Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.0.1 Normes

Exercice 5.0.1 ♡♡ ***Une norme intégrale***

Sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, *montrer que l'application définie par*

$$\mathcal{N}\big((x,y)\big) = \int_0^1 |x+ty|\,\mathrm{d}t$$

est une norme.

Exercice 5.0.2 ♡ ***Norme sup sur l'espace des suites bornées d'un*** $\mathbb{K}$***-espace vectoriel normé***

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* $\mathscr{B} = \big\{(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\big\}$. *Pour tout* $(u_n) \in \mathscr{B}$, *on pose* $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$. *Montrer que* $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$ *est une* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

Exercice 5.0.3 ♡ ***Normes sur*** $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On pose*

$$\|\mathrm{A}\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|,\ \|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} |a_{i,j}|$$

Montrer que $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ *et* $\|\,.\,\|_\infty$ *définissent des normes sur* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 5.0.4 ♡

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* f *pour que l'application*

$$\mathcal{N}(.) : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x)\| \end{cases}$$

définisse une norme sur E.

Exercice 5.0.5 ♡

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et soit* d *la distance associée à cette norme. Montrer que :*

1. $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3, \quad d(x,y) = d(x+z, y+z)$;
2. $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K}\times\mathrm{E}^2, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$.

Exercice 5.0.6 ♡ ***Norme euclidienne***

Si $(\mathrm{E}, (.\mid.))$ *est un espace préhilbertien et* $\|.\|$ *la norme euclidienne, montrer que pour tout vecteur* $x \in \mathrm{E}$, $\|x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \big|(x\mid y)\big|$

Exercice 5.0.7 ♡ ***Critère d'égalité de deux normes***

Soient $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ *deux normes sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E.

1. *On note* $\mathrm{B}_1 = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathrm{N}_1(x) \leqslant 1\}$ *et* $\mathrm{B}_2 = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathrm{N}_2(x) \leqslant 1\}$.
   Montrer
   $$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 \Rightarrow \mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$$
2. *Même question avec les boules unitées ouvertes.*

Exercice 5.0.8 ♡ ***Boules ouvertes disjointes***

Montrer que si $r + r' \leqslant d(a, a')$, *alors* $\mathrm{B}(a,r) \cap \mathrm{B}(a',r') = \varnothing$.

Exercice 5.0.9 ♡ ***Boule unitée pour différentes normes***

Dessiner les boules ouvertes $\mathrm{B}(0,1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *pour les trois normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$.

Exercice 5.0.10 ♡

Sur l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1])$, *on considère les deux normes* $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_1$.

1. *Que représente la boule ouverte* $\mathrm{B}_\infty = \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, 1)$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$?
2. *Montrer que La boule ouverte* $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, 1)$ *pour la norme* $\|.\|_1$ *contient* B_∞.
3. B_1 *est-elle bornée dans* $(\mathrm{E}, \|.\|_\infty)$?

Exercice 5.0.11 ♡

Montrer que dans le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *:*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \mathrm{B}(y,r) = \mathrm{B}(x+y,r).$$

Exercice 5.0.12 ♡ ***Identité du parallélogramme***

1. *Soit* $(\mathrm{E}, \langle .|. \rangle)$ *un espace préhilbertien et soit* $\|.\|$ *sa norme associée. Prouver l'identité du parallélogramme :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

2. *Montrer que l'application* $\mathcal{N}(.) : (x,y) \mapsto |x| + 2|y|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$*. Cette norme dérive-t-elle d'un produit scalaire ?*

7:19

Exercice 5.0.13 ♡

Sur l'espace des polynômes à coefficients réels, $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$*, on note* $\|\mathrm{P}\| = \int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. *Vérifier que* $\|.\|$ *définit une norme sur* E.
2. *On considère la partie* $\mathrm{A} = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{Q}(1) = 0\}$*. Montrer que* A *est un hyperplan de* E.
3. *Calculer* $d(\mathrm{P}, \mathrm{A})$ *pour* $\mathrm{P} = 1_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$.

Exercice 5.0.14 ♡♡♡

Soit E *une algèbre de dimension finie. On veut montrer qu'on peut construire sur* E *une norme d'algèbre.*
Soit $\|.\|$ *une norme sur* E*. Pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on pose*

$$\mathrm{N}(x) = \sup_{a \in \mathrm{E}, \|a\|=1} \|ax\|.$$

1. *Justifier que* N *est bien définie.*
2. *Prouver que* N *est une norme d'algèbre.*

Exercice 5.0.15 ♡

Sur $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$*, on définit les normes :*

exo_boules_ouvertes_ouvertes

$$\forall \mathrm{P} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{P}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|, \quad \|\mathrm{P}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad \|\mathrm{P}\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}\|_2 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1.$$

exo_ouvert_voisinage_chaque_point

2. *Trouver une suite qui est bornée pour la norme* $\|.\|_\infty$ *mais pas pour la norme* $\|.\|_1$ *ou la norme* $\|.\|_2$.

Exercice 5.0.16 ♡

Sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{K})$*, on définit les normes :*

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que :*

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

2. *Trouver une suite qui converge vers* 0_E *pour la norme* $\|.\|_1$ *ou la norme* $\|.\|_2$ *mais pas pour la norme* $\|.\|_\infty$.

