Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

6.0.1 Suites de fonctions

[redacted]***Exercice 6.0.1*** [redacted] ♡ [redacted] ***Une limite simple de fonctions convexes est convexe*** [redacted]

Montrer que la limite simple d'une suite convergente de fonctions convexes de I *dans* $\mathbb{R}$ *est encore convexe.*

[redacted]***Exercice 6.0.2*** [redacted] ♡ [redacted] ***Une limite simple de fonctions croissantes est croissante*** [redacted]

Montrer que la limite simple d'une suite convergentes de fonctions croissantes de I *dans* $\mathbb{R}$ *est encore croissante.*

[redacted]***Exercice 6.0.3*** [redacted] ♡ [redacted] ***La suite produit de deux suites de fonctions uniformément convergentes et bornées est uniformément convergente*** [redacted]

Soient (f_n) *et* (g_n) *deux suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui convergent uniformément vers respectivement* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *et* g *sont bornées. Montrez alors que* $(f_n g_n)$ *converge uniformément vers* fg.

[redacted]***Exercice 6.0.4*** [redacted] ♡ [redacted] ***Une combinaison linéaire de suites de fonctions uniformément convergentes est uniformément convergente*** [redacted]

Soient (f_n) *et* (g_n) *deux suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui convergent uniformément vers respectivement* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Montrez alors que* $(\alpha f_n + \beta g_n)$ *converge uniformément sur* I *vers* $\alpha f + \beta g$.

[redacted]***Exercice 6.0.5*** [redacted] ♡ [redacted]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et soit* (f_n) *une suite de fonctions* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continues sur* $[a, b]$ *qui converge uniformément vers* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Montrer que* $(\inf_{[a,b]} f_n)$ *converge vers* $\inf_{[a,b]} f$.

[redacted]***Exercice 6.0.6*** [redacted] ♡ [redacted]

Soit (f_n) *une suite de fonctions de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$. *Soit* (x_n) *une suite de points de* $[a, b]$ *qui converge vers* $x \in [a, b]$. *Montrer que* $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

[redacted]***Exercice 6.0.7*** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Montrer que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers la fonction nulle.*

Indication 6.0 : On pourra utiliser l'exercice 6.0.4.

6.0.2 Étude de la convergence d'une suite de fonctions

[redacted]***Exercice 6.0.8*** [redacted] ♡ [redacted]

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) *définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f_n(x) = \frac{\sin x \cos^n x}{1 - \cos x}.$$

[redacted]***Exercice 6.0.9*** [redacted] ♡ [redacted]

Montrer que la suite de fonctions (f_n) *de terme générale :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x) \end{array} \right.$$

converge uniformément vers 0 *sur* $[0, 1]$.

[redacted]***Exercice 6.0.10*** [redacted] ♡ [redacted]

Montrer que la suite de fonctions (f_n) *de terme générale :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \sin(\pi x) \end{array} \right.$$

converge uniformément vers 0 *sur* $[0, 1]$.

Indication 6.0 : On pourra utiliser l'exercice précédent.

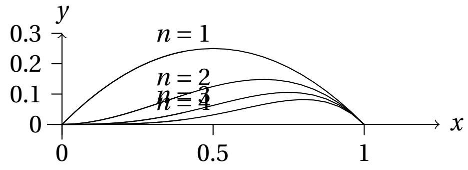

FIGURE 6.1 – graphes de f_1, f_2, f_3, f_4

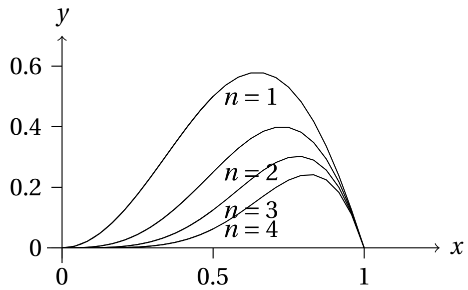

FIGURE 6.2 – graphes de f_1, f_2, f_3, f_4

[redacted] ***Exercice 6.0.11*** [redacted] ♡ [redacted]

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Montrer que chaque f_n *est* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$, *que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une certaine fonction* f, *mais que* f *n'est pas* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

[redacted] ***Exercice 6.0.12*** [redacted] ♡ [redacted]

