Chapitre 4

Intégration sur un intervalle

4.0.1 Fonctions continues par morceaux, intégrale sur un segment

Exercice 4.0.1 ♡

La fonction f *définie sur* $[-1,2]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^3 & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases}$$

est-elle continue par morceaux sur $[-1,2]$ *?*
Qu'en est-il si on remplace $1-x$ *par* $\frac{1}{x}$ *sur* $]0,1[$ *?*

Exercice 4.0.2 ♡

On considère une fonction g *définie sur* $[0,1]$ *par* $g(x) = n$ *si il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x = 1/n$ *et* $g(x) = 0$ *sinon est-elle continue par morceaux sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 4.0.3 ♡

Montrer que la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

est constante et calculer sa valeur.

Exercice 4.0.4 ♡ ***CCP MP***

On considère la fonction H *définie sur* $]1;+\infty[$ *par* $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. *Montrer que* H *est* C^1 *sur* $]1;+\infty[$ *et calculer sa dérivée.*
2. *Montrer que la fonction* u *définie par* $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ *admet une limite finie en* $x = 1$.
3. *En utilisant la fonction* u *de la question 2., calculer la limite en* 1^+ *de la fonction* H.

4.0.2 Intégrales généralisées

Exercice 4.0.5 ♡ ***En revenant à la définition***

Étudier en revenant à la définition la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_\pi^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{t^2}\right) e^{it^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$;
3. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\ln t \ln(\ln t)}\,\mathrm{d}t$;
4. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.6 ♡

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 4.0.7 ♡

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$,
4. $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty} e^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$,
6. $\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{argsh}(t)}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.8 ♡

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha - t^\beta}$ avec $0<\alpha<\beta$;
2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha + t^\beta}$ avec $\alpha \leqslant \beta$;
3. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 t}{(1+t^2)^\alpha}\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
4. $\int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$;
5. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^2}\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$;
6. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(at)-\arctan(bt)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.9 ♡

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3} - t^{1/3}\right)^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_0^{+\infty} \left(\left(t^3+3at+3b\right)^{1/3}\right) + t^2\ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)\mathrm{d}t$;
3. $\int_1^{+\infty} t^\alpha \sin^2 t\,\mathrm{d}t,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.10 ♡

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t\mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathrm{I}=[0,+\infty[$,
2. $f : t\mapsto \frac{t}{e^t-1}$ sur $\mathrm{I}=]0,+\infty[$,
3. $f : t\mapsto \frac{\cos(mt)}{a^2+t^2}$ sur $\mathrm{I}=[0,+\infty[$ $(a\neq 0)$,
4. $f : t\mapsto \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}$ sur $\mathrm{I}=]0,1]$,
5. $f : t\mapsto \frac{e^{i\omega t}}{t^2+1}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$,
6. $f : t\mapsto \ln\left(\dfrac{1+t^3}{1+t^4}\right)$ sur $\mathrm{I}=]-1,+\infty[$.

Exercice 4.0.11 ♡

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t\mapsto \frac{t}{\ln t}$ sur $\mathrm{I}=]1,+\infty[$,
2. $f : t\mapsto \frac{\ln^k t}{1+t^2}$ sur $\mathrm{I}=]0,+\infty[$,
3. $f : t\mapsto \frac{1}{e^t+t^2e^{-t}}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$,
4. $f : t\mapsto \frac{\ln t}{t(1-t^2)}$ sur $\mathrm{I}=]1,+\infty[$,

exo_int_de_Bertrand

5. $f : t\mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$,
6. $f : t\mapsto \frac{e^{-t}}{1+t^2}$ sur $\mathrm{I}=[0,+\infty]$

Exercice 4.0.12 ♡

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
2. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ sur $\mathrm{I}=[2,+\infty[$;
3. $f(t)=-\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ sur $\mathrm{I}=]0,1]$;
4. $f(t)=t^2e^{-t^2}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;

exo_int_impropre_de_moinsx_a_x

5. $f(t)=\dfrac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}$ sur $\mathrm{I}=]0,1[$;
6. $f(t)=\dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\operatorname{sh}(t)}$ sur $\mathrm{I}=]0,+\infty[$.

