Chapitre 8

Probabilités sur un univers fini ou dénombrable

8.0.1 Rappels de théorie des ensembles

[redacted]***Exercice 8.0.1***[redacted] ♡ [redacted] ***Applications et opérations ensemblistes*** [redacted]

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application.*

1. *Montrer*
$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{A}' \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \quad f(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}') = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{A}') \text{ et } f(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}') \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{A}').$$

2. *Montrer*
$$\forall \mathrm{B}, \mathrm{B}' \in \mathscr{P}(\mathrm{F}), \quad f^{-1}(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}') = f^{-1}(\mathrm{B}) \cup f^{-1}(\mathrm{B}') \text{ et } f^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathrm{B}') = f^{-1}(\mathrm{B}) \cap f^{-1}(\mathrm{B}')$$

3. *Montrer que*
$$\forall \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{F}), \quad f^{-1}(\mathrm{B}^c) = \left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)^c.$$

[redacted]***Exercice 8.0.2***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux familles d'ensembles et* A *un ensemble quelconque. Démontrer les relations suivantes :*

1 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{A}) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n\right) \setminus \mathrm{A}$;

2 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{A} \setminus \mathrm{E}_n) = \mathrm{A} \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n\right)$;

3 $\displaystyle\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{E}_n \cap \mathrm{F}_n)$;

4 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{F}_n) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n\right)$.

8.0.2 Ensembles dénombrables

[redacted]***Exercice 8.0.3***[redacted] ♡ [redacted] $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ***n'est pas dénombrable.*** [redacted]

Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas dénombrable.*

[redacted]***Exercice 8.0.4***[redacted] ♡ [redacted]

On considère
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \end{array} \right. .$$

Montrer que Φ *est bijective et préciser la bijection réciproque. Retrouver ainsi que* $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

[redacted]***Exercice 8.0.5***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $\mathrm{A} = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $\mathrm{B} = \left\{b_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *deux ensembles dénombrables. Considérons*
$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} \times \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a_i, b_j) & \longmapsto & \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i \end{array} \right. .$$

Montrer que Ψ *est bijective. Que peut-on en déduire ?*

[redacted]***Exercice 8.0.6***[redacted] ♡ [redacted] $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ***n'est pas dénombrable*** [redacted]

Le but de cet exercice est de démontrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *n'est pas dénombrable. On suppose l'existence d'une bijection* f *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. *On note* $\mathrm{A} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\right\}$. *En introduisant l'antécédent* q *de* A, *aboutir à une contradiction et en déduire le résultat.*

[redacted]***Exercice 8.0.7***[redacted] ♡♡ [redacted] ***Écrit Centrale 2016 PC - Extrait*** [redacted]

Pour tout couple (p,k) *d'entiers naturels non nuls, on note* $\mathrm{S}(p,k)$ *le nombre de surjections de* $[\![1,p]\!]$ *dans* $[\![1,k]\!]$. *De façon cohérente, pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{S}(p,0) = 0$.

Quelques cas particuliers

1. *Que vaut* $\mathrm{S}(p,n)$ *pour* $p < n$?

2. *Déterminer* $S(n, n)$.
3. *Déterminer* $S(n+1, n)$.

Recherche d'une expression générale

1. *Combien y a-t-il d'applications de* $[\![1, p]\!]$ *dans* $[\![1, n]\!]$ *?*
2. *Pour* $p \geqslant n$*, établir la formule*

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) \tag{8.1}$$

où $S(p, 0) = 0$ *par convention.*

8.0.3 Probabilités sur un univers fini

[redacted]***Exercice 8.0.8***[redacted] ♡ [redacted]

Il y a une chance sur trois pour que l'équipe d'Allemagne soit en finale à la coupe du monde de football, une chance sur deux pour que ce soit celle du Brésil et onze chance sur quinze pour qu'une des deux soit en finale. Quelle est la probabilité pour que la finale oppose le Brésil et l'Allemagne ?

[redacted]***Exercice 8.0.9***[redacted] ♡ [redacted]

On considère le mot ATTACHANT.

1. *Combien y a t'il d'anagrammes de ce mot ?*
2. *On tire au hasard et sans remise quatre lettres de ce mot. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot CHAT avec les lettres obtenues ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir directement le mot CHAT ?*
4. *Même question en tirant avec remise.*

[redacted]***Exercice 8.0.10***[redacted] ♡ [redacted]

Dans une loterie sont vendus n *tickets dont* g *sont gagnants. Georges achète* k *tickets. Quelle est la probabilité pour que Georges ait au moins un ticket gagnant ?*

[redacted]***Exercice 8.0.11***[redacted] ♡ [redacted]

On considère un jeu de 32 *cartes et on en tire* 5 *au hasard sans remise.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir une seule paire ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan ?*
4. *Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?*
5. *Quelle est la probabilité d'obtenir un full ?*
6. *Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur ?*
7. *Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte (c'est-à-dire cinq cartes consécutive par forcément de la même couleur) ?*
8. *Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte flush (c'est-à-dire cinq cartes consécutive de la même couleur) ?*
9. *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?*

[redacted]***Exercice 8.0.12***[redacted] ♡ [redacted]

Dans mon trousseau de clés il y a 8 *clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :*

1. *du premier coup ?*
2. *au troisième essai ?*
3. *au cinquième essai ?*
4. *au huitième essai ?*

[redacted]***Exercice 8.0.13***[redacted] ♡ [redacted]

On range 20 *livres au hasard sur une étagères. Quelle est la probabilité que les* 7 *tomes d'Harry Potter :*

1. *se retrouvent côtes à côtes ?*
2. *se retrouvent côtes à côtes et dans l'ordre ?*

[redacted]***Exercice 8.0.14***[redacted] ♡ [redacted]

Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. *Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.*
2. *Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?*

[redacted]***Exercice 8.0.15***[redacted] ♡ [redacted]

Un tiroir contient 10 *paires de chaussettes. On tire* 4 *chaussettes parmi ces* 20*. Quelle est la probabilité :*

1. *de tirer deux paires ?*
2. *de tirer au moins une paire ?*
3. *de tirer exactement une paire ?*

[redacted]***Exercice 8.0.16***[redacted] ♡ [redacted]

Un restaurateur vend 100 *pizzas à* 100 *clients différents mais parmi celles-ci* 20 *sont avariées. Vaut-il mieux être le premier client, le deuxième, ..., le dernier ?*

