* $\mathrm{G_X}$ *sous forme d'une espérance.*
   (b) *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Exprimer, en justifiant votre réponse,* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ *en fonction de* $\mathrm{G_X}^{(k)}(0)$.
2. (a) *On suppose que* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
   Déterminer $\mathrm{D_{G_X}}$ *et,* $\forall\, t \in \mathrm{D_{G_X}}$, *calculer* $\mathrm{G_X}(t)$.
   (b) *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$.

[redacted]*Exercice 9.0.78*[redacted] ♡♡ [redacted] *T.P.E. - P.S.I. 2015* [redacted]

Soit X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ *telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. *Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité.*
2. *Donner la fonction génératrice de* X. *Quel est son rayon de convergence ?*
3. *La variable aléatoire* X *admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.*

[redacted]*Exercice 9.0.79*[redacted] ♡♡♡ [redacted]

L'objectif de cet exercice est d'étudier un mouvement Brownien. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Une variable aléatoire de Rademacher est une variable aléatoire à valeurs dans* $\{-1,1\}$ *avec* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{1}{2}$. *On pose* $\mathrm{S}_0 = 0$ *et* $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *On pose* $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer un équivalent de p_{2n} lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On pose $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$. Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. On considère l'événement B_k : « le premier retour en 0 se fait à l'indice k » pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = P(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ lorsque cela a un sens.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant b est $\geqslant 1$.

(b) Calculer b_1 et b_2.

(c) Montrer que $b(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

4. En déduire b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que l'on retourne presque sûrement par 0.

[redacted]**Exercice 9.0.80**[redacted] ♡♡♡♡ [redacted] **X – P.C. 2015** [redacted]

On jette deux dès à six faces et on considère la variable aléatoire donnant la somme des deux faces obtenues.

1. On suppose que les deux dés ne sont pas pipés ; déterminer la loi de X.
2. Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la variable aléatoire X suive une loi uniforme.

[redacted]**Exercice 9.0.81**[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$\forall s \in]-2,2[, \qquad g_X(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

Déterminer la loi de X. Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X-1)$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

[redacted]**Exercice 9.0.82**[redacted] ♡♡♡ [redacted]

Toutes les variables aléatoires qui suivent sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1°) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.

On suppose que dans toute la suite de l'exercice que $P(Z=n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) (a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

(b) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$. Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(S_q = n) = \binom{n+q-1}{q-1}\frac{1}{2^{n+q}}.$$

(c) Calculer $r(S_q)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1}\frac{1}{4^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^q.$$

3°) On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lapins devant naître en 2016 d'un couple de lapins. Chaque lapereau a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2016. Déterminer la loi de F ainsi que son espérance.

[redacted]**Exercice 9.0.83**[redacted] ♡♡♡ [redacted]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note g_X sa fonction génératrice. On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_X(t) = g_X(e^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g_X(t) = E(e^{itX})$.
2. Montrer que φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que X est d'espérance finie. Montrer que φ_X est dérivable et exprimer ${\varphi_X}'(0)$ en fonction de $E(X)$.
4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y ont la même loi.
5. On considère (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{U}$ on a $\lim_{n\to+\infty} g_{X_n}(z) = g_Y(z)$. Montrer que (X_n) converge en loi vers Y c'est-à-dire que
$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = m) = P(Y = m).$$
6. On définit $S_n = X_{1,n} + X_{2,n} + \cdots + X_{n,n}$ une somme de n variables mutuellement indépendantes de même loi. Étudier la convergence en loi de (S_n) dans les deux cas suivants :

(a) Pour tout n, les $X_{i,n}$ suivent une loi Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

(b) Pour tout n, les $X_{i,n}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

(c) Pour tout n, les $X_{i,n}$ suivent une loi géométrique de paramètre $1 - \frac{\lambda}{n}$.

9.0.6 Inégalités, estimations

[redacted]**Exercice 9.0.84**[redacted] ♡ [redacted]

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \quad Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}.$$

1. Justifier : $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|S_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi et l'espérance de Y_n.

(b) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

(c) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|T_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 9.0.85 ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{1}{n})$.