Exercice 4.0.13 ♡

Déterminez l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}$ sur $\mathrm{I}=]0,\pi/2]$;
2. $f(t)=\dfrac{\lfloor t\rfloor}{t^3}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
3. $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$ sur $\mathrm{I}=[0,+\infty[$;
4. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $\mathrm{I}=]-1,1[$;
5. $f(t)=\sin(1/t^2)\arctan(t^2)$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
6. $f(t)=-\dfrac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ sur $\mathrm{I}=]0,1]$.

Exercice 4.0.14 ♡

Étudier l'intégrabilité de :

1. $f : t\mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$.
2. $f : t\mapsto \mathrm{P}(t)e^{-t}$ sur $[0,+\infty[$ où P est un polynôme.
3. $f : t\mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $\mathrm{I}=]-1,1[$ où $f : [-1,1]\mapsto\mathbb{R}$ une fonction continue.
4. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $\mathrm{I}=]-1,1[$;
5. $f(t)=\sin(1/t^2)\arctan(t^2)$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
6. $f(t)=-\dfrac{\tan(\sqrt{t})}{\ln(\cos(\sqrt{t}))}$ sur $\mathrm{I}=]0,1]$.

Exercice 4.0.15 ♡

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle spécifié :

1. $f(t)=\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
2. $f(t)=\dfrac{1}{\tan t}$ sur $]0,\pi/2[$;
3. $f(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$;
4. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ sur $\mathrm{I}=[2,+\infty[$;
5. $f(t)=-\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ sur $\mathrm{I}=]0,1]$;
6. $f(t)=t^2e^{-t^2}$ sur $\mathrm{I}=[1,+\infty[$.

Exercice 4.0.16 ♡ **Intégrales de Bertrand**

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que la fonction* $f : t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ *est intégrable sur* $[2,+\infty[$ *si et seulement si* $\alpha>1$ *ou alors* $\alpha=1$ *et* $\beta>1$.
2. *Montrer que la fonction* $f : t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ *est intégrable sur* $[0,1/2[$ *si et seulement si* $\alpha<1$ *ou alors* $\alpha=1$ *et* $\beta>1$.

Exercice 4.0.17 ♡

1. *L'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ *est-elle convergente ?*
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u$. *Comment expliquer ce résultat ?*

3. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{2x}\frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

[redacted]**Exercice 4.0.18**[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

[redacted]**Exercice 4.0.19**[redacted] ♡ [redacted] **CCP MP** [redacted]

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. *La fonction* $x\longmapsto\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ *est-elle intégrable sur* $]2,+\infty[$ *?*
2. *Soit* a *un réel strictement positif.*
   La fonction $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ *est-elle intégrable sur* $]0,+\infty[$ *?*

[redacted]**Exercice 4.0.20**[redacted] ♡ [redacted] **Centrale PC 2011** [redacted]

1. *On considère la fonction*

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x+\sin x}\end{array}\right. .$$

   La fonction f *est-elle intégrale sur* $\mathbb{R}_+^*$ *?*

2. *L'intégrale* $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ *est-elle convergente ?*

[redacted]**Exercice 4.0.21**[redacted] ♡♡♡ [redacted] **X PC 2007** [redacted]

Montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ *de* $f:x\mapsto\dfrac{x}{1+x^9\sin^2(x)}$.

[redacted]**Exercice 4.0.22**[redacted] **2** [redacted]

[redacted]**Exercice 4.0.23**[redacted] **2** [redacted]

4.0.3 Calculs d'intégrales

[redacted]**Exercice 4.0.24**[redacted] ♡ [redacted]

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur convergence :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^n}\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty}te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
6. $\int_0^{+\infty}\frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour cette dernière intégrale, on pourra couper l'intégrale en deux intégrales sur $]0,1]$ *et* $[1,+\infty[$ *puis faire le changement de variable* $t\to1/t$.