[redacted]***Exercice 8.0.17***[redacted] ♡ [redacted]

Dans une course de 20 *chevaux, quelle est la probabilité :*

1. *de gagner le tiercé dans l'ordre ?*
2. *de le gagner dans le désordre ?*
3. *de ne pas gagner ?*

[redacted]***Exercice 8.0.18***[redacted] ♡ [redacted]

Une urne contient n *boules numérotées* ($n \geqslant 1$)*. On tire deux boules sans remise.*

1. *Quelle est la probabilité que deux boules sortent dans l'ordre de leur numéro.*
2. *Calculer la probabilité pour que ces numéros soient consécutifs.*

Exercice 8.0.19 ♡

Un tournoi d'échec réuni n joueurs d'un club A *et n joueurs d'un autre club* B. *Chaque joueur effectue un et un seul match. On effectue un tirage au sort qui doit décider des n affrontements qui s'effectueront dans l'ordre du tirage.*

1. *Quelle est la probabilité p_n que les n joueurs de l'équipe* A *soient opposés aux n joueurs de l'équipe* B *?*
2. *Quelle est la probabilité q_n qui les n joueurs de l'équipe* A *jouent entre eux ?*
3.

Exercice 8.0.20 ♡

Une entreprise décide de classer 20 *personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-æquo ; avec exactement* 2 *ex-æquo ?*

Exercice 8.0.21 ♡

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 *pantalons dont* 2 *noirs,* 6 *tee-shirt dont* 4 *noirs,* 8 *paires de chaussettes, dont* 5 *paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.*

Exercice 8.0.22 ♡

Si 30 *personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait* 2 *bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)*

Exercice 8.0.23 ♡

Un QCM comporte 10 *questions, pour chacune desquelles* 4 *réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins* 6 *fois correctement ?*

Exercice 8.0.24 ♡

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, *Barnabé :* 50%, *Charles :* 90%, *quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?*

Exercice 8.0.25 ♡

Lors d'une loterie de Noël, 300 *billets sont vendus aux enfants de l'école ;* 4 *billets sont gagnants. J'achète* 10 *billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?*

Exercice 8.0.26 ♡

On lance deux dés à 6 faces. Décrire l'ensemble Ω *des résultats possibles et la probabilité* P *associée à cette expérience. Donner la probabilité d'obtenir :*

1. *un double,*
2. *au plus un nombre pair,*
3. *exactement un nombre pair,*
4. *deux nombres qui se suivent.*

Exercice 8.0.27 ♡

Au loto, on choisit 6 numéros principaux, qui sont 6 nombres différents entre 1 et 49, et un numéro complémentaire, qui est un nombre entre 1 et 49 différent des 6 précédents. Quelle est la probabilité d'avoir :

1. *les six bons numéros principaux ?*
2. *cinq bons numéros parmi les 6 principaux ?*
3. *cinq bons numéros parmi les principaux et le bon numéro complémentaire ?*

Exercice 8.0.28 ♡

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. *Quelle est la probabilité* P(A) *pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?*
2. *Quelle est la probabilité* P(B) *pour que André danse avec son épouse ?*
3. *Quelle est la probabilité* P(C) *pour que André et René dansent avec leur épouse ?*
4. *Quelle est la probabilité* P(D) *pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?*

Exercice 8.0.29 ♡

Une urne contient une boule rouge, trois boules vertes et seize boules blanches. La boule rouge permet de gagner 10 euros, chaque boule verte permet de gagner 5 euros et les boules blanches ne rapportent rien. Un joueur tire simultanément cinq boules. Quelle est la probabilité pour que ce joueur gagne exactement 10 euros ?

Exercice 8.0.30 ♡

On lance trois dés non pipés. On note le nombre de points (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) qui apparaît sur la face supérieure de chaque dé. Calculer la probabilité d'avoir :

1. *trois 3,*
2. *deux 2 et un 1,*
3. *un 1, un 3, un 5,*
4. *la somme des points égale à 9,*
5. *la somme des points égale à 10.*

Remarque : Ces calculs ont été effectués à l'origine par Galilée pour expliquer la différence entre 4. et 5.

Exercice 8.0.31 ♡

Expliquer pourquoi lorsqu'on jette trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 alors que ces deux sommes sont obtenues de six façons différentes chacune.

Exercice 8.0.32 ♡

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

1. Les deux bottes soient les siennes.
2. Les deux bottes forment une paire (une paire est la réunion d'un pied droit et d'un pied gauche).
3. Les deux bottes soient deux pieds droits.
4. Les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

[redacted] Exercice 8.0.33 [redacted] ♡ [redacted]

On tire simultanément 6 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles ?

[redacted] Exercice 8.0.34 [redacted] ♡ [redacted]

Une personne lance deux dés à 6 faces et dit qu'elle a obtenu au moins un nombre pair. Quelle est la probabilité que les deux nombres obtenus soient pairs ?

[redacted] Exercice 8.0.35 [redacted] ♡ [redacted]

On considère une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires. Les boules blanches, tout comme les boules noires, sont numérotées de 1 à 5.

1. Décrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes :
   (a) On tire une à une trois boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule tirée.
   (b) On tire une à une trois boules de l'urne sans remettre les boules tirées.
   (c) On tire une à une les boules de l'urne sans les remettre après chaque tirage et ce jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boule dans l'urne.
   (d) On tire une à une les boules de l'urne. Si la boule tirée est blanche, on la remet. Sinon, on ne la remet pas.
2. On considère l'expérience « on tire simultanément deux boules de l'urne ».
   (a) Décrire l'univers des possibles pour cette expérience.
   (b) Décrire les événements A : « il y a plus de boules blanches que de boules noires » et B : « les boules blanches tirées ont toutes un numéro pair ». Décrire ensuite l'événement $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$.

[redacted] Exercice 8.0.36 [redacted] ♡ [redacted]

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.

1. On en tire k simultanément. Quelle est la probabilité de tirer la boule numéro i (avec $k, i \in [\![1, n]\!]$.
2. On tire k boules successivement sans remise.
   (a) Quelle est la probabilité de tirer la boule i à une rang r donné (avec $r \in [\![1, k]\!]$) ?
   (b) Quelle est la probabilité de tirer la boule numéro i (avec $i \in [\![1, n]\!]$)

[redacted] Exercice 8.0.37 [redacted] ♡ [redacted]

On lance 5 dés non pipés à 6 faces. Donner la probabilité :

1. d'avoir 5 numéros différents ;
2. d'avoir au moins un multiple de 3.
3. d'avoir au moins deux faces identiques.
4. que le produit des chiffres obtenus soit pair.
5. que la somme des chiffres obtenus soit paire.
6. d'avoir au moins un multiple de 3 et au moins un nombre pair.