Exercice 5.0.17 ♡ **3**

Sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{K})$*, on pose :*

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\| = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t))|^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

1. *Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur* E.
2. *Montrer que :*

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|.$$

3. *On considère la suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$

   (a) *Calculer* $\|f_n\|$.
   (b) *Montrer que* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge vers la fonction nulle pour la norme* $\|.\|_\infty$
   (c) *Et que ce n'est pas le cas pour la norme* $\|.\|$.

5.0.2 Ouverts et fermés

Exercice 5.0.18 ♡ ***Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées sont fermées...***

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé.*

1. *Montrer qu'une boule ouverte de* E *est un ouvert de* E.
2. *Montrer qu'une boule fermée de* E *est un fermé de* E.
3. *Montrer qu'une sphère de* E *est un fermé de* E.

Exercice 5.0.19 ♡ ***Une partie d'un evn est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points***

Soit A *une partie d'un evn* $(\mathrm{E}, \|.\|)$*. Montrer que* A *est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points.*

Exercice 5.0.20 ♡ **Réunion et intersections d'ouverts, de fermés**

On considère un evn $(E, \|.\|)$.

1. (a) *Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte ;*
   (b) *Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte ;*
   (c) *En considérant la famille* $\left(B(0, \frac{n+1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *montrer qu'une intersection infinie d'ensembles ouverts n'est pas forcément ouverte ;*
2. (a) *Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est fermée ;*
   (b) *Montrer qu'une union finie de fermée est fermée ;*
   (c) *En considérant la famille* $\left(\overline{B}(0, \frac{n}{n+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *montrer qu'une union infinie d'ensembles fermés n'est pas forcément fermée.*

Exercice 5.0.21 ♡

Soit A *une partie ouverte d'un evn* $(E, \|.\|)$ *et* $B \subset E$.

1. *Montrer que* $A + B$ *est ouverte.*
2. *Qu'en est-il si* A *est fermé ? Si* A *et* B *sont fermés ?*

Exercice 5.0.22 ♡ **Tout fermé est une intersection décroissante d'ouverts**

Montrer que tout fermé peut s'écrire comme une intersection décroissante d'ouverts.

Exercice 5.0.23 ♡

Chacune des parties suivantes est-elle fermée ? ouverte ?

1. $A = \mathbb{N}^*$;
2. $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$;
3. $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 5.0.24 ♡♡

Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ *des polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *dont le coefficient dominant est égal à* 1 *est une partie fermée de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.0.25 ♡

Chacune des parties suivantes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *est-elle fermée ? bornée ?*

1. *L'ensemble* A *des matrices de trace* 2.
2. *L'ensemble* B *des matrices symétriques.*
3. *L'ensemble* C *des matrices orthogonales (c'est-à-dire des matrices* M *telles que* $M^T M = MM^T = I_n$*).*
4. *L'ensemble* D *des matrices diagonalisables.*

5.0.3 Intérieur, adhérence

Exercice 5.0.26 ♡♡

Montrer que $\overline{A} = E \setminus (E \setminus \mathring{A})$ *(ou autrement dit que* $\overline{A} = \left(\mathring{A^c}\right)^c$*).*

Exercice 5.0.27 ♡ **Propriétés de l'intérieur**

Soient deux parties A *et* B *d'un evn* $(E, \|.\|)$. *Montrer que :*

1. $\mathring{A} \subset A$.
2. $\mathring{A}$ *est une partie ouverte.*
3. $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A.
4. $\mathring{A} = \displaystyle\bigcup_{O\subset A;\, O \text{ ouvert}} O$.
5. A *ouvert* $\iff A = \mathring{A}$
6. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
7. $A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
8. $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
9. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ *(l'autre inclusion est fausse en général).*
10. $\mathring{A}^c = \overline{A^c}$.

Exercice 5.0.28 ♡ **Propriétés de l'adhérence**

Soient deux parties A *et* B *d'un evn* $(E, \|.\|)$ *et un point* $a \in E$.

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $\overline{A}$ *est un fermé.*
3. $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A.
4. $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{A\subset F;\, F \text{ fermé}} F$.
5. A *est fermé* $\iff A = \overline{A}$.
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
7. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *(l'autre inclusion est fausse en général).*
10. $\overline{A^c} = \mathring{A}^c$.

Exercice 5.0.29 ♡ **Adhérence d'un** Vect

Soit $(E, \|.\|)$ *un evn.*

1. *Montrer que pour toute partie* A *de* E *:*
$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$
2. *En déduire que pour tout sev* F *de* E, $\overline{F}$ *est un sev de* E.

Exercice 5.0.30 ♡ **Diamètre d'une partie bornée**

Si $A \subset E$ *est une partie non-vide et bornée d'un evn, on définit son diamètre par :*
$$\delta(A) = \sup\{\|x - y\| ;\ (x, y) \in A^2\}$$
On considère deux parties bornées non-vides A *et* B *de* E.

1. *Vérifier que* $\delta(A)$ *est bien défini.*
2. *Si* $A \subset B$, *montrer que* $\delta(A) \leqslant \delta(B)$.
3. *Si* $A \cap B \neq \varnothing$, *montrer que* $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.
4. *Montrer qu'il existe deux suites* $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *et* $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *telles que*
$$\|a_n - b_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta(A)$$
5. *Montrer que* $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

Exercice 5.0.31 ♡

Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.

1. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$;
2. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1\}$;
3. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\leqslant 1\}$;
4. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\}$;
5. $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q}\}$;
6. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$.