[redacted]**Exercice 4.0.25**[redacted] ♡ [redacted]

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$,
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$,
3. $\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$,
4. $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

[redacted]**Exercice 4.0.26**[redacted] ♡ [redacted]

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^{\pi/2}\sin x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$,
3. $\int_0^{1}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$,
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$,
6. $\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$,

[redacted]**Exercice 4.0.27**[redacted] ♡ [redacted]

1. *Établir*

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

2. *En déduire la valeur de* I.

[redacted]**Exercice 4.0.28**[redacted] ♡ [redacted]

1. *À quelle condition sur* $\alpha\in\mathbb{R}$ *l'intégrale* $\mathrm{I}(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ *est-elle convergente ?*
2. *Calculer* $\mathrm{I}(3/2)$ *en admettant que* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

[redacted]**Exercice 4.0.29**[redacted] ♡ [redacted] **Intégrales d'Euler** [redacted]

On pose

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t\ \text{et}\ \mathrm{J}=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que les intégrales* I *et* J *sont bien définies et égales.*
2. *Calculer* $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ *et en déduire les valeurs de* I *et* J.

[redacted]**Exercice 4.0.30**[redacted] ♡ [redacted] **CCP PC** [redacted]

Montrer que l'intégrale suivante est convergente et la calculer :

$$\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

[redacted]**Exercice 4.0.31**[redacted] ♡ [redacted]

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

[redacted]**Exercice 4.0.32**[redacted] ♡ [redacted]

Justifier l'existence et calculer l'intégrale généralisée :

$$\mathrm{I}=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4.0.33 ♡ ***Classique***

On considère l'intégrale :

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

1. *Justifier l'existence de* I.
2. *Factoriser dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *le polynôme* X^4+1.
3. *Montrer que* $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$.

d. *En développant* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$*, calculer* I.

Exercice 4.0.34 ♡

Existence et calcul de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.0.35 ♡

On considère la fonction

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3|\sin t|}}\end{array}\right. .$$

1. *Étudier la nature de la série de terme général* $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$ *;*
2. *En déduire la nature de l'intégrale* $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.36 ♡

Prouver la convergence de $\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\mathrm{d}x$ *puis calculer cette intégrale.*

Exercice 4.0.37 ♡ ***Centrale***

Soit $f[0,1[\to\mathbb{R}$ *définie à partir du développement décimal propre :*

$$f:0,a_0a_1a_2a_3a_4\ldots\mapsto 0,a_1a_0a_2a_3a_4\ldots$$

1. *Étudier la continuité de* f.
2. *Calculer* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.38 ♡♡♡ ***Centrale PC 2016***

Soient a *et* b *deux fonctions définies et continues sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *Montrer que les solutions de l'équation différentielle* $(\varepsilon)\ :y'-ay=b$ *sont bornées si et seulement si* a *et* b *sont intégrables sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.0.39 ♡♡♡ ***X 2011***

Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

pour $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ *après avoir justifié sa convergence.*

4.0.4 Suites d'intégrales (propres ou) impropres

Exercice 4.0.40 ♡

Étudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{J}_n=\int_0^1 x^n\arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.0.41 ♡

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1 x^2\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.0.42 ♡

Soit une fonction $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ *continue. Étudier la limite de la suite de terme général :*

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.0.43 ♡

Déterminer un équivalent lorsque $x\to 0$ *de la fonction définie par :*

$$\mathrm{F}(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.0.44 ♡

Existence et calcul pour $n\in\mathbb{N}^\star$ *de* $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.