[redacted] Exercice 8.0.38 [redacted] ♡ [redacted] Problème de casting [redacted]

Dans un studio de cinéma, un « casteur » doit rapidement trouver le meilleur candidat pour un rôle. Il y a n candidats possibles qui se présentent dans un ordre quelconque.

1. Quelle est la probabilité que le meilleur candidat se présente à la $k$ième position ($k \in [\![1, n]\!]$).
2. Pour éviter de faire passer tous les candidats, le casteur utilise la stratégie suivante. Il choisit un entier $m \in [\![1, m-1]\!]$ puis :
   - il fait passer d'abord m candidats qu'il refuse systématiquement.
   - il auditionne ensuite les autres candidats et prend le premier des candidats qui est meilleur que les m premiers. S'il n'en trouve aucun, il prend le dernier candidat.

   (a) Quelle est la probabilité que le casteur choisisse le meilleur des candidats et que celui-ci se présente en $k$ième place (pour $k \in [\![m+1, n]\!]$) ?
   (b) En déduire la probabilité $p_n(m)$ que le casteur choisisse le meilleur des candidats sous forme d'une somme.
   (c) On fait tendre n vers $+\infty$ en gardant m/n constant. Démontrer que $p_n(m)$ admet une limite. Représenter graphiquement cette limite en fonction de m/n et faire une proposition pour la valeur optimale de m/n.

[redacted] Exercice 8.0.39 [redacted] ♡ [redacted] Oral CCP MP 2015 [redacted]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathscr{P}(\mathrm{E}))^2$ tels que $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathscr{P}(\mathrm{E}))^2$ tels que $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in (\mathscr{P}(\mathrm{E}))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C} = \mathrm{E}$. .

[redacted] Exercice 8.0.40 [redacted]

Un fabricant de chaussettes en produit n paires qu'il assemble au hasard dans des boites contenant deux chaussettes sans prendre garde au pieds gauches et droits.

1. Calculer la probabilité p_n que toutes les boites possèdent une chaussette gauche et une droite.
2. Calculer la probabilité q_n que toutes les boites soient constituées de deux chaussettes du même pied.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \dbinom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

4. En déduire $\lim p_n$ et $\lim q_n$.

[redacted]***Exercice 8.0.41***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place dans un sac n jetons numérotés de 1 à 100. On les tire du sac un à un et on obtient tous les nombres entiers de 1 à n dans un certain ordre. On suppose que tous les ordres possibles sont équiprobables. Nous dirons qu 'il y a « coïncidence » au rang i si le ième jeton tiré porte le numéro i.

1. *Si λ_n représente le nombre d'ordres ne comportant aucune coïncidence lorsque le nombre de jetons est n, calculer λ_1, λ_2 et λ_3.*
2. *On suppose dans cette question que $n = 4$.*
   (a) *Montrer que le nombre d'ordre ne comportant qu'une seule coïncidence est $4\lambda_3$.*
   (b) *Quel est le nombre d'ordres comportant exactement deux coïncidences ?*
   (c) *Calculer λ_4.*
3. *Montrer que si le nombre de jetons est n alors le nombre d'ordres comportant exactement i coïncidences est $\binom{n}{i}\lambda_{n-i}$ avec la convention que $\lambda_0 = 1$. En déduire la probabilité d'obtenir un ordre comportant exactement i coïncidences.*

8.0.4 Probabilités conditionnelles - Niveau I

Formule des probabilités totales

[redacted]***Exercice 8.0.42***[redacted] ♡ [redacted]

Dans une classe de 40 élèves comportant 25 filles et 15 garçons, le professeur principal décide de tirer au sort les deux délégués. Il tire un premier nom, puis un second. Quelle la probabilité que le deuxième délégué soit un garçon ?

[redacted]***Exercice 8.0.43***[redacted] ♡ [redacted]

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

[redacted]***Exercice 8.0.44***[redacted] ♡ [redacted]

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

[redacted]***Exercice 8.0.45***[redacted] ♡ [redacted]

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

[redacted]***Exercice 8.0.46***[redacted] ♡ [redacted]

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

[redacted]***Exercice 8.0.47***[redacted] ♡ [redacted]

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :
- *Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.*
- *Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.*

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. *Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.*
2. *A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.*

[redacted]***Exercice 8.0.48***[redacted] ♡ [redacted]

Aurore arrive en retard en cours avec une probabilité 1/2. Elle ne va pas en cours avec une probabilité 1/6. Aujourd'hui, le cours commence sans elle. Quelle est la probabilité qu'elle vienne aujourd'hui ?

[redacted]***Exercice 8.0.49***[redacted] ♡ [redacted]

On considère 3 urnes :

1. *la première U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.*
2. *la seconde U_2 contient 1 boules noires et 4 boules rouges.*
3. *la troisième U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.*

On tire une boule dans la première et une dans la seconde. On les place dans la troisième. On tire alors une boule de cette troisième urne, elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

[redacted]***Exercice 8.0.50***[redacted] ♡ [redacted]

On considère n boites. On place une balle dans une de ces boites avec une probabilité p, le choix de la boite étant équiprobable. On ouvre $n-1$ boites sans trouver la balle. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans la $n^{\text{ième}}$?

Formule des probabilités composées

[redacted]***Exercice 8.0.51***[redacted] ♡ [redacted]

On considère le mot ATTACHANT*.*
On tire au hasard et sans remise quatre lettres de ce mot. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot CHAT *avec les lettres obtenues ?*

[redacted]***Exercice 8.0.52***[redacted] ♡ [redacted]

Dans une loterie sont vendus n tickets dont g sont gagnants. Georges achète k tickets. Quelle est la probabilité pour que Georges ait au moins un ticket gagnant ?