Exercice 5.0.32 ♡

On définit un sous-ensemble A *de* $\mathbb{R}^2$ *en posant*

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 2\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. *L'ensemble* A *est-il connexe ?*

Exercice 5.0.33 ♡

Montrer que $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<x^3+y^3\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.0.34 ♡ ***Le graphe sur*** $\mathbb{R}$ ***d'une fonction continue est fermé***

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que l'ensemble* $G=\{\left(x,f(x)\right);\ x\in\mathbb{R}\}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^2$ *(muni d'une norme usuelle).*

Exercice 5.0.35 ♡

On considère l'evn $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur le segment* $[0,1]$ *et les deux normes*

$$\|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

1. *On note* $A=\{f\in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\}$ *l'ensemble des fonctions de moyenne nulle. La partie* A *est-elle fermée pour* $\|.\|_1$ *? Pour* $\|.\|_\infty$ *?*
2. *La partie* $B=\{f\in E \mid f(0)=0\}$ *est-elle fermée dans* $(E,\|.\|_\infty)$ *? Dans* $(E,\|.\|_1)$ *?*
3. *On note* $C=\{f\in E \mid \forall n\in\mathbb{N}, f(2^{-n})\geqslant 0\}$. *la partie* C *est-elle fermée pour* $\|.\|_\infty$ *?*

Exercice 5.0.36 ♡

Soit $(E,\|.\|$ *un evn.*

1. *Soit* F *un sev de* E *d'intérieur non vide. Montrer que* $F=E$.
2. *On prend* $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme infinie* $\|.\|_\infty$. *On prend pour* $F=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. *Montrer que* $\overset{\circ}{F}=\varnothing$.
3. *Reprendre la question précédente avec* F *l'ensemble des application polynomiales sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles, puis avec* F *l'ensemble des applications continues et monotones sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles.*

5.0.4 Limite et continuité en un point

Exercice 5.0.37 ♡

Existence de limite en $(0,0)$ *des fonctions*

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y)=\dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$.
3. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}$
4. $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{ch}(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2}$
5. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$
6. $f(x,y)=xy\sin\frac{1}{x}$
7. $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$
8. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercice 5.0.38 ♡

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ *des fonctions* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *données par :*

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
3. $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}{x+y}$
4. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$
5. $f(x,y)=\dfrac{xy}{\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y}$
6. $f(x,y)=\dfrac{\sin x-y}{x-\sin y}$.

Exercice 5.0.39 ♡♡

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$F:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\setminus(0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}\end{array}\right.$$

Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

5.0.5 Continuité sur une partie

Exercice 5.0.40 ♡♡

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1\\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.0.41 ♡

Montrer que l'application

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq 0_{\mathbb{R}^2}\\ 0 & \text{si}\quad (x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\end{cases}\end{array}\right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

[redacted]**Exercice 5.0.42**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que l'application

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est continue sur son ensemble de définition.

[redacted]**Exercice 5.0.43**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que l'application

$$f : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

[redacted]**Exercice 5.0.44**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pose*

$$g(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

1. *Montrer que* g *définit une bijection de* E *sur la boule ouverte* $\mathrm{B}(0, 1)$ *de* E.
2. *Prouver que* g *et* g^{-1} *sont continues.*

[redacted]**Exercice 5.0.45**[redacted] ♡ [redacted] ***Oral ENSAM PT*** [redacted]

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et*

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

Montrer que g *est prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}^2$.

[redacted]**Exercice 5.0.46**[redacted] ♡ [redacted]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *continues vérifiant :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x^2) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x + 1) = f(x)$.

[redacted]**Exercice 5.0.47**[redacted] ♡ [redacted] ***CCP 2007*** [redacted]

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues *vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

[redacted]**Exercice 5.0.48**[redacted] ♡ [redacted]

On note $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}\}$

1. *Vérifier que* E *est un sev de* $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *qui contient les fonctions affines.*
2. *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *On définit la fonction affine* g *qui coïncide avec* f *en* 0 *et* 1 *et on pose* $h = f - g$. *Montrer que* $h = 0$.
3. *Conclure.*

[redacted]**Exercice 5.0.49**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

1. *Montrer que* $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* $\mathrm{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = f(y)\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$.

[redacted]**Exercice 5.0.50**[redacted] ♡ [redacted] ***1*** [redacted]

Soit $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$ *une application continue. On définit son graphe :*

$$\mathrm{G} = \{(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F} \mid y = f(x)\}$$

Montrer que G *est un fermé de* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

[redacted]**Exercice 5.0.51**[redacted] ♡ [redacted]

Dans l'evn $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$, *montrer que les parties suivantes sont fermées.*

1. $\mathrm{A} = \{f \in \mathrm{E} \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$
2. $\mathrm{B} = \{f \in \mathrm{E} \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(2^{-n}) \geqslant 0\}$

[redacted]**Exercice 5.0.52**[redacted] ♡ [redacted] ***Caractérisation topologique de la continuité*** [redacted]

Soit $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}'$

1. *Si l'image réciproque de tout ouvert de* E' *est ouvert dans* E, *montrer que* f *est continue sur* E.
2. *Soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}'$, *vérifier que* $\mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{E}' \setminus \mathrm{A})$.
3. *Montrer que si l'image réciproque de tout fermé de* E' *par* f *est un fermé de* E, *alors* f *est continue sur* E.

[redacted]**Exercice 5.0.53**[redacted] ♡ [redacted] $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ [redacted]

On considère l'espace des matrices $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) muni de la norme* $\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} |a_{ij}|$.