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur l'intervalle* I *pour :*

1. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$.
2. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.
3. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$.
4. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+1}{n+x^2}$.
5. $\mathrm{I} = [0,1]$ *et pour* $f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n} & \text{si } x \in [0, 1/n[\\ \dfrac{n(x-1)}{1-n\sqrt{n}} & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$.
6. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

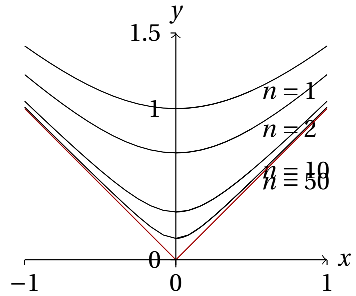

FIGURE 6.3 – graphes de f, f_1, f_2, f_{10}, f_{50}

[redacted] ***Exercice 6.0.13*** [redacted] ♡ [redacted]

On considère la suite de fonctions (f_n) *avec*

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^n \ln x & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.

[redacted] ***Exercice 6.0.14*** [redacted] ♡ [redacted]

Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ *de la suite* (f_n) *avec*

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n(1+x^n)} \end{cases}.$$

[redacted] ***Exercice 6.0.15*** [redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP 2015*** [redacted]

1. *Démontrer que, pour tout entier* n, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
2. *On pose* $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

[redacted] ***Exercice 6.0.16*** [redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP MP 2015*** [redacted]

On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ *et* $\forall\, t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0,+\infty[$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

2. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 6.0.17 ♡

Démontrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$:

1. converge simplement sur $\mathbb{R}_+$;
2. que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, $a>0$;
3. mais qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

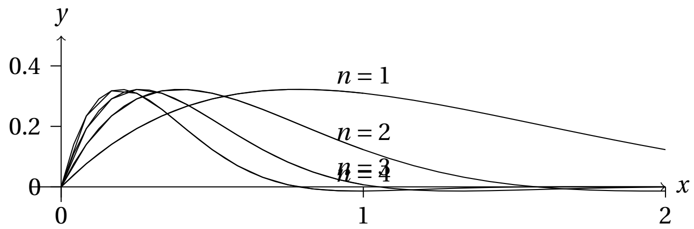

FIGURE 6.4 – graphes f_1, f_2, f_3, f_3

Exercice 6.0.18 ♡

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^{\alpha} x e^{-nx} \end{array} \right.$$

où $\alpha > 0$ est un réel fixé. Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite.

Exercice 6.0.19 ♡

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

Exercice 6.0.20 ♡

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par , pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$.

Exercice 6.0.21 ♡

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) = \exp(-x^n)$.

Exercice 6.0.22 ♡ **Oral CCP MP**

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 6.0.23 ♡ **Oral CCP MP**

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6.0.24 ♡ **Oral CCP MP**

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 6.0.25 ♡ **Oral CCP MP**

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pout tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} n^2x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

   Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.0.26 ♡

Étudier suivant la valeur du réel a le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n) où pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^a x e^{-nx} \end{array} \right. .$$

Exercice 6.0.27 ♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad x\in\left[0,\frac{1}{2n}\right] \\ n^2\left(\frac{1}{n}-x\right) & \text{si} \quad x\in\left]\frac{1}{2n},1/n\right[\\ 0 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. *Prouver que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.*
2. *Comparer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Que peut-on en conclure ?*
3. *Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ avec $a\in\,]0,1[$.*

Exercice 6.0.28 ♡ ***X PC 2014***

Soit (P_n) une suite de polynômes de degré $\leqslant d$ convergent simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant d$. Montrer que la convergence est uniforme.

6.0.3 Intégration et dérivation d'une fonction limite d'une suite de fonctions

Exercice 6.0.29 ♡

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x^n(1-x) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
2. *Calculer pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*
3. *En déduire que la convergence n'est pas uniforme.*
4. *Calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et retrouver le résultat.*

Exercice 6.0.30 ♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{I}_n=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6.0.31 ♡ ***Oral CCP MP***

On pose $f_n(x)=\left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.

1. *Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.*
2. *Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.0.32 ♡

Pour $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on définit $f_n(x)=\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. *Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer par contre que (f_n) converge uniformément sur $\mathrm{K}_a=[-a,a]$ pour tout $a>0$.*
4. *En déduire $\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.0.33 ♡ ***X PC 2012***

Dans tout l'exercice on appellera

$$a_n=\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\,\mathrm{d}t$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. *Déterminer la limite de la suite (a_n).*
2. *On pose, pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$*

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{\int_0^x(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}.$$

Soit $\alpha>0$. Montrer que

$$\sup_{[\alpha,1]}|\mathrm{P}_n-1|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Exercice 6.0.34 ♡ ***X PC 2012***

Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et que

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\qquad |f_n'(x)|\leqslant 1.$$

Montrer que f est continue.