1. Montrer que $P(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$;
2. Montrer que $P(|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$. En déduire que $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 9.0.86 ♡

On jette 3600 fois un dé. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris strictement entre 480 et 720.

Exercice 9.0.87 ♡

Une usine fabrique des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et on note Z_n le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On approxime ensuite p par la proportion $\dfrac{Z_n}{n}$ de pièces défectueuses de cet échantillon. On suppose le prélèvement fait sur une population suffisante pour que la suite des n tirages puissent être considérées comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la loi de Z_n ?
2. En déduire sa moyenne et sa variance.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.
4. En déduire une condition sur n pour que l'approximation proposée donne une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 9.0.88 ♡ **Oral CCP MP 2015**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. ***Application*** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 9.0.89 ♡♡ **Mines-Ponts - P.C. 2015**

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 9.0.90 ♡♡♡ **Mines-Ponts - M.P. 2015**

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes et de $N = na$ boules. Ces boules sont réparties de façon indépendante et équiprobable entre les urnes. On note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et $S_n = \frac{Y_n}{n}$.

1. Calculer $E(S_n)$
2. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 9.0.91 ♡

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire suivant la même loi) de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
   (b) Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers la variable constante égale à $2p$ c'est-à-dire que
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
2. On pose $U_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Montrer que (Z_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à p^2.

Exercice 9.0.92 ♡♡♡

On considère Ω l'ensemble des applications de $[[1,n]]$ dans lui-même. On munit cet ensemble de la probabilité uniforme. On note $X_n : \Omega \to \mathbb{N}$ la variable aléatoire donnant le nombre de points de $[[1,n]]$ sans antécédent.
Pour $i \in [[1,n]]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si i n'admet aucun antécédent et 0 sinon.

1. Donner la loi de Y_i puis celle de $Y_i Y_j$ lorsque $i \neq j$.
2. Donner un équivalent de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et justifier que $V(X_n) = O(n)$.
3. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{e}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$
   Autrement dit que $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ converge en loi vers la variable aléatoire constante $\frac{1}{e}$.

Exercice 9.0.93 ♡♡♡♡

Soit X une variable aléatoire centrée (c'est-à-dire d'espérance nulle) et à valeur dans un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathrm{E}(e^{\lambda X}) \leqslant \frac{b}{b-a} e^{\lambda a} - \frac{a}{b-a} e^{\lambda b}.$$

2. En déduire l'inégalité de Hoeffding :

$$\mathrm{E}(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{(b-a)^2\lambda^2}{8}\right).$$

3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires centrées et indépendantes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \qquad P(S_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(8b-a)^2}\right).$$

9.0.7 Exercices théoriques

[redacted]***Exercice 9.0.94***[redacted] ♡ [redacted]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$, la loi de $\min(X,Y)$, la loi de $\max(X,Y)$.
2. À quelle situation type peut-on associer les variables aléatoires X et Y ? Que représentent alors $X+Y$, $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$?
3. Calculer les probabilités suivantes : $P(X=Y)$ et $P(X \leqslant Y)$.

[redacted]***Exercice 9.0.95***[redacted] ♡ [redacted] ***Variable aléatoire quasi-certaine*** [redacted]

On dit d'une variable aléatoire réelle qu'elle est quasi-certaine s'il existe un réel a tel que $P(X=a)=1$. Montrer qu'une variable aléatoire réelle X est quasi-certaine si et seulement si sa variance est nulle.

[redacted]***Exercice 9.0.96***[redacted] ♡ [redacted] ***Variable aléatoire à valeurs entières*** [redacted]

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n).$$

   (b) En déduire que si X admet une espérance alors

   $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

   (c) Montrer de même que si X admet une variance alors

   $$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P(X>k).$$

2. On dispose d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remises. On note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Quelle est l'espérance de X ?
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(X)$ quand $N \to +\infty$.
   (d) Déterminer de même un équivalent de $\mathrm{V}(X)$ quand $N \to +\infty$.

[redacted]***Exercice 9.0.97***[redacted] ♡ [redacted] ***Couple géométrique*** [redacted]

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X=i) \cap (Y=j)\big) = \frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i, j de $\mathbb{N}^*$.