1. *Montrer que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de* E.
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer qu'il existe* $r > 0$ *tel que :*
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad 0 < |\lambda| < r \implies \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$
3. *En déduire que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* E.

[redacted]**Exercice 5.0.54**[redacted] ♡ [redacted]

Soient E *et* F *deux evn. Soient* E_1, E_2 *deux fermés de* E *tels que* $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$ *et soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application telle que* $f_{|\mathrm{E}_1}$ *et* $f_{|\mathrm{E}_2}$ *sont continues. Montrer que* f *est continue.*

[redacted]**Exercice 5.0.55**[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(\mathrm{E}, \langle .|. \rangle)$ *un espace euclidien. Montrer que l'ensemble* $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x, y) \text{ est libre}\}$ *est un ouvert de* E^2.

Exercice 5.0.56 ♡

Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un evn et soit* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E.

1. *Montrer que* u *est continue si et seulement si* u *est bornée sur la sphère unité* $\mathrm{S}(0,1) = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x\| = 1\}$.
2. *En déduire que* u *est continue si et seulement si la partie*
$$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \|u(x)\| = 1\}$$
est fermée.

Exercice 5.0.57 ♡♡♡ ***X 1994***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et* $f, g : [a,b] \to [a,b]$ *deux fonctions continues sur* $[a,b]$ *telles que* $f \circ g = g \circ f$. *On note* f^n *et* g^n *leurs* n*-ième itérées.*

1. *Montrer que si* $f > g$ *alors* $f^n > g^n$ *et même qu'il existe* $\mathrm{K} > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(x) \geqslant n\mathrm{K} + g^n(x)$.
2. *Que dire de l'équation* $f(x) = g(x)$ *?*

5.0.6 Applications lipschitziennes

Exercice 5.0.58 ♡

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. *Montrer que* f *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* f' *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.0.59 ♡

Soient f, g *deux applications définies sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que si* f *et* g *sont bornées et lipschitziennes sur* $\mathbb{R}$ *alors* fg *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.0.60 ♡ ***Point fixe et application contractante***

Soient $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *une application* k*-lipschitzienne avec* $k \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit* $l \in \mathrm{E}$ *tel que* $f(l) = l$ *et soit* (u_n) *une suite de vecteurs de* E *définie par* $u_0 \in \mathrm{E}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - l\| \leqslant k^n \|u_0 - l\|$.
2. *Que dire si* f *est contractante, c'est-à-dire si* $k < 1$ *?*

Exercice 5.0.61 ♡

1. *Si* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *est une fonction telle que* f' *est bornée sur* I, *montrer que* f *est lipschitzienne sur* I.
2. *La fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *est-elle lipschitzienne ?*
3. *La fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ *est-elle lipschitzienne ?*

Exercice 5.0.62 ♡

Soient deux evn E *et* F *et une application lipschitzienne* $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$. *Montrer qu'il existe deux constantes* $a, b > 0$ *telles que* $\forall x \in \mathrm{E}$,
$$\|f(x)\| \leqslant a\|x\| + b$$

Exercice 5.0.63 ♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et soit*
$$\mathrm{E} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est lipschitzienne sur } [a,b] \quad \text{et} \quad f(a) = 0 \right\}.$$
On pose pour tout $f \in \mathrm{E}$,
$$\|f\| = \inf\left\{ k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in [a,b], \quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant k\left|y - x\right| \right\}.$$
Montrer que $\|.\|$ *définie une norme sur* E.

Exercice 5.0.64 ♡ ***Oral CCP MP***

E *et* F *désignent deux espaces vectoriels normés.*

1. *Soient* f *une application de* E *dans* F *et* a *un point de* E.
On considère les propositions suivantes :
   - **P1.** f *est continue en* a.
   - **P2.** *Pour toute suite* (x_n) *d'éléments de* E *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit* A *une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé* E, *et soient* f *et* g *deux applications continues de* E *dans* F, F *désignant un espace vectoriel normé.*
Démontrer que si, pour tout $x \in \mathrm{A}$, $f(x) = g(x)$, *alors* $f = g$.

Exercice 5.0.65 ♡♡ ***Distance d'un point à une partie***

Soit A *une partie non vide d'un espace vectoriel normé* $(\mathrm{E}, \|.\|)$. *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pose :*
$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a).$$

1. *Montrer que l'application* $x \mapsto d(x, \mathrm{A})$ *est bien définie et lipschitzienne sur* E.
2. *Montrer que* $d(x, \mathrm{A}) = 0$ *si et seulement si* $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

5.0.7 Applications linéaires continues

Exercice 5.0.66 ♡ ***Norme subordonnée à une application linéaire***

Soient deux evn $(\mathrm{E}, \|.\|_{\mathrm{E}})$ *et* $(\mathrm{F}, \|.\|_{\mathrm{F}})$ *et* $u \in \mathfrak{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *une application linéaire continue. On définit la norme de l'application linéaire* u *:*
$$|||u||| = \sup_{\|x\|_{\mathrm{E}} \leqslant 1} \|u(x)\|_{\mathrm{F}}$$

1. *Montrer que* $|||.|||$ *est une norme sur l'espace* $\mathfrak{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
2. *Montrer que* $|||u||| = \sup\limits_{x \neq 0_{\mathrm{E}}} \dfrac{\|u(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}}$.