[redacted]***Exercice 8.0.53***[redacted] ♡ [redacted]

On tire 5 *cartes dans un jeu de* 52 *cartes. Quelle est la probabilité qu'elles soient de* 5 *niveaux différents ?*

Formule de Bayes

[redacted]***Exercice 8.0.54***[redacted] ♡ [redacted]

$1/4$ *d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte* $1/12$ *de malades. Parmi les malades, il y a* 4 *non-vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?*

[redacted]***Exercice 8.0.55***[redacted] ♡ [redacted]

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :
Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.
Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. *Quel est le taux global de personnes soulagées ?*
2. *Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?*

[redacted]***Exercice 8.0.56***[redacted] ♡ [redacted] ***Problème de Monty-Hall*** [redacted]

Dans une fête, un forain dispose de trois verres opaques retournés sur une table. Sous un de ces verres se trouve une bille. Le forain sait lequel, mais pas ses spectateurs dont vous êtes. Vous devez trouvez sous quel verre elle se trouve.
Le jeu se déroule en trois étapes.

- *Vous choisissez tout d'abord un des trois verres.*
- *Parmi les deux restants, le forain en soulève un sous-lequel ne se trouve pas la bille.*
- *Vous pouvez alors changer votre choix.*

Quelle est la meilleure stratégie, conserver son choix ou le changer ?

[redacted]***Exercice 8.0.57***[redacted] ♡ [redacted]

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. *La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.*
2. *La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.*
3. *La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.*

[redacted]***Exercice 8.0.58***[redacted] ♡ [redacted]

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- *Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.*
- *Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.*

1. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?*
2. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?*
3. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?*
4. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?*

[redacted]***Exercice 8.0.59***[redacted] ♡ [redacted]

On considère 100 *dont 25 sont pipés. Pour ces derniers la probabilité d'obtenir* 6 *est* $1/2$*. On choisit un dés au hasard, on le lance et on obtient* 6*. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?*

[redacted]***Exercice 8.0.60***[redacted] ♡ [redacted]

On considère 3 *classes* C_1, C_2 *et* C_3 *avec des effectifs respectifs de* 20, 30 *et* 50 *élèves. Les taux de réussite respectifs de ces classes sont* $1/2$, $1/3$ *et* $1/4$*. Un élève a réussi. Quelle est la probabilité qu'il vienne de* C_2*.*

[redacted]***Exercice 8.0.61***[redacted] ♡ [redacted]

Un sac contient 3 *jetons. Un de ces jetons a deux faces noirs, un autre deux blanches et un troisième une face et une face blanche. On tire on hasard un jeton du sac. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait deux faces noires.*

[redacted]***Exercice 8.0.62***[redacted] ♡ [redacted] ***Les canards aux hormones*** [redacted]

Un éleveur de canard élève trois races différentes : le canard de Barbarie (30%), le canard Nantais (20%) et le canard Mulard (50%). Suite à divers traitements hormonaux accélérateurs de croissance (utilisés sur plusieurs générations de volailles), certains animaux n'ont qu'une seule patte : 10% des canards de Barbarie, 2% des canards Nantais et 25% des canards Mulard. On choisit un canard au hasard.

1. *Quelle est la probabilité qu'il n'ait qu'une seule patte ?*
2. *Sachant qu'il n'a qu'une seule patte, quelle est la probabilité que ce soit un canard Mulard ? un canard Nantais ?*

[redacted]***Exercice 8.0.63***[redacted] ♡ [redacted]

On a décelé dans une certaine population une probabilité de 0,01 pour qu'un enfant soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un enfant qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est de 0,9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive au test est de 0,95.
Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard ait une réaction positive au test ? Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

[redacted]***Exercice 8.0.64***[redacted] ♡ [redacted]

Les ampoules de la marque X sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit $2n$ *ampoules et l'usine B produit* n *ampoules (où* $n \geqslant 1$ *est un entier). On tire une une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.*

1. *Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?*
2. *Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?*

[redacted]***Exercice 8.0.65***[redacted] ♡ [redacted]

Il y a 5% *de daltoniens chez les hommes et* $0,25\%$ *chez les femmes. Il y a* 48% *d'hommes et* 52% *de femmes dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'un daltonien soit un homme ?*

Remarque : la forme la plus courante du daltonisme est génétique, due à un gène récessif porté par le chromosome X. Un homme (XY) est daltonien dès que le chromosome X porte ce gène. Une femme (XX) n'est daltonienne que si les 2 chromosomes X portent ce gène. Ceci explique les taux très différents chez les hommes et les femmes.

[redacted]***Exercice 8.0.66***[redacted] ♡ [redacted]

Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

[redacted]***Exercice 8.0.67***[redacted] ♡ [redacted]

Une entreprise produit des objets sur deux chaînes de montage A *et* B*. La chaîne* A *produit* 60% *des objets et* B *en produit donc* 40%.
La probabilité qu'un objet soit défectueux est 0.1 *s'il est issu de la chaîne* A *et de* 0.2 *s'il est issu de la chaîne* B*. Les défauts sont indépendants d'un objet à l'autre et d'une chaîne à l'autre. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. Il est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne* A.

Événements indépendants

[redacted]***Exercice 8.0.68***[redacted] ♡ [redacted]

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% *? Même question pour être sûr à* 90%.

[redacted]***Exercice 8.0.69***[redacted] ♡ [redacted]

La famille Potter comporte 2 *enfants ; les événements* A *: «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et* B *: «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ? Même question si la famille Potter comporte* 3 *enfants. Généraliser.*

[redacted]***Exercice 8.0.70***[redacted] ♡ [redacted]

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p *la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à* q *la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.*
Le trimoteur peut voler si le moteur central ou *les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique :* $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

[redacted]***Exercice 8.0.71***[redacted] ♡ [redacted]

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A *est* p *donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie* B *avec une probabilité* q *donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?*

[redacted]***Exercice 8.0.72***[redacted] ♡ [redacted]

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

[redacted]***Exercice 8.0.73***[redacted] ♡ [redacted]

Montrer qu'un événement presque impossible (c'est-à-dire de probabilité nulle) dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *est indépendant de tout autre événement.*

[redacted]***Exercice 8.0.74***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *et* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_5 \in \mathscr{T}$ *des événements mutuellement indépendants. Simplifier l'expression de :*

1. $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_3}(\mathrm{A}_1)$;
2. $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_4}(\mathrm{A}_3)$;
3. $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_3)$;
4. $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_4 \cap \mathrm{A}_5}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$.