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

[redacted]***Exercice 9.0.98***[redacted] ♡ [redacted]

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_n puis calculer $\mathrm{E}(Y_n)$ et $\mathrm{V}(Y_n)$.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(Y_n, Y_m)$.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(U_n)$ et $\mathrm{V}(U_n)$.

[redacted]***Exercice 9.0.99***[redacted] ♡ [redacted]

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=i, Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{j!(i-j)!2^i} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de X. Montrer que X admet un espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi de Y. Montrer que Y admet un espérance et la calculer.
3. On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$.
   (a) Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(X=i, Z=j)$
   (b) En déduire la loi de Z. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
   (c) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.0.100 ♡

Soit $p \in]0,1[$. On définit pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ les réels $a_{i,j}$ par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} (1-p)^{j-2}p^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. *Montrer que $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.*
2. *Déterminer les lois marginales de X et de Y.*
3. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Soit $j \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.*

Exercice 9.0.101 ♡

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. On note $Z = \max(X,Y)$. Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

Exercice 9.0.102 ♡

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calcule l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Exercice 9.0.103 ♡

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $A = aX + b$, $B = cY + d$. Comparer $\rho(A,B)$ et $\rho(X,Y)$.

Exercice 9.0.104 ♡

Soit $a > 0$. On considère, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, les réels $p_{i,j} = \lambda \dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$.

1. *Déterminer la valeur de λ pour laquelle il forment la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires.*

   On suppose dorénavant cette condition remplie. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ admettant les $p_{i,j}$ comme coefficient de sa loi.
2. *Déterminer les lois marginales de X et Y.*
3. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Déterminer la loi de la somme $X+Y$.*

Exercice 9.0.105 ♡

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi $\mathscr{G}(p)$.

1. *Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.*
2. *Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(S = n)$ où n est un élément de $S(\Omega)$.*
3. *Pour $n \in S(\Omega)$, calculer $P(S \geqslant n)$.*
4. *Déterminer $P(S \geqslant Z)$, $P(S \leqslant Z)$ et $P(S = Z)$.*

Exercice 9.0.106 ♡

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires discrètes de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = a\frac{i+j}{i!j!}.$$

1. *Déterminer la valeur de a.*
2. *Déterminer les lois marginales de X et de Y.*
3. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Montrer que le couple (X,Y) admet une covariance et la calculer.*
5. *Montrer que la variables aléatoires 2^{X+Y} admet une espérance et la calculer.*

Exercice 9.0.107 ♡

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a,b]$.

1. *Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a,b]$.*
   La variable X admet aussi une variance σ^2 et l'on se propose de majorer.
   On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités

   $$t = \sum_{y\geqslant 0} yP(Y = y), \; s = \sum_{y\geqslant 0} y^2P(Y = y) \text{ et } u = P(Y \geqslant 0)$$
2. *Vérifier*
   $$t^2 \leqslant su$$
3. *Calculer espérance et variance de Y. En déduire*
   $$t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1-u)$$
4. *En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir*
   $$t^2 \leqslant \sigma^2/4$$
5. *Conclure*
   $$\sigma^2 \leqslant (b-a)^2/4$$

Exercice 9.0.108 ♡

On considère une variable aléatoire discrète X vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n+1) = \frac{1}{n+1}P(X = n) \quad \text{et} \quad P(X = -n) = P(X = n).$$

1. *Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(X = n)$ en fonction de $P(X = 0)$. En déduire $P(X = 0)$ puis la loi de X.*
2. *Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et une variance qu'on calculera.*

Exercice 9.0.109 ♡

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.
b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a, a[$.
Montrer qu'elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'on a

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

[redacted] **Exercice 9.0.110** [redacted] ♡ [redacted]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique sur N^* de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $Z = \min(X,Y)$ et soit $q = 1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Calculer $P(X \geqslant n)$;
2. Calculer $P(Z \geqslant n)$ puis $P(Z = n)$. En déduire la loi suivie par la variable aléatoire Z.
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

[redacted] **Exercice 9.0.111** [redacted] ♡ [redacted]

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Rappeler la fonction génératrice de la variable X.
b) Exploiter celle-ci pour calculer le moment centré d'ordre 3 de la variable X.