3. *Montrer que* $|||u||| = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$.

exo:2006:Oct:Mon:19:17:04

4. *Montre que :*
   (a) *Si* $k \geqslant 0$ *est une constante telle que* $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$, *alors* $|||u||| \leqslant k$;
   (b) $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\,\|x\|_E$;
   (c) $|||u||| = \min\{k \geqslant 0 \mid \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$.

   En d'autres termes, $|||u|||$ *est* la plus petite constante k *vérifiant* $\|u(x)\| \leqslant k\|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

5. *Soient trois evn* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *et* $(G, \|.\|_G)$ *et deux applications linéaires continues*

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Alors la composée $v \circ u$ *est également continue,* $v \circ u \in \mathfrak{L}_c(E, G)$ *et*

$$\boxed{|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||}$$

Exercice 5.0.67 ♡

Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, *on considère les normes définies par* $\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{d} |a_n|$ *et* $\|P\|_\infty = \max_{0\leqslant n\leqslant d} |a_n|$ où $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$. *On considère les applications linéaires :*

1. $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$
2. $v : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{cases}$
3. $w : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{cases}$

Étudier la continuité des applications u, v *et* w *pour chacune des normes et le cas échéant, calculer* $|||u|||$ $|||v|||$ *et* $|||w|||$.

Exercice 5.0.68 ♡

On note $E = \mathscr{C}([0,1])$, *muni des normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$. *Étudier la continuité et calculer éventuellement la norme des applications linéaires :*

1. $I : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,dt \end{cases}$
2. $\delta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{cases}$

Exercice 5.0.69 ♡

On considère les evn $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et* $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. *Soit* T *l'application définie par* $\forall f \in E,\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
Montrer que T *est continue et calculer sa norme subordonnée.*

Exercice 5.0.70 ♡♡♡

Soit $(E, \|.\|)$ *un evn de dimension finie et soit* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Montrer que les sev $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ *sont supplémentaires.*

Exercice 5.0.71 ♡♡♡

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et soient* p, q *deux projecteurs de* E. *On suppose que*

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0 \implies \left\|p(x) - q(x)\right\| < \|x\|.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(q)$.

Exercice 5.0.72 ♡

On considère $E = \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *définie pour tout* $f \in E$ *par* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|f(t)\right|$. *On considère*

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 \frac{t f(t)}{1+t^2}\,dt \end{cases}.$$

1. *Montrer que* φ *est bien définie et linéaire.*
2. *Montrer que* φ *est continue.*

Exercice 5.0.73 ♡

1. *Montrer que la sphère unité* S *de* $\mathbb{R}^n$ *pour la norme* $\|.\|_2$ *est un fermé borné de* $\mathbb{R}^n$.
2. *On assimile tout vecteur* $x \in \mathbb{R}^n$ *au vecteur* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de ses coordonnées dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Pour* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on introduit*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & X^T A X \end{cases}.$$

   (a) *Montrer que* φ *est continue.*
   (b) *En déduire qu'il existe deux réels* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall X \in S, \quad a \leqslant \varphi(X) \leqslant b \quad \text{et} \quad \exists (X_1, X_2) \in S^2 : \quad \varphi(X_1) = a \quad \text{et} \quad \varphi(X_2) = b.$$

Exercice 5.0.74 ♡

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et soit* $u \in \mathfrak{L}(E)$.

1. *Montrer que* $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ *est un fermé borné de* E.
2. *Montrer qu'il existe un vecteur* $x_0 \in E$ *unitaire tel que* $\|u(x_0)\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|u(x)\|\}$.

Exercice 5.0.75

Soient $(\mathrm{E},\|.\|_{\mathrm{E}})$ *et* $(\mathrm{F},\|.\|_{\mathrm{F}})$ *deux espaces vectoriels normés et soit* $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *une application linéaire de* E *dans* F*. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

1. (a) *u est continue sur* E *;*
   (b) *u est continue au point* 0_{E} *;*
   (c) *u est bornée sur la boule fermée* $\overline{\mathrm{B}}(0_{\mathrm{E}},1)$ *;*
   (d) *il existe une constante* $k>0$ *telle que* $\forall x\in\mathrm{E},\ \|u(x)\|_{\mathrm{F}}\leqslant k\|x\|_{\mathrm{E}}$ *;*
   (e) *u est une application lipschitzienne.*
2. *Exemples :*
   (a) *L'application*
   $$u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \varphi & \longmapsto & u(\varphi)=\varphi(0)\end{array}\right.$$
   est-elle lipschitzienne quand $\mathrm{E}=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *est successivement muni des normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$ *?*
   (b) *Montrer que l'application*
   $$u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{X}^k & \longmapsto & a_n\end{array}\right.$$
   est lipschitzienne sur $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 5.0.76 ♡

Soient $(\mathrm{E},\|.\|_{\mathrm{E}})$ *et* $(\mathrm{F},\|.\|_{\mathrm{F}})$ *deux espaces vectoriels normés.*

1. *Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* F *est un espace vectoriel qu'on notera* $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
2. *Montrer que l'on définit une norme sur* $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *en posant :*
   $$\forall f\in\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \|f\|=\sup_{x\in\mathrm{E},x\neq0}\frac{\|f(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}}.$$
3. *Vérifier que l'on a :*
   $$\forall f\in\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \|f\|=\sup_{x\in\mathrm{E},\|x\|_{\mathrm{E}}=1}\|f(x)\|_{\mathrm{F}}.$$
4. *Montrer que si* $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ *alors* $\|.\|$ *est une norme d'algèbre, c'est-à-dire que l'on a :*
   $$\forall (f,g)\in\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})^2,\quad \|f\circ g\|\leqslant\|f\|\,\|g\|.$$
5. *Déduire des questions précédentes des exemples de norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.0.77 ♡ ***CCP 2009***