Exercice 4.0.45 ♡

On pose

$$\mathrm{J}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}$$

1. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, J_n *converge.*
2. *Calculer* J_0.
3. *Former une relation de récurrence engageant* J_n *et* J_{n+1}.
4. *Établir qu'il existe* $\mathrm{A}>0$ *tel que*

$$\mathrm{J}_n\sim\frac{\mathrm{A}}{\sqrt[3]{n}}$$

[redacted] **Exercice 4.0.46** [redacted] ♡ [redacted] **CCP PC, calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$** [redacted]

1. *Montrer que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x \geqslant 1+x.$$
En déduire
$$\forall t\in\mathbb{R},\quad 1-t^2\leqslant e^{-t^2}\leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
2. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes*
$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{I}_n=\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t\quad \text{et}\quad \mathrm{J}_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$$
puis établir
$$\mathrm{I}_n\leqslant \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}}\leqslant \mathrm{J}_n.$$
3. *On pose*
$$\mathrm{W}_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$
Établir
$$\mathrm{I}_n=\mathrm{W}_{2n+1}\quad \text{et}\quad \mathrm{J}_{n+1}=\mathrm{W}_{2n}.$$
4. *Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.*
En déduire la constance de la suite de terme général $u_n=(n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1}$.
5. *Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.*

[redacted] **Exercice 4.0.47** [redacted] ♡ [redacted] **Calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$** [redacted]

1. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que la fonction $g:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ définie par*
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} & \text{si } 0<x\leqslant\pi/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. *Justifier que $\mathrm{I}_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ est convergente puis montrer que (I_n) est constante.*
4. *En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.*

[redacted] **Exercice 4.0.48** [redacted] ♡ [redacted]

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.*
2. *Calculer I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
3. *Soit $\mathrm{A}_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0<\mathrm{I}_n<\mathrm{A}_n$.*
4. *Étudier la limite de (A_n) et en déduire celle de (I_n).*

[redacted] **Exercice 4.0.49** [redacted] ♡ [redacted]

On considère l'intégrale $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que cette intégrale est convergente. On note I sa valeur.*
2. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x$ est convergente et la calculer.*
3. *Justifier que l'on a :*
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in[0,1],\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
4. *Déduire des questions précédentes que $\mathrm{I}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}$.*

[redacted] **Exercice 4.0.50** [redacted] ♡♡ [redacted] **TPE 2009** [redacted]

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que I_n est bien définie.*
2. *Étudier la convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}$.*
4. *En déduire par encadrement un équivalent de I_n.*

[redacted] **Exercice 4.0.51** [redacted] ♡♡ [redacted] **TPE 2011** [redacted]

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}^*$, on pose :
$$\mathrm{I}_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+x^2\right)^n}.$$

1. *Prouver que pour tout $(n;x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}_n(x)$ est bien définie.*
2. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, I_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.*
3. *En déduire $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.*

[redacted] **Exercice 4.0.52** [redacted] ♡ [redacted] **CCP 2016** [redacted]

Premier exercice :
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$.
On pose $\mathrm{I}(\mathrm{P})=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. *Donner une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. En déduire l'existence de $\mathrm{I}(1)$ et le calculer.*

2. (a) *Soit k entier entre 0 et 5. Justifier que $\mathrm{I}(\mathrm{X}^k)$ converge absolument*

   (b) *Justifier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.*

3. *On suppose qu'il existe trois réels a,b,c tels que*

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}) = a\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\mathrm{P}(0) + c\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

   (a) *Calculer* $\mathrm{I}(\mathrm{X})$. *En déduire deux relations entre a, b et c.*

   (b) *Montrer que $\mathrm{I}(\mathrm{X}^2) = \frac{\pi}{2}$ et déterminer a, b et c.*

4. *Soit $n \in [\![2,5]\!]$. Montrer que $\mathrm{I}(\mathrm{X}^n) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}(\mathrm{X}^{n-2})$.*

5. *Conclure.*

4.0.5 Intégration et structure euclidienne

Exercice 4.0.53 ♡ ***Convergence en moyenne quadratique***

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur I. On note $(f \mid g) = \int_{\mathrm{I}} fg$ le produit scalaire usuel sur E *et $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions de* E converge en moyenne quadratique *vers une fonction f de* E *si et seulement si $\mathrm{N}_2(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

1. *Prouver les inégalités*

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \left|(f \mid g)\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |fg| \leqslant \mathrm{N}_2(f)\mathrm{N}_2(g)..$$

2. *En déduire que si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions de* E *convergeant en moyenne quadratique vers f et g alors $((f_n \mid g_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (f \mid g)$.*