[redacted] **Exercice 9.0.112** [redacted] ♡ [redacted]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment à tout ordre $k \leqslant n$.

[redacted] **Exercice 9.0.113** [redacted] ♡ [redacted]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum P(X > n)$ converge et qu'alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

[redacted] **Exercice 9.0.114** [redacted] ♡ [redacted]

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\} \text{ et } P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

a) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.
b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

[redacted] **Exercice 9.0.115** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les réels $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n-1}$ par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i = \lambda_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!], \quad p_i = \lambda(2n - i)$$

où λ est un nombre réel fixé.

[redacted] **Exercice 9.0.116** [redacted] ♡ [redacted]

Pour chacune des suites (p_n) suivantes, dire s'il est possible de trouver λ tel qu'elles définissent la loi de probabilité d'une variable X.

1. $X(\Omega) = [\![2, +\infty]\!]$ et $p_n = \lambda \dfrac{1}{n^2 - 1}$ pour $n \geqslant 2$.
2. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $p_n = \lambda 2^n \operatorname{th}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ pour $n \geqslant 0$.
3. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $p_n = \lambda \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \geqslant 0$.

[redacted] **Exercice 9.0.117** [redacted] ♡ [redacted]

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes positives définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Démontrer que si X et Y admettent une espérance alors il en est de même des variables aléatoires :

1. $Z_1 = \max(X,Y)$;
2. $Z_2 = \sqrt{XY}$;
3. $Z_3 = \dfrac{XY}{X+Y}$.

[redacted] **Exercice 9.0.118** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. On note $\mathscr{L}^0$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{L}^0$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ admettant un moment d'ordre n. On va démontrer que $\mathscr{L}^0 \supset \mathscr{L}^1 \supset \mathscr{L}^2 \supset \ldots \supset \mathscr{L}^n \supset \ldots$.

1. Démontrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\left(x^n + y^n\right).$$
2. Démontrer que si X et Y admettent un moment d'ordre n alors X + Y aussi. Justifier alors que $\mathscr{L}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^0$.
3. Démontrer que pour tout réel positif x, $0 \leqslant x^{n-1} \leqslant 1 + x^n$.
4. En déduire que $\mathscr{L}^n \subset \mathscr{L}^{n-1}$.

[redacted] **Exercice 9.0.119** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $p_n = \dfrac{a}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1} + \dfrac{\gamma}{n+2}$.
2. Déterminer a pour que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.
3. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?
4. On pose $Y = X^2 - 6X + 9$. Déterminer la loi de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

[redacted] **Exercice 9.0.120** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n+1) = \frac{a}{n+1} P(X = n).$$

1. *Déterminer la loi de* X.
2. *La variable aléatoire* X *admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*
3. *La variable aléatoire* X *admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.*

Exercice 9.0.121 ♡

On considère une variable aléatoire discrète X *vérifiant :*

$$\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad 3\mathrm{P}(\mathrm{X}=n+2)=4\mathrm{P}(\mathrm{X}=n+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}=n).$$

1. *Déterminer la loi de* X.
2. *La variable aléatoire* X *admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.*

Exercice 9.0.122 ♡

1. (a) *Soit* $p\in]0,1[$ *et* X *suivant la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$. *Donner la fonction de répartition de* X *c'est-à-dire calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant n)$ *pour* $n\in\mathbb{N}$. *De même, calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant n)$.
   (b) *Vérifier que la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$ *est bien une loi sans mémoire.*
2. *Démontrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire* X *suivant la loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$ *est donnée par*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9.0.123 ♡♡ **Maximiser l'espérance, Oral ESCP**

Soit $n\geqslant 2$. *On considère deux variables aléatoires indépendantes* X_1 *et* X_2, *définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{B},\mathrm{P})$, *et suivant la loi uniforme discrète sur* $\{1,2,\dots,n\}$. *On considère* a *un entier de* $\{1,2,\dots,n\}$, *et* Y *la variable aléatoire définie par :*

$$\forall\omega\in\Omega,\ \mathrm{Y}(\omega)=\begin{cases}\mathrm{X}_1(\omega) & si\ \mathrm{X}_2(\omega)\leqslant a\\ \mathrm{X}_2(\omega) & si\ \mathrm{X}_2(\omega)>a.\end{cases}$$