8.0.5 Univers, tribu, probabilité, espace probabilisé

[redacted]***Exercice 8.0.75***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$*. Donner la plus petite tribu* $\mathscr{T}$ *sur* Ω *contenant :*

1. $\{a\}$.
2. $\{a\}$ *et* $\{b\}$.

[redacted]***Exercice 8.0.76***[redacted] ♡ [redacted] ***Tribu induite sur une partie d'un ensemble*** [redacted]

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ *un espace probabilisable et* $\mathrm{B} \subset \Omega$*. On considère* $\mathscr{T}' = \left\{\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \mid \mathrm{A} \in \mathscr{T}\right\}$*. Montrer que* $\left(\mathrm{B}, \mathscr{T}'\right)$ *est un espace probabilisable.*
La tribu $\mathscr{T}'$ *est appelée* tribu induite de $\mathscr{T}$ sur B.

[redacted]***Exercice 8.0.77***[redacted] ♡ [redacted]

Soit Ω *un ensemble infini.*

1. *Soit* $\mathscr{T} = \left\{\mathrm{A} \subset \Omega \mid \mathrm{A} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}} \text{ est au plus dénombrable}\right\}$*. Démontrer que* $\mathscr{T}$ *est une tribu sur* Ω.

2. *Démontrer que* $\mathscr{U} = \left\{ \mathrm{A} \subset \Omega \mid \mathrm{A} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}} \text{ est fini} \right\}$ *n'est pas une tribu. On remarque que l'ensemble* $\mathscr{U}$ *est stable par union et intersection finie sans être pour autant une tribu ce qui justifie la nécessité du deuxième axiome des tribus.*

Exercice 8.0.78 ♡ ***Une intersection de tribus est une tribu***

Soit Ω *un ensemble. Montrer qu'une intersection de tribus sur* Ω *est encore une tribu sur* Ω.

Exercice 8.0.79 ♡

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ *un espace probabilisable. Traduire en notations ensemblistes les événements suivants :*

1. *L'un au moins des événements* A, B *ou* C *est réalisé.*
2. *L'un et seulement l'un des événements* A *et* B *est réalisé.*
3. *Les deux événements* A *et* B *sont réalisés et* C *ne l'est pas.*
4. *Tous les événements* A_n *pour* $n \geqslant 1$ *sont réalisés.*
5. *L'un au moins des événements* A_n *pour* $n \geqslant 1$ *est réalisé.*
6. *Une infinité d'événements parmi les événements* A_n, $n \geqslant 1$ *sont réalisés.*
7. *Seul un nombre fini des événements* A_n, $n \geqslant 1$ *est réalisé.*
8. *Une infinité d'événements parmi les événements* A_n, $n \geqslant 1$ *ne sont pas réalisés.*
9. *Tous les événements* A_n, $n \geqslant 1$ *sont réalisés à partir d'un certain rang.*

Exercice 8.0.80 ♡ ***Limite supérieure et inférieure d'événements***

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements.*

1. *Décrire* $\mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} \mathrm{A}_m \right)$ *et* $\mathrm{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} \mathrm{A}_m \right)$ *en langage courant.*
2. *Démontrer que ce sont des événements et que* $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$.

L'événement B *est la* limite inférieure *de* (A_n) *et* C *est sa* limite supérieure.

Exercice 8.0.81 ♡

On considère l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{array} \right.$$

et on pose $\mathscr{C} = \left\{ \Phi^{-1}(\mathrm{B}) \mid \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \right\}$.
Montrer que $\mathscr{C}$ *est une tribu de parties de* $\mathbb{N}$ *strictement incluse dans* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 8.0.82 ♡

Soit A *un événement et* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille dénombrable d'événements d'une tribu* $\mathscr{A}$ *sur* Ω.

1. *Montrer que :*

   (a) $\mathrm{A} \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}_n)$;

   (b) $\mathrm{A} \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n)$.

2. *Montrer que :*

   (a) *que* $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\mathrm{B}_n}$;

   (b) $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{\mathrm{B}_n}$.

Exercice 8.0.83 ♡

Soit $\Omega = [0,1]$. *On suppose qu'il existe une tribu* $\mathscr{T}$ *sur* Ω *contenant tous les segments* $[a, b]$ *pour* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

1. *Montrer que* $\mathscr{T}$ *contient tous les intervalles ouverts* $]a, b[$ *pour* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ *et tous les singletons* $\{\alpha\}$ *avec* $\alpha \in [0,1]$.
2. *On suppose que* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *est un espace probabilisé tel que si* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ *alors* $\mathrm{P}([a,b]) = b - a$. *Déterminer* $\mathrm{P}(]a,b[)$ *et* $\mathrm{P}(\{\alpha\})$ *pour* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ *et* $\alpha \in [0,1]$.

Exercice 8.0.84 ♡ ***Événement presque impossible, événement presque certain***

Un événement est dit presque impossible *s'il est de probabilité* 0 *et il il est dit* presque certain *s'il est de probabilité* 1.

1. *Montrer qu'une union finie ou dénombrable d'événements presque impossibles est presque impossible.*
2. *Montrer qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements presque certains est presque certaine.*

Exercice 8.0.85 ♡

Les fonctions suivantes, définies sur les singletons, se prolongent-elles en une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

1. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^k}$;
2. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\{k\}) = \sin\left(\frac{1}{k}\right)\sqrt{1+k}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 8.0.86 ♡

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et soit* (A_n) *une suite d'événements de* $\mathscr{T}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k \right)$;
2. *Montrer que* $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k \right)$;

Exercice 8.0.87

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et soit* (A_n) *une suite d'événements telle que* $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ *est convergente.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $\mathrm{D}_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \mathrm{A}_k$ *et* $\mathrm{A} = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathrm{D}_n$.
Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{D}_n) = 0$. *En déduire que* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

8.0.6 Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 8.0.88 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1. *Montrer qu'on définit ainsi une probabilité sur* $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.
2. *Calculer la probabilité de l'événement* $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 10\}$.
3. *Calculer la probabilité de l'événement* B *des entiers impairs.*

Exercice 8.0.89 ♡

On lance une infinité de fois un dé tétraédrique parfait dont les faces sont numérotées de 1 *à* 4*.*
On note A_n *l'événement « avant le nième tirage, le* 4 *est sorti au moins une fois ».*
Quelle est la probabilité de l'événement « le 4 *sortira au moins une fois ».*

Exercice 8.0.90 ♡

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir $n \in \mathbb{N}^*$ *vaut* $\dfrac{1}{2^n}$.

