Chapitre 7

Séries entières

7.0.1 Rayon et domaine de convergence

Exercice 7.0.1 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$,
2. $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$,
3. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^2} z^{2n}$,
4. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$,
5. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$,
6. $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$.

Exercice 7.0.2 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^{n^2}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$ où $a_n = \ln \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où $a_n = \dfrac{5+(\sin n)^n}{2-\cos n}$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{E}(e^n) z^n$.

Exercice 7.0.3 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z^{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-\operatorname{sh}^a n} z^n$, $a \in \mathbb{R}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^{2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n! z^{n^2}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n!)^{1/n}} z^n$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ *où a_n est le nombre de diviseurs de l'entier n .*

Exercice 7.0.4 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^\alpha} z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt{n^2+1} \right) z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n}{2^n+n!} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}{\ln\left(\sqrt{n}-1\right)} z^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln \frac{n^2-1}{n^2+n+2} z^n$;
6. $\displaystyle\sum_{n_geq1} \left(\sqrt{n}\right)^n z^n$.

Exercice 7.0.5 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \arctan n z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2 \operatorname{sh} n}{n(n+1)} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{5^n}{n^3+1} z^{2n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{\binom{2n}{n}}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 (1+t^2)^n \, \mathrm{d}t z^n$.

Exercice 7.0.6 ♡♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin n z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n+\sin n} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n} \sin n z^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+2n) \sin n z^n$.

Exercice 7.0.7 ♡

Soit a_n le chiffre d'indice n de l'écriture décimale de π. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Exercice 7.0.8 ♡♡

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$

1. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ *?*
2. *Même question avec* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 x^n$.

Exercice 7.0.9 ♡

Que peut-on dire du rayon de convergence R *de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *dans le cas où :*

1. *la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ;*
2. *la suite* (a_n) *est convergente ;*
3. *il existe* $k>0$ *tel que* $|a_n|\leqslant k^n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7.0.10 ♡ **Classique**

Montrer que si les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *ont toutes deux le même rayon de convergence* R *alors le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *est égal à* R.

Exercice 7.0.11 ♡♡

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes non nuls telle qu'il existe* $l_1\in\mathbb{R}$ *et* $l_2\in\mathbb{R}$ *avec :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = l_2.$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *?*

Exercice 7.0.12 ♡ **CCP 2003**

On pose :

$$a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

1. *Montrer que le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est au moins égal à* 1.
2. *Calculer* R.
3. *Étudier la convergence de la série pour* $x=\pm R$.

Exercice 7.0.13 ♡ **CCP 2013**

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ *puis* $\sum (-1)^n u_n$ *où :*

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

Exercice 7.0.14 ♡

Soit $\sum a_n$ *une série convergente.*

1. *Montrer que la suite* (a_n) *est bornée.*
2. *En déduire que la série entière* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ *a un rayon de convergence infini.*

Exercice 7.0.15 ♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose* $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$.
2. *Prouver qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.*

Exercice 7.0.16 ♡

1. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum n^\alpha z^n$.
2. *Soit une fraction rationnelle* $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X)$ *telle que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $Q(n)\neq 0$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum F(n) z^n$.

Exercice 7.0.17 ♡

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum_{n\geqslant 0} 3^n z^{2n}$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *où* $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} \left(2+(-1)^n\right) z^n$.

Exercice 7.0.18 ♡

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *et on pose pour* $x\in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *On suppose que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *converge absolument. Montrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Exercice 7.0.19 ♡

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$.

1. *Déterminer son rayon de convergence* R.
2. *On définit la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \end{array} \right.$$

Déterminer un équivalent de f *lorsque* $x\to R^-$.

Exercice 7.0.20 ♡

Soit une série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R>0$.

1. *Soit* $\alpha\in]0,1[$. *Montrer que la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{n^\alpha} z^n$ *a pour rayon de convergence* R *aussi.*

2. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 7.0.21 ♡

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R = \infty$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme.

1. Soit $r > 0$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} \, d\theta$$

2. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
3. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant P(|z|)$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 7.0.22 ♡

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} n^{\alpha} a_n z^n$ a le même rayon de convergence.