Exercice 4.0.54 ♡

On considère E *l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $(f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} fg$ le produit scalaire usuel sur* E. *Montrer que le sous-espace $\mathscr{P}$ des fonctions paires de carré intégrables sur $\mathbb{R}$ et le sous-espace $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Exercice 4.0.55 ♡

On rappelle l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

1. *Montrer que l'intégrale $\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Que vaut I_{2p+1} ?*
3. *Trouver une relation de récurrence entre I_{2p+2} et I_{2p} et finir le calcul des I_p en admettant que $\mathrm{I}_0 = 1$.*
4. *Soit*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) & \longmapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

   Montrer que φ est un produit scalaire.

5. *Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$pour ce produit scalaire en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$.*

Exercice 4.0.56 ♡ ***CCP MP***

Soit a et b deux réels tels que a<b.

1. *Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. *Soit* E *le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

   On pose, $\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. *Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 4.0.57 ♡ ***CCP MP***

Soit E *l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur* E.

2. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.*

   Déterminer le projeté orthogonal sur F *de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.*

4.0.6 Intégrales fonction d'une borne, fonctions définies par une intégrale

Exercice 4.0.58 ♡♡ ***Type Mines***

Déterminer

$$\lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.0.59 ♡♡♡ ***Centrale 2009, Exponentielle intégrale***

On pose

$$f(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Donner un équivalent de $f(x)$ aux bornes du domaines de définition.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.0.60 **Type Mines**

On introduit
$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable en une fonction (toujours notée f) $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente en 1.
4. Déterminer les limites aux bornes de f et tracer sa courbe représentative.
5. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

4.0.7 Étude de fonctions définies par une intégrale à paramètre

Exercice 4.0.61 ♡ **Transformée de Fourier, Mines 2007**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit sa transformée de Fourier par
$$\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans cette question, on prend $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
   (a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\hat{f}$ (On rappelle que que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$).
3. On suppose de plus que $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.62 ♡ **Transformée de Laplace**

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-ty} f(t) = 0$ pour tout $y > 0$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on définit sa transformée de Laplace par
$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ et tout $f \in \mathrm{E}$, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathscr{L}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que L est linéaire de E dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
4. Calculer la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f_1 : t \mapsto 1$; (b) $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$, $a > 0$; (c) $f_3 : t \mapsto t^n$, $n \in \mathbb{N}$; (d) $f_4 : t \mapsto \cos(\omega t)$
5. On suppose que $f \in \mathrm{E}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f' et f'' appartiennent à E. Trouver une relation entre $\mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}(f'')$.
6. Retrouver la solution de l'équation différentielle $y'' + y = 1$ telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$. On admettra que l'application $\mathscr{L}$ est injective.

Exercice 4.0.63 ♡

On considère $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1 + x^4 t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim_{x \to 0} \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1 + x^4 t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.64 ♡♡ **Mines 2005**

On pose
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition I de f.
2. La fonction f est elle continue sur I.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4.0.65 ♡

Montrer que $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+itx)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.66 ♡

On considère $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \sin(t \sin x)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\pi} \sin(t \sin x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.67 ♡

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
   Indication 4.0 : On pourra distinguer les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et calculer f'.
3. En déduire une expression explicite de f.

Exercice 4.0.68 ♡

1. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de f.

Exercice 4.0.69 ♡

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D *de* $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;
2. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathrm{D}\setminus\{0\}$.

Exercice 4.0.70 ♡

On se propose de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x > 0$:

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)^n}.$$

1. *Calculer* $f_1(x)$. exo:2004:Aug:Sun:14:19:15
2. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* f_n *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a, +\infty[$.
3. *Calculer* $f_n'(x)$ *en fonction de* $f_{n+1}(x)$. exo:2004:Aug:Sun:15:06:58
4. *En déduire* f_n.