1. *Vérifier qu'on définit ainsi bien une probabilité sur* $\mathbb{N}^*$.
2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, on note* A_k *l'événement «* n *est un multiple de* k *».* exo_proba_loi_de_zipf
   (a) *Donner la probabilité de l'événement* A_k *pour* $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) *Donner la probabilité de l'événement* $\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3$.
3. *On note* B *l'événement «* n *est un nombre premier ». Montrer que*

$$\frac{13}{32} < \mathrm{P}(\mathrm{B}) < \frac{34}{63}.$$

Exercice 8.0.91 ♡

On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$*, on note* A_i *l'événement « on obtient un as au ième lancer ».*

1. *Décrire par une phrase ne contenant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :*
   (a) $\mathrm{E}_1 = \bigcap_{i=4}^{+\infty} \mathrm{A}_i$; (b) $\mathrm{E}_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{\mathrm{A}_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} \mathrm{A}_i\right)$; (c) $\mathrm{E}_3 = \bigcup_{k>3} \mathrm{A}_k$.
2. *Écrire à l'aide des* A_i *l'événement « On obtient au moins une fois l'as au delà du nième lancer ».*
3. *On pose* $\mathrm{C}_n = \bigcup_{i>n} \mathrm{A}_i$. *Montrer que la suite* (C_n) *est décroissante (au sens de l'inclusion). Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement* $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{C}_n$.
4. *Écrire à l'aide des* A_i *les événements :*
   (a) B_n *donné par « On n'obtient plus que des as à partir du nième lancer ».*
   (b) B *donné par « On n'obtient plus que des as à partir d'un certain lancer ».*

Exercice 8.0.92 ♡

Adèle et Valentine lancent à tour de rôle le même dé cubique parfait. Adèle joue en premier. Le vainqueur est le premier qui obtient un 6*.*
On considère les événements A *donné par « Adèle gagne la partie » et* B *par « Valentine gagne la partie ». Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* S_n *l'événement « le* 6 *sort au nème lancer » et l'événement* F_n *donné par « la partie se termine au nième lancer ».*

1. *Indiquer l'univers lié à cette expérience aléatoire.*
2. *Exprimer* A *et* B *à l'aide des* F_n*, puis des* S_n.
3. *Calculer la probabilité de l'événement* F_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
4. *En déduire la probabilité de* A *et de* B.
5. *Soit* D *l'événement « il n'y a pas de vainqueur ». Quelle est sa probabilité ? Est-ce l'événement impossible ?*

Exercice 8.0.93 ♡ ***Fonction* ζ *de Riemann et loi de Zipf***

Pour $a \in]1, +\infty[$*, on note* $\zeta(a)$ *la somme de la série de Riemann convergente* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a}$. *On définit ainsi une fonction* $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ *appelée* fonction zêta de Riemann. *On définit alors une probabilité* P_a *sur* $\mathbb{N}^*$ *en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_a(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a) n^a}.$$

Cette probabilité est appelée loi de Zipf de paramètre a.

1. *Calculer* $\mathrm{P}_a(2\mathbb{N}^*)$;
2. *En déduire* $\mathrm{P}_a(m\mathbb{N}^*)$ *pour* $m \in \mathbb{N}^*$.
3. *Donner une condition suffisante sur les entiers* i *et* j *pour que* A_i *et* A_j *soient indépendantes.*
4. *Application : on note* p_i *le ième nombre premier (avec* $i \in \mathbb{N}^*$*, on a donc* $p_1 = 2$, $_2 = 3$*, ...) et* C_n *l'ensemble des entiers divisibles par aucun des nombres premiers* p_i *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$.
   (a) *Calculer* $\mathrm{P}_a(\mathrm{C}_n)$
   (b) *Déterminer* $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{C}_n$.
   (c) *En déduire le développement eulérien de la fonction* ζ *:*

$$\forall a > 1, \quad \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{p_i^a}\right)\right)^{-1}.$$

[redacted]**Exercice 8.0.94**[redacted] ♡ [redacted]

On pose $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on fixe $c \in]0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}(\{k\}) = \mathrm{A}_c \dfrac{c^k}{k!}$.
Déterminer le nombre A_c pour que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ soit un espace probabilisé et calculer la probabilité de l'ensemble $\mathcal{I}$ des entiers naturels impairs.

[redacted]**Exercice 8.0.95**[redacted] ♡ [redacted] **Le paradoxe du singe savant** [redacted]

Un singe immortel passe son temps à taper sur une machine à écrire, choisissant chaque touche au hasard et indépendamment des autres. Montrer que la probabilité qu'il tape le texte de « Ȟamlet » est égale à 1 (On considérera que le singe n'utilise que 75 caractères).

[redacted]**Exercice 8.0.96**[redacted] ♡ [redacted]

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu.

1. *Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son nième lancer ?*
2. *Quelle est la probabilité pour que A gagne ?*
3. *Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?*
4. *Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?*

[redacted]**Exercice 8.0.97**[redacted] ♡ [redacted]

On effectue une suite de lancers sur une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers le résultat Pile n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. *Calculer p_1, p_2 et p_3. Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a :*
$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2} + \frac{1}{8}p_{k-3}.$$
2. *Montrer que la suite (p_k) est une combinaison linéaire de trois suites géométriques que l'on précisera.*
3. *En déduire la convergence et la limite de la suite (p_k). Donner une interprétation du résultat obtenu.*

[redacted]**Exercice 8.0.98**[redacted] ♡ [redacted] **Oral HEC** [redacted]

On lance n pièces de monnaie. La probabilité que la kième pièce amène Pile est $\dfrac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de Piles ?

[redacted]**Exercice 8.0.99**[redacted] ♡ [redacted]

Deux joueurs de rugby décident de faire un cours de tentative de drops. La probabilité que le joueur A réussisse un drop est constante égale à $2/3$. La probabilité que le joueur B réussisse un drop est constante égale à $1/2$. Les deux joueurs tirent à tout de rôle. Le joueur B commence et le premier qui marque a gagné. Quel est le joueur qui a le plus de chance de gagner ?

[redacted]**Exercice 8.0.100**[redacted] ♡♡♡ [redacted] **T.P.E. - P.C. 2015** [redacted]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la probabilité de tirer l'entier n comme étant égale à $\frac{1}{2^n}$.