Exercice 7.0.23 ♡ **Oral CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

Exercice 7.0.24 ♡ **Oral CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

7.0.2 Calcul de la somme d'une série entière

Exercice 7.0.25 ♡ **École de l'air**

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

1. Déterminer son rayon de convergence ;
2. Calculer sa somme.

Exercice 7.0.26 ♡ **CCP 2013**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n}$.

Exercice 7.0.27 ♡ **TPE 2011 pour 9.**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n x^{n+1}$;
2. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n x^{2n+1}$;
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n+1}$;
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}$;
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$;
6. $\sum_{n\geqslant 0} (\operatorname{ch} n) x^n$;
7. $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$;
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$;
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n(2n-1)} x^n$.

Exercice 7.0.28 ♡ **CCP 2007**

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{n!}{1.3.\ldots.(2n+1)}.$$

2. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \; : (x^2 - 2) y' + xy + 2 = 0.$$

3. En déduire une expression de f.
4. Est-ce que la série $\sum a_n x^{2n+1}$ converge pour $x = \sqrt{2}$?

Exercice 7.0.29 ♡ **Type CCP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} (-1)^n x^n.$$

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par sa somme f.
3. En déduire le calcul de f.

7.0.3 Étude de la somme d'une série entière

Exercice 7.0.30 ♡

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

1. Exprimer $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f.
2. Même question avec $\sum_{n\geqslant 0} a_{3n} z^{3n}$.

[redacted]***Exercice 7.0.31***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\mathrm{R}=1$. *Pour tout* n, *on pose* $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ *et* $g(z)=\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{S}_n z^n$.

1. *Montrer que* g *a aussi un rayon de convergence* $\mathrm{R}=1$.
2. *Calculer* $g(x)$ *en fonction de* $f(x)$ *pour tout* $x\in\,]-1,1[$.

[redacted]***Exercice 7.0.32***[redacted] ♡ [redacted]

On considère la fonction f *donnée par*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière définissant* f.
2. *Étudier la convergence en* R *et en* $-\mathrm{R}$.
3. *Déterminer la limite de* $f(x)$ *quand* $x\to 1^-$.
4. *Montrer que quand* $x\to 1^-$,
$$(1-x)f(x)\to 0.$$

[redacted]***Exercice 7.0.33***[redacted] ♡ [redacted]

Pour $x\in\mathbb{R}$, *on pose*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière définissant* f.
2. *Étudier la convergence de la série entière en* 1 *er en* -1.
3. *Montrer que* f *est continue en* -1.
4. *Déterminer la limite de* f *en* 1.

[redacted]***Exercice 7.0.34***[redacted] ♡ [redacted]

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $\mathrm{R}>0$ *et de somme* $f(z)$.

1. *Montrer que pour tout* $0<r<\mathrm{R}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta$$
2. *Que dire de* f *si* $|f|$ *admet un maximum local en* 0.
3. *On suppose maintenant que* $\mathrm{R}=+\infty$ *et qu'il existe* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$ *tel que* $|f(z)|\leqslant\mathrm{P}(|z|)$ *pour tout* $z\in\mathbb{C}$. *Montrer que* $f\in\mathbb{C}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$.

[redacted]***Exercice 7.0.35***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral Centrale PSI*** [redacted]

On pose $f: x\mapsto\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$ *et* $g: x\mapsto\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

1. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières définissant ces deux fonctions.*
2. *Montrer que* g *est définie et continue sur* $[-1,1[$.
3. *Trouver une relation entre* $(1-x)f(x)$ *et* $g(x)$.
4. *Montrer que* f *est continue sur* $[-1,1[$ *et trouver des équivalents de* f *et* g *en* 1^-.

[redacted]***Exercice 7.0.36***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral Mines-Ponts PC, séries entières et intégrales de Wallis*** [redacted]

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on pose* $a_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$.
2. *Quel est l'ensemble de définition de* f *?*
3. *Déterminer* f *sur* $]-1,1[$.