6.0.4 Théorème de convergence dominée

Exercice 6.0.35 ♡

Montrer que la suites (u_n) est convergente et calculer sa limite :

1. *(u_n) de terme général $u_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$.*
2. *(u_n) de terme général $u_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.0.36 ♡

Montrer que les suites de termes généraux donnés ci-dessous convergent et calculer leur limite.

1. $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; 2. $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x$; 3. $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6.0.37 ♡

Montrer que les suites de termes généraux donnés ci-dessous convergent et calculer leur limite.

1. $u_n = \int_0^1 \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$; 2. $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$; 3. $u_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6.0.38 ♡

Nature et limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.0.39 ♡

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.0.40 ♡

Déterminer un équivalent de

$$u_n = \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.0.41 ♡

Montrer que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 6.0.42 ♡ **Intégrales de Wallis et de Gauss**

1. *Montrer que* $\forall n \geqslant 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

2. *Montrer que*

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. *On rappelle que grâce aux intégrales de Wallis,*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 6.0.43 ♡ **Oral CCP MP**

1. *Démontrer que, pour tout entier n, la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
2. *On pose* $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6.0.44 ♡ **Oral CCP MP**

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. *Justifier que I_n est bien définie.*
2. *Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.*
3. *La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \mathrm{I}_n$ est-elle convergente ?*

Exercice 6.0.45 ♡ **Oral CCP MP**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ *et* $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.*
2. *Soit $a \in\,]0;1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?*
3. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?*
4. *Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice 6.0.46 ♡♡♡

1. *Montrer que* $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t$ *converge.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t & \text{si } t \in\,]0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (a) *Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers $t \mapsto \frac{\ln t}{e^t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

   (b) *Montrer que* $\mathrm{I} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t\,\mathrm{d}t$.

3. *On admet que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. *Montrer que* $\mathrm{I} = -\gamma$.

   Indication 6.0 : On pourra effectuer le changement de variable $t = nu$ suivi d'une intégration par parties.

Exercice 6.0.47 ♡

Soit $f : \mathrm{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$. *Prouver l'existence de ces intégrales.*
2. *Montrer que* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

3. Calculer $\lim \mathrm{I}_n$.

Exercice 6.0.48 ♡ ***Oral Mines-Ponts PC***

Pour $n \geqslant 3$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + t^{-n}}$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n).

Exercice 6.0.49 ♡ ***Oral X-ESPCI PC***

Limite et équivalent de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.0.50 ♡♡♡ ***Type Mines***

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{n f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Après avoir montré que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$, prouver que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6.0.51 ♡ ***Minettes 2016***

Prouver que la limite suivante existe et la calculer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\pi t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$.

6.0.5 Séries de fonctions

Exercice 6.0.52 ♡

Étudier les modes de convergence des séries de fonctions de terme général :

1. $a_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $b_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$;
3. $c_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
4. $d_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $e_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.0.53 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n^2} \end{cases}.$$

Étudier les modes de convergence de $\sum f_n$.

Exercice 6.0.54 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(nx)}{1+nx^8+x^{24}+n^2} \end{cases}.$$

Étudier les modes de convergence de $\sum f_n$.

Exercice 6.0.55 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^2e^{-nx} \end{cases}.$$

1. *Montrer que $\sum f_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que la convergence est néanmoins normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 6.0.56 ♡

Étudier les modes de convergence de la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^2+x^2} \end{cases}, n \geqslant 1.$$

Exercice 6.0.57 ♡

1. *Montrer que la série de terme général*

$$f_n : \begin{cases}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln x \end{cases}, n \geqslant 0.$$

converge simplement sur $]0,1]$ et calculer sa somme sur $]0,1]$.