1. *Déterminer la loi de* Y *(vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).*
2. *Calculer l'espérance de* Y *et la comparer à l'espérance de* X_1.
3. *Pour quelles valeurs de* a *cette espérance est-elle maximale ?*

Exercice 9.0.124 ♡♡ **Entropie d'une variable aléatoire**

Soit X *une variable aléatoire discrète prenant la valeur* x_i *avec probabilité* p_i, *pour* $i=1,\dots,n$. *On définit l'* entropie de X *par :*

$$\mathrm{H}(\mathrm{X})=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i).$$

1. *Calculer* H(X) *si* X *est constante.*
2. *Calculer* H(X) *si* X *est équidistribuée.*
3. *Trouver la valeur maximale de* H(X) *pour* X *parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus* n *valeurs.*

Exercice 9.0.125 ♡♡ **Une autre expression de l'espérance**

1. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
   (a) *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{X}>k)-n\mathrm{P}(\mathrm{X}>n).$$

   (b) *On suppose que* $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}>k)$ *converge. Démontrer que* X *admet une espérance.*
   (c) *Réciproquement, on suppose que* X *admet une espérance. Démontrer alors que* $\left(n\mathrm{P}(\mathrm{X}>n)\right)_n$ *tend vers 0, puis que la série* $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}>k)$ *converge, et enfin que*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}>k).$$

2. *Application : on dispose d'une urne contenant* N *boules indiscernables au toucher numérotées de* 1 *à* N. *On effectue, à partir de cette urne,* n *tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note* X *le plus grand nombre obtenu.*
   (a) *Que vaut* $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant k)$ *? En déduire la loi de* X.
   (b) *A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de* E(X).
   (c) *A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite* $\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n\right)_{\mathrm{N}}$ *admet une limite (lorsque* N *tend vers* $+\infty$*) que l'on déterminera.*
   (d) *En déduire que* $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\mathrm{N}}=\frac{n}{n+1}$.

Exercice 9.0.126 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit $\lambda\in]0,+\infty[$.
Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)=\dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* R *définie par* $\mathrm{R}(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. *Calculer* λ.
3. *Prouver que* X *admet une espérance, puis la calculer.*
4. X *admet-elle une variance ? Justifier.*

Exercice 9.0.127 ♡ **Oral CCP MP 2015**

Soit $a\in]0,+\infty[$.
Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}^2$ *dont la loi est donnée par :*

$$\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=j,\mathrm{Y}=k)=\frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}.$$

1. *Déterminer les lois marginales de* X *et de* Y.
   Les variables X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

2. *Prouver que* $\mathrm{E}\left[2^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\right]$ *existe et la calculer.*

Exercice 9.0.128 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. *On pose* $q = 1-p$.
On considère N *variables aléatoires* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre* p.

1. *Soit* $i \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$, *puis* $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i > n)$.

2. *On considère la variable aléatoire* Y *définie par* $\mathrm{Y} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}} (\mathrm{X}_i)$.
   c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $\mathrm{Y}(\omega) = \min(\mathrm{X}_1(\omega), \cdots, \mathrm{X}_n(\omega))$, min *désignant « le plus petit élément de ».*

   (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{Y} > n)$.
   En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$, *puis* $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = n)$.

   (b) *Prouver que* Y *admet une espérance et la calculer.*

Exercice 9.0.129 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) = pq^k$ *où* $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$.
On considère alors les variables U *et* V *définies par* $\mathrm{U} = \sup(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *et* $\mathrm{V} = \inf(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

1. *Déterminer la loi du couple* (U,V).

2. *Expliciter les lois marginales de* U *et de* V.

3. U *et* V *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 9.0.130 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi est donnée par :*
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{P}((\mathrm{X}=i) \cap (\mathrm{Y}=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$

1. *Déterminer les lois de* X *et de* Y.