[redacted]***Exercice 7.0.37***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP*** [redacted]

On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série.*
   On note D *l'ensemble des* x *où cette série converge et* $\mathrm{S}(x)$ *la somme de cette série pour* $x\in\mathrm{D}$.
2. (a) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur* D.
   (b) *La fonction* S *est-elle continue sur* D *?*

[redacted]***Exercice 7.0.38***[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP*** [redacted]

1. *Démontrer que la série* $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente pour tout* $z\in\mathbb{C}$.
2. *On pose :* $\forall\, z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.
   Démontrer que $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2$, $f(z)\times f(z')=f(z+z')$, *sans utiliser le fait que* $f(z)=e^z$.
3. *En déduire que :* $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)\neq 0$ *et* $\dfrac{1}{f(z)}=f(-z)$.

7.0.4 Continuité en une extrémité de l'intervalle de convergence

[redacted]***Exercice 7.0.39***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\mathrm{R}=1$. *Pour* $x\in\,]-1,1[$, *on définit*

$$\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

On suppose que la suite (a_n) *est à termes réels positifs et que la fonction* S *est bornée sur* $[0,1[$.

1. *Montrer que* $\sum a_n$ *est convergente.*

2. *Montrer que* $\lim_{1^-} S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 7.0.40 ♡

Soit (f_n) *la série de fonctions données par :*

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \ln(n) x^n.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum f_n$. *On note* S *sa somme.*
2. *Montrer que*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}\right).$$

3. *En déduire que* S *admet une limite en* 1^- *et que*

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

4. *Calculer cette limite en utilisant la formule de Wallis :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 7.0.41 ♡♡♡ ***Principe des zéros isolés, X 2003***

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on pose* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *lorsque* $|z| < R$.

On suppose que f *n'est pas identiquement nulle. Montrer qu'il existe un disque* D *de centre* 0 *et de rayon* $\eta > 0$ *dans* $\mathbb{C}$ *tel que :*

$$\forall z \in D \setminus \{0\}, \quad f(z) \neq 0.$$

Le résultat reste-t-il valable si on suppose seulement que f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur un voisinage de* 0 *?*

Exercice 7.0.42 ♡ ***ENS Lyon 1998***

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *On pose* $M = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$ *pour tout réel* $\rho \in [0,R[$.

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leqslant M_\rho^2.$$

2. *Montrer que si* $R = +\infty$ *et si* f *est bornée alors* f *est constante.*

7.0.5 Équivalent en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 7.0.43 ♡

Soit (a_n) *une suite réelle donnée par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \ln(1+a_n) \end{cases}.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n x^n$. *On note* S *sa somme.*
2. *Étudier la convergence de* $\sum a_n x^n$ *en* $x = -R$.
3. *Déterminer la limite de la suite* (u_n) *de terme général*

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}.$$

4. *En déduire un équivalent simple de* (a_n). *On pourra pour ce faire utiliser le théorème de Cesàro :*

> THÉORÈME 7.1 ***Théorème de Cesàro***
> *Soit* (u_n) *une suite réelle ou complexe convergeant vers une limite* l. *Alors*
>
> $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

5. *Donner un équivalent de* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *quand* $x \to R^-$.

7.0.6 Fonctions développables en séries entières

Exercice 7.0.44 ♡

Soit $a > 0$ *et* $f \in \mathscr{C}^\infty([-a,a],\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(n)}\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant AB^n n!.$$

Montrer que f *est développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en* 0.

Exercice 7.0.45 ♡

Soient $R > 0$ *et* $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Montrer la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!} x^n$ *pour* $x \in]-R,R[$.

[redacted]**Exercice 7.0.46**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ *admet un DSE de rayon de convergence* $R \geqslant 1$.

[redacted]**Exercice 7.0.47**[redacted] ♡ [redacted]

1. *Pour quels réels x l'intégrale suivante existe-t-elle :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}\,\mathrm{d}t?$$
2. *Donner alors sa valeur.*
3. *Montrer que*
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}\,\mathrm{d}t$$
est développable en série entière et exprimer ce développement.

[redacted]**Exercice 7.0.48**[redacted] ♡ [redacted]

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum n^\alpha z^n$.
2. *Soit une fraction rationnelle* $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X)$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \neq 0$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum F(n) z^n$.