2. *Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1]$.*

Exercice 6.0.58 ♡

1. *Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Même question avec $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(1+x)}{n^2x}$ sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 6.0.59 ♡

Étudier la nature de la convergence sur $[0,\pi]$ de la série de fonctions $\sum f_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{cases} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \cos^n x \end{cases}.$$

Exercice 6.0.60 ♡

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.0.61 ♡

Étudier les modes de convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$

Exercice 6.0.62 ♡

Étudier les modes de convergence sur $\mathbb{R}_+$ *de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{xn^2+n}$

Exercice 6.0.63 ♡

Étudier les modes de convergence sur $]0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Exercice 6.0.64 ♡

Étudier les modes de convergence sur $[0,1]$ *de la série de fonctions* $\sum n^\alpha x^n(1-x)$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 6.0.65 ♡

Étudier les modes de convergence sur $]0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n+n^3x^2}$. *On montrera qu'il n'y a pas convergence uniforme en minorant le reste :* $\mathrm{R}_n(x)\geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$.

Exercice 6.0.66 ♡

Étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{x^2+n}$ *sur* $[-1,0[$.

Exercice 6.0.67 ♡ **Oral CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante positive de limite nulle.*

1. (a) *Démontrer que la série* $\sum(-1)^k u_k$ *est convergente.*

   Indication *: on pourra considérer* $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série* $\sum(-1)^k u_k$.

2. (a) *Étudier la convergence simple sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (b) *Étudier la convergence uniforme sur* $[0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

Exercice 6.0.68 ♡

Soit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positives définies sur un intervalle* $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$. *On suppose que :*

— *La suite de fonctions* (u_n) *converge uniformément vers la fonction nulle.*

— *Pour tout* $x\in\mathrm{I}$, *la suite numérique* $u_n(x)$ *est décroissante.*

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ *converge uniformément sur* I.

Exercice 6.0.69 ♡ **Oral CCP MP**

Soit X *une partie de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ *sur* X, *puis de la convergence uniforme de* $\sum f_n$ *sur* X.
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *normalement convergente sur* X *est uniformément convergente sur* X.
3. *La série de fonctions* $\sum\dfrac{n^2}{n!}z^n$ *est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $\mathrm{R}\in\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6.0.70 ♡ **Oral CCP MP**

Soit $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* A *dans* $\mathbb{C}$.

1. *Démontrer l'implication :*

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur A}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur A}\right)$$

2. *On pose :* $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[0;+\infty[,\ f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0;+\infty[$ *? Justifier.*

Exercice 6.0.71 ♡ **Oral CCP MP**

1. *Démontrer que la série* $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente pour tout* $z\in\mathbb{C}$.
2. *On pose :* $\forall\, z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.
   Démontrer que $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ f(z)\times f(z')=f(z+z')$, *sans utiliser le fait que* $f(z)=e^z$.
3. *En déduire que :* $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)\neq 0$ *et* $\dfrac{1}{f(z)}=f(-z)$.

Exercice 6.0.72 ♡

On pose $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^n(x)\sin(nx)}{n}$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0,\pi[$ *et calculer* $f'(x)$.
2. *En déduire* f.

Exercice 6.0.73 ♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$f_n:\left\{\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n\sin(nx)}{n}\end{array}\right. .$$

1. *Montrer que* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathrm{I}=]-1,1[$. *On notera* f *la fonction somme.*
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I.
3. *Pour tout* $x\in\mathrm{I}$, *calculer* $f'(x)$ *en utilisant deux suites géométriques de raison* xe^{ix}.
4. *En déduire que* $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

6.0.6 Étude de fonctions définies par la somme d'une série

Exercice 6.0.74 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n\left(1+nx^2\right)} \end{array} \right. .$$

Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.0.75 ♡

Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. *Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$. On note S sa somme.*
2. *Déterminer la limite de S en 0.*
3. *Montrer que $\int_0^{\pi} \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.*
4. *Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.*

Exercice 6.0.76 ♡

1. *Prouver que la série de fonctions $\sum \dfrac{1}{n^2+2n+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Calculer alors $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+2n+x^2}$.*

Exercice 6.0.77 ♡

1. *Justifier l'existence de*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

2. *Montrer que f est 1-périodique et qu'on a*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Exercice 6.0.78 ♡

On note

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

Justifier et calculer $\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.0.79 ♡

Pour tout $x > 0$, on pose

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. *Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Montrer que S est continue.*
3. *Étudier la monotonie de S.*
4. *Déterminer la limite puis un équivalent de S en $+\infty$.*
5. *Donner un équivalent de S en 0.*