Soit A *une matrice à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *vérifiant*
$$4\mathrm{A}^3+2\mathrm{A}^2+\mathrm{A}=0.$$

1. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*. Montrer que l'application :*
   $$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{PMP}^{-1}\end{array}\right.$$
   est continue.
2. *Montrer que :*
   $$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\quad |\lambda|\leqslant\frac{1}{2}.$$
3. *On admet dans la suite de l'exercice que* A *est diagonalisable.*
   (a) *Montrer que* $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite.*
   (b) *Montrer qu'une suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire.*
   (c) *Que peut-on en déduire ?*
   (d) *Conclusion pour* A *?*

5.0.8 Suites vectorielles

Exercice 5.0.78 ♡♡

Soient deux suites vectorielles $(u_n)\in\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)\in\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$*. Montrer que*
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n\Longrightarrow\|u_n\|\underset{n\to+\infty}{\sim}\|v_n\|$$

Exercice 5.0.79 ♡♡

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn de dimension finie et* $(x_n)\in\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *qui converge vers* $a\in\mathrm{E}$*. Montrer que la suite* (u_n) *de terme général*
$$u_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$$
converge aussi vers a.

Exercice 5.0.80 ♡

Étudier la suite $((a_n,b_n))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *définie par* $(a_0,b_0)\neq0_{\mathbb{R}^2}$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*
$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+b_n^2}\quad\text{et}\quad b_{n+1}=\frac{b_n}{a_n^2+b_n^2}.$$

Exercice 5.0.81 ♡

On considère la suite $(Z_n) = ((x_n, y_n, z_n))$ *de* $\mathbb{R}^3$ *définie par* $Z_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *et pour tout* n *par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{6}z_n + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n - \frac{7}{6} \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* (Z_n) *vérifie une relation de récurrence de la forme* $Z_{n+1} = AZ_n + B$.
2. *Montrer que pour tout vecteur* $X \in \mathbb{R}^3$, *on a :* $\|AX\|_\infty \leqslant k\|X\|_\infty$ *où* $k \in]0,1[$.
3. *Montrer que l'équation* $X = AX + B$ *admet une unique solution* L *dans* $\mathbb{R}^3$
4. *Déduire de ce qui précède et d'une récurrence une inégalité concernant* $\|Z_n - L\|_\infty$, $\|Z_0 - L\|_\infty$, n *et* k. *Conclure quand à la convergence de* (Z_n).

Exercice 5.0.82 ♡ **Oral CCP MP**

E *et* F *désignent deux espaces vectoriels normés.*

1. *Soient* f *une application de* E *dans* F *et* a *un point de* E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f *est continue en* a.

   P2. *Pour toute suite* (x_n) *d'éléments de* E *telle que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit* A *une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé* E, *et soient* f *et* g *deux applications continues de* E *dans* F, F *désignant un espace vectoriel normé.*
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, *alors* $f = g$.

Exercice 5.0.83 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. *Étudier la convergence de* $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.0.84 ♡♡ **CCP 2000, CCP 2005**

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que* M *est trigonalisable.*
2. *Soit* $\mathrm{Sp}(M)$ *l'ensemble des valeurs propres de* M *et* $f(M) = \sup\left\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$. *Prouver l'équivalence suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = 0 \iff f(M) < 1.$$

Exercice 5.0.85 ♡ **Mines 2005**

Pour tout entiers naturels $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, *on pose :*

$$X_n = \begin{pmatrix} e_n(1) \\ \vdots \\ e_n(p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \forall j \in [\![1,n]\!], \quad e_{n+1}(j) = \frac{1}{p-1} \sum_{i\in[\![1,p]\!], i\neq j} e_n(i).$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite*

Exercice 5.0.86 ♡ **Centrale 2009**

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On définit alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$\begin{cases} X_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}.$$

1. *Calculer* $X_1, X_2, \ldots, X_{10}, X_{20}$ *et* X_{50}. *Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*
2. *Montrer que* $I_4 - A$ *est inversible et calculer son inverse* M.
3. *Supposons que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et notons* L *sa limite. Calculer* L *et confronter à la question 1.*
4. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - L$. *Trouver une relation de récurrence entre* Y_{n+1} *et* Y_n. *Déterminer les valeurs propres de* A *et étudier sa diagonalisablilité.*
   Conclure quand à la convergence de (Y_n) *puis de* (X_n).

Exercice 5.0.87 ♡♡ **ENS Lyon 2000**

Soit $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice nilpotente non nulle et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* λ *pour que la suite* $\left((N + \lambda I_n)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5.0.9 Exercice sur les normes matricielles

Exercice 5.0.88 ♡

Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on pose* $\|A\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$.

1. *Montrer que* $\|.\|$ *est une norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Prouver que pour tout* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

Exercice 5.0.89 ♡

On pose

$$N_\infty(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

1. *Calculer* $N_\infty(I_n)$ *et* $N_\infty(H)$.
2. *Montrer que* N_∞ *définit une norme sur* E.
3. *Montrer que* $\forall (A,B)\in E^2$, $N_\infty(AB)\leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$.