[redacted]**Exercice 7.0.49**[redacted] ♡ [redacted]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n z^{2n}$.
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(2+(-1)^n\right) z^n$.

[redacted]**Exercice 7.0.50**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que $f : x \mapsto e^x \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t}$ *est DSE.*

[redacted]**Exercice 7.0.51**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP MP** [redacted]

1. *Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.*
2. *Développer en série entière au voisinage de* 0, *en précisant le rayon, la fonction* f : $x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.

[redacted]**Exercice 7.0.52**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP MP** [redacted]

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que la suite* $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite.*

1. *Démontrer que les séries entières* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ *ont le même rayon de convergence.*

   On le note R.
2. *Démontrer que la fonction* $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle* $]-R, R[$.

[redacted]**Exercice 7.0.53**[redacted] ♡ [redacted] **Oral CCP MP** [redacted]

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. *Donner le développement en série entière en 0 de la fonction* $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ *et précisez le rayon de convergence.*
3. (a) *Déterminer* $S(x)$.

   (b) *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$$f(0) = 1,\quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0,\quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0\ .$$
   Démontrer que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

[redacted]**Exercice 7.0.54**[redacted] ♡♡ [redacted] **Centrale 2016** [redacted]

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *la suite donnée par :*
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geqslant 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1) a_{k+1} a_{n-k} \end{cases}.$$

On considère, là ou elle est définie, la fonction $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.

1. *On suppose que* (a_n) *est bornée. Montrer que*
$$f(x) f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x.f(x)\big).$$
   En déduire $f(x)$
2. *En déduire* (a_n).
3. *Question supplémentaire : Que peut-on dire de l'hypothèse* (a_n) *bornée ?*

[redacted]**Exercice 7.0.55**[redacted] ♡ [redacted] **1. CCP 2011, 6. Mines 2013** [redacted]

Développer en série entière au voisinage de zéro les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
2. $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + 3\right)$;
3. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$;
4. $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$;
5. $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2(t^2+1)}$;
6. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}$.

Exercice 7.0.56 ♡♡ **Mines 2011**

Soit

$$h : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

1. *Prolonger h par continuité en 0.*
2. *Montrer que h est développable en série entière au voisinage de 0 et écrire son développement.*

Exercice 7.0.57 ♡♡ **CCP 2013**

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer explicitement $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Calculer les limites de f en $\pm\infty$.*
3. *Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$ à préciser.*

Exercice 7.0.58 ♡ **Centrale 2013**

On considère

$$f : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{tx\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Étudier les variations de f.*
3. *Calculer la limite de f en $+\infty$.*
4. *Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?*
5. *Soit g une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Que peut-on dire de :*

$$\lim_{x\to+\infty} x \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u.$$

6. *En déduire $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u$.*

Exercice 7.0.59 ♡♡ **Centrale 2016**

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite donnée par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geqslant 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) a_{k+1} a_{n-k} \end{cases}.$$

On considère, là ou elle est définie, la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.

1. *On suppose que (a_n) est bornée. Montrer que*

$$f(x) f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x.f(x)\right).$$

En déduire $f(x)$

2. *En déduire (a_n).*
3. *Question supplémentaire : Que peut-on dire de l'hypothèse (a_n) bornée ?*

Exercice 7.0.60 ♡ **CCP 2016**

Soit

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.

1. *La matrice C est-elle diagonalisable ?*
2. *On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{2n} (k+1)\mathrm{C}^k$.*
   (a) *Trouver α_k et β_k tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{C}^{2k} = \alpha_k \mathrm{C}^2$ et $\mathrm{C}^{2k+1} = \beta_k \mathrm{C}$.*
   (b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3, \mathrm{C}, \mathrm{C}^2\right)$.*
3. *Soient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ et $f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^{2n}$.*
   (a) *Rappeler le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.*
   (b) *En déduire de rayon de convergence des deux autres séries et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.*
4. *Montrer que (S_n) converge et exprimer sa limite S en fonction de I_3, C et C^2.*
5. *calcule $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{C})^2 \times \mathrm{S}$ et en déduire une autre expression de S.*

7.0.7 Développement en séries entières

Exercice 7.0.61 ♡ [redacted]

Développer en série entière au voisinage de 0 :

1. $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$;
2. $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$;
3. $h(x) = e^{-x}\sin x$;
4. $i(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+tx}$.