Exercice 6.0.80 ♡

Pour tout $x \in \mathrm{I} =]-1,+\infty[$, on pose

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. *Montrer que S est définie et continue sur I.*
2. *Étudier la monotonie de S.*
3. *Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$.*
4. *Déterminer un équivalent de S en -1^+.*
5. *Établir :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. *En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en $+\infty$.*

Exercice 6.0.81 ♡♡

Soit $a > 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} \end{array} \right.$

1. *Étudier la convergence absolue de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$. En déduire qu'il n'y a pas convergence normale.*
2. *Montrer la convergence simple de la série de fonctions.*
3. *Montrer la convergence uniforme.*
4. *Donner un développement asymptotique de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$ à la précision $\mathscr{O}(1/x^3)$.*

Exercice 6.0.82 ♡

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. *Montrer que S est bien définie.*

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. exo:2005:Jan:Tue:16:48:39
3. Préciser le sens de variation de S.
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x+1)+S(x) = \frac{1}{x}.$$
5. Donner un équivalent de S en 0^+
6. Donner un équivalent de S en $+\infty$.
7. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt.$$

Exercice 6.0.83 ♡

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition. exo:2005:Jan:Tue:16:51:13
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 6.0.84 ♡ ***Centrale 2003***

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$

1. Domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Déterminer un équivalent de f lorsque $x \to 0$.

Exercice 6.0.85 ♡ exo:2004:Dec:Thu:14:09:25

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ;
2. Y a-t-il convergence normale sur D_f ?
3. Montrer que f est continue sur D_f ;
4. Déterminer la limite de f aux bornes de D_f.
5. Étudier la convergence uniforme sur $[1,+\infty[$.

Exercice 6.0.86 ♡ ***Centrale, Mines, CCP***

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Domaine de définition de f ;
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[)$ et calculer f'.
3. Calculer f.

Exercice 6.0.87 ♡ ***Classique, Important, fonction ζ de Riemann***

On définit la fonction ζ de Riemann par :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Domaine de définition de ζ ?
2. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.
3. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)$.
4. En utilisant une comparaison avec une intégrale, trouver un équivalent simple de ζ lorsque $x \to 1^+$.
5. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que ζ est décroissante.
6. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

g. Tracer le graphe de ζ.

Exercice 6.0.88 ♡ ***Important, Fonction ζ alternée***

On définit la fonction
$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Domaine de définition de μ et modes de convergence.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\mu(x)$ et le signe de $\mu(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que μ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
4. Trouver une relation simple entre ζ et μ.
5. Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

Exercice 6.0.89 ♡

On définit la fonction ζ et la fonction μ de Riemann par :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$
$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer en utilisant une comparaison avec une intégrale que
$$\zeta(x) \underset{x\to1}{\sim} \frac{1}{x-1}$$
3. Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
4. Montrer que μ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

5. Calculer pour $x > 1$, $\zeta(x) + \mu(x)$ et en déduire l'expression de ζ en fonction de μ.
6. Calculer $\mu(1)$ et retrouver l'équivalent de ζ en 1.

Exercice 6.0.90 ♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Prouver la continuité de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer l'intégrabilité de S sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer son intégrale sous forme de somme de série.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer S' et en déduire l'expression de S.

Exercice 6.0.91 ♡

Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$. On se propose d'établir le tableau de variations de la somme S de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Déterminer le domaine de définition de S ;
2. Quelle est la parité de S ? En déduire qu'on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+^*$.
3. Prouver que S est continue sur son domaine de définition.
4. Sans utiliser le théorème de dérivation terme à terme, donner les variations de S.
5. Déterminer la limite de S en 0^+.
6. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
7. Dresser le tableau de variations de S.

Exercice 6.0.92 ♡ **Oral CCP MP**

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 6.0.93 ♡ **Oral CCP MP**

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculez $S'(1)$.

Exercice 6.0.94 ♡

1. Déterminer les domaines de convergence simple et normale de la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-nx}}{n}$.
2. Montrer que la fonction somme de cette série de fonctions est $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles et en déduire l'expression explicite de la somme en admettant que l'éventuelle constante d'intégration est nulle.