1−2 [redacted]***Exercice 5.0.90***[redacted] ♡ [redacted]

On définit de même,

$$N_1(A)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

1. *Calculer* $N_1(I_n)$ *et* $N_1(H)$.
2. *Exprimer* $N_1(A)$ *à l'aide de* N_∞.
3. *En déduire que* N_1 *est une norme sur* E *qui vérifie*

$$\forall (A,B)\in E^2,\quad N_1(AB)\leqslant N_1(A)N_1(B)$$

5.0.10 Suites de matrices

[redacted]***Exercice 5.0.91***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $A,B\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ *tels que* $(AB)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. *Montrer que* $(BA)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

[redacted]***Exercice 5.0.92***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $A,B,P,Q\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ *telles que*

$$A^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}P\quad\text{et}\quad B^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}Q.$$

On suppose que A *et* B *commutent. Montrer qu'il en est de même de* P *et* Q.

[redacted]***Exercice 5.0.93***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $(A_n)\in(GL_m(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ *une suite de matrices inversibles,* A, $B\in\mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$. *On suppose que* $A_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}A$ *et que* $A_n^{-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}B$. *Montrer que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

[redacted]***Exercice 5.0.94***[redacted] ♡ [redacted] Les matrices antisymétriques forment une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. [redacted]

Soit $A\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ *une matrice antisymétrique. On suppose que* $A^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}B\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. *Que dire de* B.

[redacted]***Exercice 5.0.95***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *A quelle condition sur* A *existe-t-il* $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $M^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}A$?

[redacted]***Exercice 5.0.96***[redacted] ♡ [redacted]

On considère la matrice

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&5&-4\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Après avoir diagonalisé A, *déterminer la limite de* (A^n).

[redacted]***Exercice 5.0.97***[redacted] ♡ [redacted] ***X 2005*** [redacted]

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On pose*

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}.$$

1. *Donner des exemples de normes sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Majorer* $\|A^k\|_\infty$.
2. *Justifier l'existence de* e^A.
3. *Montrer que* $e^{A^T}=\left(e^A\right)^T$.
4. *Montrer que* $\det(e^A)=e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
5. *Montrer qu'en général* $e^A.e^B\neq e^{A+B}$.
6. *À quelle condition suffisante a-t-on l'égalité ?*

5.0.11 Topologie dans les espaces matriciels

[redacted]***Exercice 5.0.98***[redacted] ♡ [redacted]

On considère $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}_n[X]$ *munis d'une de leur norme ainsi que l'application*

$$\chi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})&\longrightarrow&\mathbb{K}_n[X]\\ A&\longmapsto&\chi_A\end{array}\right..$$

Montrer que φ *est continue.*

[redacted]***Exercice 5.0.99***[redacted] ♡ [redacted]

Prouver que $GL_n(\mathbb{R})$ *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

[redacted]***Exercice 5.0.100***[redacted] ♡ [redacted]

On munit le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *d'une norme* $\|.\|$.

1. *Montrer que toute matrice* $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est limite d'une suite de matrices inversibles.*
2. *Soient* $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On admet que si* A *est inversible alors* $\chi_{AB}=\chi_{BA}$. *Montrer que ce résultat reste vrai si* A *est quelconque.*

[redacted]***Exercice 5.0.101***[redacted] ♡ [redacted] ***Théorème de Cayley-Hamilton, preuve topologique*** [redacted]

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ *l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer que toute matrice triangulaire supérieure de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$.
2. *En déduire que toute matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$.
3. *Montrer que si* $A\in\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ *alors son polynôme caractéristique annule* A.
4. *En déduire que* $\forall A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A)=0$.

[redacted]***Exercice 5.0.102***[redacted] ♡♡ [redacted]

1. *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{N}$ *des matrices nipotentes de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *est un fermé de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *Est-il compact ?*
2. *Montrer que* $\mathscr{N}$ *est d'intérieur vide.*

5.0.12 Compacts

[redacted]**_Exercice 5.0.103_**[redacted] ♡ [redacted] **_Théorème de Riesz dans un espace préhilbertien_** [redacted]

Soit E *un espace préhilbertien réel de dimension infinie et* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormale :* $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \left(e_i \mid e_j\right)=\delta_{ij}$.

1. *Calculer pour* $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\|e_i-e_j\|$.
2. *En déduire qu'il n'existe aucune suite extraite de* (e_n) *convergente.*
3. *Montrer que la sphère unité d'un espace préhilbertien réel est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.*

[redacted]**_Exercice 5.0.104_**[redacted] ♡ [redacted] **_Le groupe orthogonal est compact_** [redacted]

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})=\left\{\mathrm{M}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\mid \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}=\mathrm{I}_n\right\}$ *est compact dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

[redacted]**_Exercice 5.0.105_**[redacted] ♡♡♡ [redacted] **_X 2009_** [redacted]

Montrer qu'on ne peut recouvrir le plan par des cercles de rayon non nul disjoints entre eux.

5.0.13 Convexes

[redacted]**_Exercice 5.0.106_**[redacted] ♡ [redacted] **_Les simplexes sont des convexes_** [redacted]

Montrer que le simplexe de $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_n=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i=1\right\}$$

est un convexe.