1. *Montrer que l'on définit bien une probabilité.*
2. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'événement « l'entier n tiré est un multiple de k ». Exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ en fonction de k.*
3. *Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3)$.*
4. *On note B l'événement « L'entier tiré est un nombre premier ». Montrer que l'on a l'encadrement $\frac{13}{32} < \mathrm{P}(\mathrm{B}) < \frac{209}{504}$.*

[redacted]**Exercice 8.0.101**[redacted] ♡♡♡ [redacted]

Soit $a \in]1,+\infty[$. On définit le réel $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

1. *Démontrer que l'on peut définir une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ en posant $p_k = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$.*
2. *On se place dans toute la suite dans l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathrm{P})$.*
   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{M}_n = \{kn\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{M}_n)$.*
   (b) *Soient i et j dans $\mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M_i et M_j soient indépendants.*
   (c) *On note p_i le i^e nombre premier de sorte que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. On note S_n l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ divisibles par aucun des nombres premiers $p_1, \dots, p_n$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n)$.*
   (d) *Déterminer l'événement $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{S}_n$.*
   (e) *En déduire le développement Eulérien de la fonction zeta de Riemann*
$$\forall a > 1, \qquad \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

[redacted]**Exercice 8.0.102**[redacted] ♡♡ [redacted]

Fixons $p \in]0,1[$. Deux personnes A et B jouent : A lance deux fois une pièce équilibrée, et B ne lance qu'une fois une pièce qui amène pile avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de piles. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. *Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?*
2. *Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au premier tour ?*
3. *Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?*
4. *Calculer la probabilité que le jeu ne se termine pas.*
5. *Existe-t-il p tel que le jeu soit équitable ?*

[redacted]**Exercice 8.0.103**[redacted] ♡ [redacted]

Sot $a \in]0,1[$. On note p_k, la probabilité qu'une famille ait exactement k enfants. Nous supposons que $p_0 = p_1 = a$ et que $p_k = \frac{1-2a}{2^{k-1}}$ lorsque $k \geqslant 2$. On considère les événements suivants :

E_n : « La famille a n enfants exactement ».
F_n : « La famille a n filles exactement ».
G_n : « La famille a n garçons exactement ».

1. *Montrer que*
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$
2. *Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux filles exactement ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'une famille ayant deux filles exactement n'ait que deux enfants ?*
4. *Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles ?*

Exercice 8.0.104 ♡

Un joueur lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

1. *Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?*
2. *Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu le premier pile au n^e lancer ?*

Exercice 8.0.105 ♡♡

Deux joueurs a et b lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur a commence et la pièce amène face avec le probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. *Quelle est la probabilité de a gagne lors de son n^e lancer ?*
2. *Quelle est la probabilité de a gagne ?*
3. *Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?*
4. *Y a-t-il une valeur de p qui assure que le jeu soit équitable ?*

Exercice 8.0.106 ♡

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathrm{P}(\{n\}) = \frac{a}{n(n+1)}$.

1. *Déterminer les nombres réels a pour que $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathrm{P})$ soit un espace probabilisé.*
2. *Calculer alors la probabilité de événement $\mathrm{A} = \{2p+1\ ;\ p \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 8.0.107 ♡

On note $\Omega = \mathbb{N}$ et on pose $\mathrm{P}(\{n\}) = \frac{a}{2^n}$.

1. *Déterminer les nombres réels a pour que $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{P})$ soit un espace probabilisé.*
2. *Calculer alors la probabilité de événement $\mathrm{A} = \{2p+1\ ;\ p \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 8.0.108 ♡♡

On considère une suite infinie d'urnes $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 2}$ contenant chacune des boules de couleur noire et blanche. L'expérience consiste à extraire de chaque urne une boule, en commençant par l'urne numéro 2, puis la 3, etc, jusqu'à obtenir une boule noire. On considère les événements suivants ($n \geqslant 2$) :
• A *: « on ne tire jamais de boule noire ».*
• A_n *: « les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches ».*

1. *Quelle est la particularité de la suite d'événement $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 2}$?*
2. *Exprimer l'événement A en fonction de A_n.*
3. *On suppose que, pour tout $n \geqslant 2$, l'urne numéro n contient n boules dont une seule est noire. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ puis la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A})$.*
4. *On suppose que, pour tout $n \geqslant 2$, l'urne numéro n contient n^2 boules dont une seule est noire. Montrer par récurrence que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \frac{n+1}{2n}$. En déduire le calcul de la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A})$.*

Exercice 8.0.109 ♡♡

Une pièce de monnaie est telle que, quand on la lance, la coté pile apparaît avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et le coté face avec la probabilité $\frac{1}{3}$. L'expérience consiste à effectuer des lancers successifs jusqu'à ce que les deux cotés de la pièces soient apparus.

1. *Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de l'événement A_n : « l'expérience s'arrête à l'issue du n^e lancer ».*
2. *Calculer la probabilité que l'expérience ne dépasse pas 10 lancers.*
3. *Construire un système complet d'événements à partir des événement A_n où $n \geqslant 2$.*
4. *Calculer la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.*
5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « le même coté est apparu au cours des n premiers lancers ». Étudier la monotonie de $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Retrouver la probabilité que l'expérience ne s'arrête jamais.*

Exercice 8.0.110 ♡♡

Trois joueurs A, B *et* C *effectuent une partie de dé selon les règles suivantes :*
• A *qui lance le premier, gagne lorsqu'il obtient* 6.
• B *qui lance en second, gagne lorsqu'il obtient* 5 *ou* 4.
• C *qui lance en troisième, gagne lorsqu'il obtient* 1, 2 *ou* 3.
On note A *(respectivement* B *et* C*) l ?événement « le joueur* A *gagne » (respectivement* B *et* C*). La partie cesse lorsque l'un des trois joueurs gagne. Calculer* $\mathrm{P}(\mathrm{A})$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{C})$. *On note que les lancers sont indépendants.*

8.0.7 Conditionnement et dépendance - Niveau II

Exercice 8.0.111 ♡

On tire au hasard un nombre n dans $[\![1,4]\!]$ puis un nombre k entre 1 et n. Quelle est la probabilité de l'événement B_j donné par « le dernier nombre tiré est j » où $j \in [\![1,4]\!]$?

Exercice 8.0.112 ♡

On lance un dé parfait de 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire. Calculer p_1, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n puis en déduire p_n.