Exercice 6.0.95 ♡ **Oral CCP PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $I =]0,+\infty[$. On appellera S sa somme.
2. (a) Montrer que pour $0 < a < b$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
   (b) En déduire que S est continue sur I.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que :
$$\forall x \in I,\quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$
4. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} = \frac{p-1}{(n+1)\big(n+p\big)}.$$
   (b) En déduire que $S(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}$.
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 6.0.96 ♡ **Oral CCP PSI**

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis montrer la continuité de f sur ce domaine.
2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 6.0.97 ♡ **Oral Mines-Pont PSI**

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. *Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.*
2. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.*
3. *Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.*
4. *Donner l'allure de la courbe représentative de f.*

Exercice 6.0.98 ♡ **Oral Centrale PSI**

Soient $a>0$ et $f: x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right)$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? de classe $\mathscr{C}^1$?*
3. *Déterminer la limite de f' en 0.*

Exercice 6.0.99 ♡ **Mines-Ponts PC 2013**

Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telles que

$$\forall x\in[0,1],\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 6.0.100 ♡ **Mines-Ponts PC 2013**

Soient $a>0$ et

$$f: x\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right).$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Déterminer un équivalent de f en 0_+.*
3. *Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.*

Exercice 6.0.101 ♡ **Mines-Ponts PC 2013**

Soit

$$f: x\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Déterminer la limite de f' en 0_+.

Exercice 6.0.102 ♡ **X PC 2012**

Soit $k\in\mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de la suite définie par

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6.0.103 ♡♡♡ **X PC 2012**

On considère la fonction

$$\mathrm{S}: x\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. *Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$*
2. *Déterminer la limite de S en $+\infty$.*
3. *Montrer que*

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}.$$

4. *En déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.*

Exercice 6.0.104 ♡♡ **CCP PC 2014**

On considère la fonction

$$\mathrm{S}: x\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

1. *Montrer que $\mathrm{S}(1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.*
2. *Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer la limite de S en $+\infty$.*
3. *Montrer que*

$$\forall x>0,\qquad x\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(x+1)=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

4. *Trouver un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en 0_+.*
5. *Trouver les réels a,b,c tels que*

$$\mathrm{S}(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6.0.105 ♡♡ **Type Mines**

Établir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\pi\sqrt{x}.$$

Exercice 6.0.106 ♡ **CCP PC 2009**

1. *Soit $x>0$. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+x}$.*
2. *Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction*

$$f: x\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}.$$

3. *Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.*
4. *Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0_+.*

5. Montrer que f est décroissante et donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

[redacted]**Exercice 6.0.107**[redacted] ♡ [redacted] **Mines-Ponts PC 2007** [redacted]

Montrer que

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

[redacted]**Exercice 6.0.108**[redacted] ♡ [redacted] **Centrale PC 2002** [redacted]

Définition, continuité, calcul de la somme de

$$f : x \longmapsto \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

[redacted]**Exercice 6.0.109**[redacted] ♡ [redacted] **Centrale PC 2008** [redacted]

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \longmapsto nx\mathrm{e}^{-nx^2}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D *de la série de fonctions de terme général* f_n.
2. *A-t-on la convergence normale de* $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ *sur* $\mathbb{R}$?
3. *On note* $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. *Calculer* $\mathrm{S}(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{D}$.
4. *La fonction* S *est-elle continue ?*

[redacted]**Exercice 6.0.110**[redacted] ♡ [redacted] **Centrale PC 2004** [redacted]

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin(3^n x).$$

1. *Montrer que la fonction f est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que f n'est pas dérivable en* 0.

[redacted]**Exercice 6.0.111**[redacted] ♡ [redacted] **CCP PC 2006** [redacted]

Pour $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. *Étudier la convergence de la série de fonctions* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$. *Nous noterons* S *sa somme.*
2. *Étudier la continuité et les variations de* S.
3. *Calculer* $\mathrm{S}(\frac{1}{k})$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
4. *Déterminer un équivalent de* $\mathrm{S}(x)$ *lorsque x tend vers* $+\infty$.
5. *Déterminer un équivalent de* $\mathrm{S}(x)$ *lorsque x tend vers* 0.

[redacted]**Exercice 6.0.112**[redacted] ♡ [redacted] **X PC 2009** [redacted]

Soit

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Montrer que f est lipschitzienne.*
3. *Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

[redacted]**Exercice 6.0.113**[redacted] ♡ [redacted] **Mines-Ponts PC 2009** [redacted]

On pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}.$$

Donner un équivalent de f lorsque t tend vers 0_+.