[redacted]**_Exercice 5.0.107_**[redacted] ♡ [redacted] **_Les applications linéaires préservent la convexité_** [redacted]

1. *Prouver que l'image directe d'un convexe par une application linéaire est convexe.*
2. *Montrer qu'il en est de même pour l'image réciproque.*

[redacted]**_Exercice 5.0.108_**[redacted] ♡ [redacted] **_Les normes sont des application convexes_** [redacted]

Soit $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Montrer que* $\|.\|$ *est un application convexe, c'est-à-dire que*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\quad \forall t\in[0,1],\quad \left\|tx+(1-t)y\right\|\leqslant t\|x\|+(1-t)\left\|y\right\|.$$

[redacted]**_Exercice 5.0.109_**[redacted] ♡ [redacted] **_Une intersection quelconque de convexes est convexe_** [redacted]

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn et* $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties convexes de* E. *Montrer que* $\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{C}_i$ *est encore convexe.*

[redacted]**_Exercice 5.0.110_**[redacted] ♡♡ [redacted] **_L'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes_** [redacted]

Soient $(\mathrm{E},\|.\|)$ *un evn et* C *une partie convexe de* E. *Montrer que* $\mathring{\mathrm{C}}$ *et* $\overline{\mathrm{C}}$ *sont convexes.*

[redacted]**_Exercice 5.0.111_**[redacted] ♡ [redacted]

Soit A *un convexe d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et soit* $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. *Montrer que si* $x_1,\dots,x_n\in\mathrm{A}$ *et si* $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}_+$ *sont tels que* $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ *alors* $\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\in\mathrm{A}$.

5.0.14 Normes équivalentes

[redacted]**_Exercice 5.0.112_**[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *(où* $n\in\mathbb{N}^*$*) et soit* F *l'ensemble des polynômes de* E *donc le terme de plus haut degré est égal à* 1. *Montrer qu'il existe un réel* $a>0$ *tel que :*

$$\forall \mathrm{P}\in\mathrm{F},\quad \int_0^1|\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t\geqslant a.$$

[redacted]**_Exercice 5.0.113_**[redacted] ♡ [redacted] **_Équivalence des_** 3 **_normes principales sur_** $\mathbb{K}^n$ [redacted]

Montrer que sur $\mathbb{K}^n$, *on a*

$$\|.\|_1\leqslant\sqrt{n}\|.\|_2\leqslant n\|.\|_{+\infty}\leqslant n\|.\|_1.$$

[redacted]**_Exercice 5.0.114_**[redacted] ♡ [redacted]

1. *On note* $\mathscr{P}_n$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *normalisés (de coefficient dominant qui vaut* 1*). Montrer qu'il existe* $\alpha_n>0$ *tel que*
$$\forall \mathrm{P}\in\mathscr{P}_n,\quad \sup_{x\in[0,1]}|\mathrm{P}(x)|\geqslant\alpha_n$$
2. *On note* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *normalisés. Existe-t-il une constante* $\alpha>0$ *tel que* $\forall \mathrm{P}\in\mathscr{P},\ \sup_{x\in[0,1]}|\mathrm{P}(x)|\geqslant\alpha$ *?*

[redacted]**_Exercice 5.0.115_**[redacted] ♡ [redacted] **_Oral CCP MP_** [redacted]

Soient E, F *deux espaces vectoriels normés sur le corps* $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que si* f *est une application linéaire de* E *dans* F, *alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :*

   P1. f *est continue sur* E.

   P2. f *est continue en* 0_{E}.

   P3. $\exists k>0$ *tel que* $\forall x\in\mathrm{E}, \left\|f(x)\right\|\leqslant k\|x\|$.

2. *Soit* E *l'espace vectoriel des applications continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme définie par :* $\|f\|=\sup_{x\in[0;1]}|f(x)|$. *On considère l'application* φ *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*
$$\varphi(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
   Démontrer que φ *est linéaire et continue.*

[redacted]**_Exercice 5.0.116_**[redacted] ♡ [redacted] **_Oral CCP MP_** [redacted]

On note E *l'espace vectoriel des applications continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall f\in\mathrm{E}$, $\mathrm{N}_\infty(f)=\sup_{x\in[0;1]}|f(x)|$ *et* $\mathrm{N}_1(f)=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$.

1. (a) *Démontrer que* N_∞ *et* N_1 *sont deux normes sur* E.
   (b) *Démontrer qu'il existe* $k>0$ *tel que, pour tout* f *de* E, $\mathrm{N}_1(f)\leqslant k\mathrm{N}_\infty(f)$.
   (c) *Démontrer que tout ouvert pour la norme* N_1 *est un ouvert pour la norme* N_∞.
2. *Démontrer que les normes* N_1 *et* N_∞ *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 5.0.117 ♡ ***Oral CCP MP***

On note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.*

$\forall\, \mathrm{P}\in\mathrm{E}$, *on pose* $\mathrm{N}_1(\mathrm{P})=\sum_{i=0}^{n}|a_i|$ *et* $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P})=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ *où* $\mathrm{P}=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{X}^i$ *avec* $n\geqslant \deg \mathrm{P}$.

1. (a) *Démontrer que* N_1 *et* N_∞ *sont des normes sur* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   (b) *Démontrer que tout ouvert pour la norme* N_∞ *est un ouvert pour la norme* N_1.
   (c) *Démontrer que les normes* N_1 *et* N_∞ *ne sont pas équivalentes.*
2. *On note* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à* k. *On note* N_1' *la restriction de* N_1 *à* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ *et* N_∞' *la restriction de* N_∞ *à* $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$.
   Les normes N_1' *et* N_∞' *sont-elles équivalentes ?*