2. (a) *Prouver que* $1+\mathrm{X}$ *suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de* X.

   (b) *Déterminer l'espérance et la variance de* Y.

3. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

4. *Calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$.

Exercice 9.0.131 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \dbinom{k}{q} x^{k-q}$ *converge et* $\forall\, x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \dbinom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]-1,1[$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé.*
Soit X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) *est donnée par :*

$$\mathrm{P}((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Y}=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*

2. (a) *Déterminer la loi de* Y.

   (b) *Prouver que* $1+\mathrm{Y}$ *suit une loi géométrique.*

   (c) *Déterminer l'espérance de* Y.

3. *Déterminer la loi de* X.

Exercice 9.0.132 ♡ ***Oral CCP MP 2015***

Remarque *: les questions 1. et 2. sont indépendantes.*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé.*

1. (a) *Soit* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathscr{A})$.
   On suppose que X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
   Déterminer la loi de $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$.

   (b) *En déduire l'espérance et la variance de* $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$.

2. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
   On suppose que Y *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
   On suppose que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que* $\forall\, m \in \mathbb{N}$, *la loi conditionnelle de* X *sachant* $(\mathrm{Y}=m)$ *est une loi binomiale de paramètre* (m,p).
   Déterminer la loi de X.

9.0.8 Moments

Exercice 9.0.133 ♡

Exercice 9.0.134 ♡

9.0.9 Python et probabilités

Exercice 9.0.135 ♡♡ ***Centrale - P.C. 2015***

Soient (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi* $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. *On pose* $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ *pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Préciser la loi de* S_n*, son espérance et sa variance.*
2. *Déterminer une expression sommatoire (que l'on ne cherchera pas à simplifier) de* $\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n < \frac{n}{2}\right)$.
3. *Programmer une fonction* `binom(n,k)` *qui calcule le coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ *lorsque* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in [[0, n]]$.
4. *Programmer une fonction* `sn2(n)` *qui calcule* $\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n < \frac{n}{2}\right)$.
5. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* $v_n = \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{n}{2}\right)$. *Établir l'égalité*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = u_n + \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n = \frac{n}{2}\right).$$

6. *En déduire une démonstration de ce que l'on a observé à la question* 5^{o}). *On demande en fait deux démonstrations : l'une basée sur la formule de Stirling et l'autre est à composer par vos soins.*

Exercice 9.0.136 ♡♡♡ ***Centrale - P.S.I. 2015***

1. *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$*, on introduit la matrice suivante :*

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{bmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{bmatrix}.$$

On note $e(a,b)$ *le réel* $|\lambda_1 - \lambda_2|$ *où* λ_1 *et* λ_2*sont les valeurs propres complexes de* $\mathrm{M}(a,b)$.
Écrire une fonction `ecart` *qui étant donnés deux entiers* a *et* b *renvoie une valeur approchée décimale à* 10^{-2} *près de* $e(a,b)$.

2. (a) *Soient* A *et* B *deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$*, de même loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$ *avec* $p \in]0,1[$.
Écrire une fonction `hasard(p)` *qui, étant donné* p *réalise la simulation de* 500 *valeurs* (a,b) *de couple de variable aléatoire* (A,B) *et renvoie le nombre de fois où* `ecart(a,b)` *est supérieur ou égal à* 10^{-1}.
   (b) *Pour* $p \in \left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{100}, \dots, \frac{99}{100}\right\}$*, relier les points de coordonnées* $\left(p, \frac{\texttt{hasard(p)}}{500}\right)$.
   (c) *Sur le même graphe, tracer la courbe de la fonction* $p \mapsto \frac{2-2p+p^2}{2-p}$ *pour* p *dans* $]0,1[$.
3. (a) *Montrer que la matrice* $\mathrm{M}(a,b)$ *est semblable à la matrice*

$$\mathrm{N}(a,b) = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

   (b) *À quelle condition la matrice* $\mathrm{N}(a,b)$ *est-elle diagonalisable ?*
   (c) *Calculer la probabilité de l'événement « $\mathrm{M}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est diagonalisable ».*