[redacted]**Exercice 6.0.114**[redacted] ♡ [redacted] **CCP PC 2005** [redacted]

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}.$$

1. *Montrer que l'ensemble de définition de f est* $[0, +\infty[$.
2. *Montrer que f est continue sur* $[0, +\infty[$ *et de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $]0, +\infty[$. *Calculer f'' puis exprimer f' sans le symbole somme.*
3. *La fonction f est-elle dérivable en* 0 ?
4. *Montrer que*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - \mathrm{e}^{-t}) \,\mathrm{d}t.$$

6.0.7 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

[redacted]**Exercice 6.0.115**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

[redacted]**Exercice 6.0.116**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

[redacted]**Exercice 6.0.117**[redacted] ♡ [redacted]

En considérant $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} = \ln 2.$$

Exercice 6.0.118 ♡ **Fonction exponentielle complexe**

On considère la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1. *Montrer qu'elle est normalement convergente sur les disques* $D(0,R)$, $R \in \mathbb{R}_+^*$, *de* $\mathbb{C}$. *Sa somme est, par définition, la fonction exponentielle complexe notée* exp.
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \exp(t)\,dt = \exp(t) - 1$.

Exercice 6.0.119 ♡ **Oral CCP MP**

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.*
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\int_a^b f(x)\,dx$.
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que* $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 6.0.120 ♡

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6.0.121 ♡ **Constante de Catalan**

1. *Montrer que*
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$
2. *En déduire que*
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$
   Ce nombre, appelé constante de Catalan *vaut approximativement* 0.916.

Exercice 6.0.122 ♡

1. *Montrer que*
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt.$$
2. *En déduire que*
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$
3. *Calculer cette somme sachant que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6.0.123 ♡

Montrer que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Exercice 6.0.124 ♡

On définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} \text{ et } F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,dt$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f et* F .
2. *Étudier la continuité de f et* F.
3. *Trouver* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et un équivalent de f au voisinage de* 0.
4. *Montrer que* $F = f$.

Exercice 6.0.125 ♡

On note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}(t)}\,dt$$

Exprimer $F(x)$ *comme la somme d'une série de fonctions. Comment trouver une valeur approchée de* $F(x)$ *à* 10^{-1} *près ?*

Exercice 6.0.126 ♡

Le but de cet exercice est de prouver l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

1. *Justifier l'existence des deux membres de l'égalité.*
2. *Montrer que* $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$.
3. *A l'aide d'un changement de variable, calculer* $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,dt$.
4. *Conclure.*

Indication 6.0 : *On rappelle que* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6.0.127 ♡

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\text{sh}\, t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

Exercice 6.0.128 ♡

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 6.0.129 ♡ Oral CCP PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Calculer a_0 et a_1.*
2. (a) *Montrer que (a_n) est décroissante.*
   (b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4} a_n$.*
   (c) *En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.*
3. (a) *Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.*
   (b) *En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.*
4. *Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$ puis calculer cette somme.*

Exercice 6.0.130 ♡ Oral Mines-Pont PC

On considère la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

1. *Préciser son domaine de définition.*
2. *Donner une relation entre $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.*
3. *Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.*

Exercice 6.0.131 ♡ Oral Mines-Pont PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{x+n} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que :*
$$\int_0^1 \left(\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$
2. *Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $]-1,+\infty[$.*

Exercice 6.0.132 ♡♡ Type Mines

Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos\theta)\,\mathrm{ch}(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.0.133 ♡♡ CCP PC 2014

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra librement utiliser que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

1. *Justifier que la série ci-dessus converge.*
2. *Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+t)$.*
3. *Grâce à un théorème d'intégration terme à terme, montrer que*
$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(kn+1)}.$$
4. *On considère la fonction*
$$f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+x)}.$$
   (a) *Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*
   (b) *Exprimer u_n à l'aide de la fonction f. En déduire que $u_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$.*
5. *Montrer qu'il existe une constante ζ, que l'on exprimera comme somme d'une série convergente, vérifiant*
$$u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\zeta}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 6.0.134 ♡♡♡ Type X

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\beta > 0, \gamma > 0$ et $\alpha + 1 < \beta\gamma$.

1. *Étudier l'existence de la fonction :*
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \mathrm{e}^{-n^\beta x^{\frac{1}{\gamma}}} \end{array} \right. .$$
2. *Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :*
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \gamma\Gamma(\gamma)\zeta(\beta\gamma - \alpha)$$
   où :
   — *Γ est la fonction Gamma d'Euler définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;*
   — *ζ est la fonction zeta de Riemann définie pour tout $s \in]1,+\infty[$ par $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.*