Exercice 4.0.71 ♡

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx)\,\mathrm{d}t$ *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.72 ♡

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+$;
2. *À l'aide du changement de variable* $u = 1/t$, *calculer* $f(0)$;
3. *Montrer que* f *est continue et décroissante* ; exo:2005:Dec:Fri:11:39:48
4. *Déterminer* $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 4.0.73 ♡

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Grâce au changement de variable* $t = 1/u$, *calculer* $f(0)$.
3. *Étudier les variations de* f *sur son domaine de définition.*
4. *Étudier la limite de* f *en* $+\infty$.

Exercice 4.0.74 ♡

Posons

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Étudier les variations de* f.
2. *Déterminer les limites de* f *aux bornes de son domaine de définition.*
3. *Déterminer un équivalent de* f *en* 0^+ *puis en* $+\infty$.

Exercice 4.0.75 ♡

On introduit

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Montrer que* f *est continue sur son domaine de définition.*
3. *Calculer* $f(x) + f(x+1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. *Donner un équivalent de* f *en* 0^+ *et trouver la limite de* f *en* $+\infty$.

Exercice 4.0.76 ♡

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.0.77 ♡

On considère la fonction définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Vérifier que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = 2x\mathrm{F}(x)$.
3. *En déduire que*
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$$

Exercice 4.0.78 ♡

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est continue sur* $[0, +\infty[$.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$ *et dresser son tableau de variations en calculant* $f(0)$.
3. *Trouver un équivalent simple de* f *en* $+\infty$.
4. *Étudier la dérivabilité de* f *en* 0.

Exercice 4.0.79 ♡ **Oral CCP MP**

On pose : $\forall\, x \in]0; +\infty[$ *et* $\forall\, t \in]0; +\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0, +\infty[$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0; +\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
2. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. *Démontrer que* Γ *est de classe* C^1 *sur* $]0; +\infty[$ *et exprimer* $\Gamma'(x)$ *sous forme d'intégrale.*

Exercice 4.0.80 ♡ **Oral CCP MP**

1. *Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*
2. *Démontrer que la fonction* $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
3. (a) *Trouver une équation différentielle linéaire* (E) *d'ordre* 1 *dont* f *est solution.*
   (b) *Résoudre* (E) .

Exercice 4.0.81 ♡♡ **Mines PC 2016**

On considère $f(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. *Donner le domaine de définition* D *de* f.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* D.
3. *Calculer* f.

Exercice 4.0.82 ♡♡♡ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f *donnée là où elle est définie par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^2$ *sur un intervalle à déterminer.*
2. *Trouver une équation différentielle satisfaite par* f.
3. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4.0.83 ♡♡ **Mines PC 2016**

On considère $f(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. *Donner le domaine de définition* D *de* f.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* D.
3. *Calculer* f.

Exercice 4.0.84 ♡♡♡ **Centrale PC 2016**

On introduit la fonction f *donnée là où elle est définie par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* f *est* $\mathscr{C}^2$ *sur un intervalle à déterminer.*
2. *Trouver une équation différentielle satisfaite par* f.
3. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4.0.85 ♡ **Mines 2016**

Trouver les fonction continues sur $\mathbb{R}$ *telles que :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.0.86 ♡ **CCP 2016**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$.

1. *Montrer que* f *est définie et décroissante sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Calculer la limite de* f *en* $+\infty$.

4.0.8 Exercices de synthèse

Exercice 4.0.87 ♡♡ **Centrale 2000**

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$[\mathrm{F}(\mathrm{P})](x) = \mathrm{e}^{4x}\int_{2x}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Vérifier l'existence de* $\mathrm{F}(\mathrm{P})(x)$.
2. *Calculer avec Python* $\mathrm{F}(\mathrm{X}^k)$ *pour* $k \in [\![0,5]\!]$.
3. *Montrer que* F *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
4. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{P})$. *En déduire que* F *est un automorphisme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
5. *Quelles sont les valeurs propres de* F.

Exercice 4.0.88 ♡♡♡ **Centrale PC 2016**

Soient a *et* b *deux fonctions définies et continues sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *Montrer que les solutions de l'équation différentielle* (ε) : $y' - ay = b$ *sont bornées si et seulement si* a *et* b *sont intégrables sur* $\mathbb{R}_+$.