Exercice 8.0.113 ♡

Un famille comporte deux enfants.

1. *L'un d'entre eux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*

2. *L'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*
3. *Lorsqu'on sonne à la porte de la maison de cette famille, on sait que les parents ont l'habitude de choisir au hasard celui des deux enfants qui va aller ouvrir la porte. Un garçon vient ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?*

[redacted]**Exercice 8.0.114**[redacted] ♡ [redacted]

On considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. *Quelle est la probabilité que la $(m+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les m précédentes l'étaient toutes ?*
2. *Que devient cette probabilité quand $n \to +\infty$?*

[redacted]**Exercice 8.0.115**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, ..., U_n. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

1. *On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?*
2. *On choisit une urne au hasard et on tire une boule. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la boule dans l'urne U_k ($k \in [\![0,n]\!]$) ?*
3. *On choisit une urne au hasard et on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches ?*
4. *Reprendre la question précédente en supposant que le tirage se fait sans remise.*

[redacted]**Exercice 8.0.116**[redacted] ♡ [redacted]

On met en vente 50 enveloppes mystères. Chaque joueur ouvre l'enveloppe immédiatement après l'avoir achetée et découvre s'il a gagné ou non. Une seule des enveloppes est gagnante. Préférez-vous être le 1^er^ acheteur ? le 2^ème^ ? le 3^ème^ ? Quel acheteur préférez-vous être ?

[redacted]**Exercice 8.0.117**[redacted] ♡ [redacted]

Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons nommées A et B. À l'instant 0, il est en A. À chaque instant, il joue au dé la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6, il change de maison, sinon il y reste. On définit les événements A_n« le promeneur est en A à l'instant n » et B_n « le promeneur est en B à l'instant n ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ et $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$.

1. *Établir une relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.*
2. *En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ en fonction de n.*
3. *Calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{A}_j)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et $i < j$. Les événements A_i et A_j sont-ils indépendants ?*

[redacted]**Exercice 8.0.118**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

1. *Montrer que si deux événements A et B sont indépendants alors $\overline{\mathrm{A}}$ et B, A et $\overline{\mathrm{B}}$ ainsi que $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ le sont aussi.*
2. *Soient $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que les événements $\overline{\mathrm{A}}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont aussi mutuellement indépendants.*

[redacted]**Exercice 8.0.119**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

1. *Soient A et B deux événements indépendants tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1$.*
2. *Montrer que si A est indépendant de lui-même alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1$.*
3. *Montrer que si $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1$ alors A est indépendant de tout événement. Réciproque ?*

[redacted]**Exercice 8.0.120**[redacted] ♡ [redacted]

Dans l'univers correspondant au lancer infini d'une pièce de monnaie, lesquelles de ces familles d'événements forment des systèmes complets ?

1. A *« le premier lancer a donné Pile »* et B *« le premier lancer a donné Face ».*
2. A *« le premier lancer a donné Pile »* et B *« le second a donné Face ».*
3. A *« Le premier lancer a donné Pile »,* B *« le second lancer a donné Face »* et C *« le second lancer a donné Pile ».*
4. A_i *« on a obtenu i Piles parmi les 4 premiers lancers » avec $i \in [\![1,4]\!]$.*
5. (A_n) *avec A_n « on a obtenu Face pour la première fois au lancer n » avec $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0 « aucun lancer n'a donné Face. ».*
6. (A_n) *avec A_n « le nième lancer a donné Face » avec $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0 « aucun lancer n'a donné Face. ».*

[redacted]**Exercice 8.0.121**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP MP 2015** [redacted]

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = a_n$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = b_n$ et $\mathrm{P}(\mathrm{C}_n) = c_n$.

1. (a) *Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
   (b) *Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
2. *On considère la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.

(b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

(c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 8.0.122 ♡ Oral CCP MP 2015

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 8.0.123 ♡ Oral CCP MP 2015

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 8.0.124 ♡ Oral ESCP

On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k désigne l'événement « on obtient Pile au kième lancer » et on note B_n l'événement « le nombres de Piles obtenu au cours des n lancers est pair ».

1. Déterminer les probabilités des événements A_k, $k \in [\![1, n]\!]$ et B_n.
2. Déterminer la probabilité $P_{A_1\cap\ldots\cap A_n}(B_n)$.
3. En déduire que les événements $A_1, \ldots, A_n, B_n$ ne sont pas mutuellement indépendants.
Indication 8.0 : On pourra montrer que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B_n) \neq P(A_1)\ldots P(A_n)P(B_n)$.
4. Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n, B_n$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 8.0.125 ♡ CCP MP 2015 - Sujet 0 - Matrice de transition

On note la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Démontrer que la matrice A est diagonalisable et en déduire l'expression, pour tout entier naturel n de la matrice A^n.
   (b) On considère trois suites de réels (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + w_n \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \end{cases}.$$

   Déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

2. Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :
— si à l'instant n, il est sur A alors à l'instant $n+1$, il est sur B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ ou sur C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
— si à l'instant n, il est sur B alors à l'instant $n+1$, il est sur A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ ou sur C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
— si à l'instant n il est sur C alors à l'instant $n+1$, il est sur B
On note A_n l'évènement « le mobile se trouve en A à l'instant n », B_n l'évènement « le mobile se trouve en B à l'instant n » et C_n l'évènement « le mobile se trouve en C à l'instant n ».
Enfin le mobile commence son trajet en partant du point A. On note, pour tout entier naturel n : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
   (a) Justifier que $P(C_2) = \frac{3}{16}$.
   (b) Déterminer, en les justifiant, des relations de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.
   (c) Déterminer la limite en l'infini des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice 8.0.126 ♡♡♡♡

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$*. On note*

$$\limsup \mathrm{A}_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\mathrm{A}_k\right).$$

1. *Montrer que si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ *existe alors* $\mathrm{P}\big(\limsup \mathrm{A}_n\big) = 0$.
2. *Quelle est la probabilité qu'une infinité de* A_n *se réalisent simultanément ?*
3. *On suppose cette fois que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ *est divergente et que les événements* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont mutuellement indépendants. Montrer que* $\mathrm{P}\big(\limsup \mathrm{A}_n\big) = 1$.

Exercice 8.0.127 ♡

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$.

1. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$

2. *On suppose que la série* $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ *diverge. Que peut-on dire de l'événement* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ *?*