:43

Exercice 7.0.62 ♡ exo:2005:Jan:Sun:18:16:02

Développer en série entière au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $g(x) = \arcsin(x)$;
3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
4. $i(x) = \mathrm{sh}(1+x)$

:07

Exercice 7.0.63 ♡

Développer en série entière au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Exercice 7.0.64 ♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculer c_n, le nieme coefficient du DSE en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}.$$

Exprimer $\sum_0^{+\infty} c_n^2 x^n$.

Exercice 7.0.65 ♡

Calculer le DSE en 0 de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 7.0.66 ♡

Montrer que la fonction $f(x) = \arctan(1+x)$ est DSE au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer alors cette série entière

Exercice 7.0.67 ♡ **Oral CCP PC**

Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Est-elle développable en série entière ? Si oui, indiquer le rayon de convergence de la série associée.

Exercice 7.0.68 ♡

On considère la fonction

$$f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer son développement en série entière.*

:52

Exercice 7.0.69 ♡

On veut développer en série entière une fraction rationnelle $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ avec Q scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Q}(0) \neq 0$. On décompose pour cela la fraction rationnelle en éléments simples.

1. *Trouver le DSE de $\dfrac{1}{a-x}$, $\dfrac{1}{(a-x)^2}$. Quel-est le rayon de convergence de la série entière ?*
2. *Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x^3-5x^2+8x-4}$.*

Exercice 7.0.70 ♡

Soit $x_0 \in]-1,1[$. Développer en série entière au voisinage de x_0 la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 7.0.71 ♡

Former le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. *en procédant à une intégration terme à terme ;*
2. *en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution*

Exercice 7.0.72 ♡ **Oral CCP MP**

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

1. *Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive G de f définie sur l'intervalle $]-1;3[$ telle que $\mathrm{G}(1) = 0$.*
2. *Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.*
3. *Déduire de ce développement la valeur de $\mathrm{G}^{(3)}(0)$.*

Exercice 7.0.73 ♡ **CCP PC 2016**

1. *Soit F telle que $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$*
2. *Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que F est impaire et strictement croissante.*
4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\mathrm{F}(1)$.*
5. *Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.*
6. *Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ avec (a_n) une suite qu'on exprimera.*
7. *Montrer que :*
$$\left|\mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}\right| \leqslant \frac{1}{4p+5}.$$
8. *En déduire que $\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge et que sa somme vaut $\mathrm{F}(1)$.*

Exercice 7.0.74 ♡ **CCP PC 2016**

Premier exercice :

1. *Soit F telle que $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$*
2. *Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

3. *Montrer que* F *est impaire et strictement croissante.*
4. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\mathrm{F}(1)$.
5. *Montrer que* F *admet une limite finie en* $+\infty$.

exo:2005:Jan:Sun:15:52:10

6. *Montrer que pour tout* $x \in]-1,1[$, $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ *avec* (a_n) *une suite qu'on exprimera.*
7. *Montrer que :*

$$\left|\mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}\right| \leqslant \frac{1}{4p+5}$$

exo:2005:Jan:Sun:16:05:21

8. *En déduire que* $\sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ *converge et que sa somme vaut* $\mathrm{F}(1)$.

Exercice 7.0.75 ♡ ***CCP 2016***

Exercice 1 :

On pose $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t$.

1. *Justifier que* F *est définie et* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* F *est impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

exo:2004:Nov:Tue:11:53:46

3. *Montrer que* F *admet une limite finie quand* $x \to +\infty$ *(On ne demande pas de la calculer.).*
4. *Montrer qu'il existe une suite* $(an)_n$ *que l'on déterminera tel que l'on puisse écrire F sous la forme* $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ *pour* $x \in]-1,1[$.

7.0.8 Sommation de séries et de séries entières

exo:2005:Jan:Mon:17:10:12

Exercice 7.0.76 ♡

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\sum \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 7.0.77 ♡

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme $\mathrm{S}(x)$ *de* $\sum \frac{x^n}{n+2}$.

Exercice 7.0.78 ♡

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum \mathrm{ch}\, n x^n$.

Exercice 7.0.79 ♡ ***Centrale-Supélec MP***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Donner le rayon de convergence* R *et calculer la somme de la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{H}_n x^n$.

Exercice 7.0.80 ♡

Calculer en utilisant les DSE les sommes des séries numériques :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 7.0.81 ♡

Calculer la somme de la série entière

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n + 5) x^n$$

Exercice 7.0.82 ♡

1. *Écrire le DSE de* $x^k e^x$ *et en déduire un algorithme de calcul de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(n) \frac{x^n}{n!}$ *lorsque* P *est un polynôme.*
2. *Calculer la somme de la série entière :*

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+1)}{n!} x^n$$

Exercice 7.0.83 ♡

Convergence et calcul de la somme des séries :

1. $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $\mathrm{S} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n}$

Exercice 7.0.84 ♡ ***Classique***

Calculer la somme de la série $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 7.0.85 ♡ ***Minettes 2016***

On considère $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de* A.
2. A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? Sur* $\mathbb{C}$ *?*
3. *On pose* $t_n = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}n)$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n>0} t_n z^n$ *? Exprimer sa somme sur l'intervalle de convergence avec des fonctions usuelles*

7.0.9 Applications des séries entières

[redacted]Exercice 7.0.86[redacted] ♡ [redacted] Écrit banque PT [redacted]

Soit (a_n) la suite donnée par

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.*
2. *Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.*
3. *Pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.*
   (a) *Montrer que S est solution sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ de l'équation différentielle*
   $$(1-x)y' - (1+2x)y = 0.$$
   (b) *Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.*

[redacted]Exercice 7.0.87[redacted] ♡ [redacted]

On note $f(x) = \arcsin^2(x)$.

1. *Trouver une relation simple entre f'' et f'.*
2. *Développer f en série entière au voisinage de 0.*

[redacted]Exercice 7.0.88[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \; : y' - 2xy = 1$$

1. *Montrer qu'il existe une solution de (E) développable en série entière et vérifiant $y(0) = 0$.*
2. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

[redacted]Exercice 7.0.89[redacted] ♡ [redacted] Mines [redacted]

On donne trois réels a_0, a_1, a_2 et on définit la suite (a_n) par

$$\forall n \geqslant 3 \; , a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

1. *Montrer sans calculer a_n qu'il existe $\mathrm{A}, k > 0$ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \mathrm{A} k^n$$
2. *En déduire que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.*
3. *Calculer a_n.*

[redacted]Exercice 7.0.90[redacted] ♡ [redacted]

On note a_n le nombre d'arbres binaires à n noeuds. Montrer que $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

Calculer ensuite a_n.

[redacted]Exercice 7.0.91[redacted] ♡ [redacted]

Quelles sont les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad xy''(x) - y(x) = 1?$$

[redacted]Exercice 7.0.92[redacted] ♡ [redacted] Oral CCP MP [redacted]

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.*
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. *Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine ?*

[redacted]Exercice 7.0.93[redacted] ♡ [redacted] Oral CCP MP [redacted]

1. *Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.*

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. *Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.*
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. *En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.*
4. *En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.*

[redacted]Exercice 7.0.94[redacted] ♡♡ [redacted] Centrale 2000 [redacted]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n} \, \mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (xt)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-t^2}.$$

3. *Montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}.$$

[redacted]***Exercice 7.0.95*** [redacted] ♡ [redacted] ***Les séries entières pour prouver la régulatité d'une fonction*** [redacted]

Montrer que la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

[redacted]***Exercice 7.0.96*** [redacted] ♡ [redacted] ***Une inégalité*** [redacted]

Utiliser le développement en série entière de e^x pour montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $p! > \left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$.

[redacted]***Exercice 7.0.97*** [redacted] ♡♡ [redacted] e ***est irrationnel*** [redacted]

Utiliser le développement en série entière de e^{-x} pour montrer que le réel e n'est pas rationnel.