Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

3.1 Éléments propres d'un endomorphisme

[redacted]***Exercice 3.1.1***[redacted] ♡ [redacted]

On considère l'espace E *des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *l'endomorphisme qui à une fonction* f *de* E *associe la fonction* $u(f)$ *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer le spectre de u.

[redacted]***Exercice 3.1.2***[redacted] ♡ [redacted]

Soient f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $n \in \mathbb{N}^\star$. *On suppose que* $0 \in sp(f^n)$. *Montrer que* $0 \in sp(f)$.

[redacted]***Exercice 3.1.3***[redacted] ♡ [redacted] ***Centrale 2003*** [redacted]

Trouver les éléments propres des endomorphismes f *et* g *de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *définis par :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad f(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$$
$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad g(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(-\mathrm{X})$$

[redacted]***Exercice 3.1.4***[redacted] ♡ [redacted]

Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie.*
Montrer

$$0 \notin sp(f) \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

[redacted]***Exercice 3.1.5***[redacted] ♡ [redacted]

Soit u *un automorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E .
Établir

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}.$$

[redacted]***Exercice 3.1.6***[redacted] ♡ [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Déterminer tous les endomorphismes de* E *pour lesquels chaque vecteur de* E *est un vecteur propre.*

3.2 Détermination des éléments propres d'un endomorphisme

[redacted]***Exercice 3.2.1***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions continues de* $[0,+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$ *convergentes en* $+\infty$.
Soit T *l'endomorphisme de* E *donné par*

$$\forall x \in [0,+\infty[, \mathrm{T}(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer les valeurs propres de T *et les vecteurs propres associés.*

[redacted]***Exercice 3.2.2***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* D *l'endomorphisme de* E *qui à* f *associe sa dérivée* f'.
Déterminer les valeurs propres de D *ainsi que les sous-espaces propres associés.*

[redacted]***Exercice 3.2.3***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* I *l'endomorphisme de* E *qui à* $f \in \mathrm{E}$ *associe sa primitive qui s'annule en 0.*
Déterminer les valeurs propres de I.

[redacted]***Exercice 3.2.4***[redacted] ♡ [redacted]

Soient E *l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et* $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *l'endomorphisme défini par*

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice 3.2.5 ♡♡

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et*

$$u : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{X}\mathrm{P} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* u *est un endomophisme de* E *et écrire sa matrice dans la base canonique de* E.
2. *Déterminer, suivant la valeur de* n*, le noyau, le rang et l'image de* u*. On précisera des bases de ces sous-espaces.*
3. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$*, résoudre et discuter l'équation* $u(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P}$*. Donner une base de l'espace des solutions.*

Exercice 3.2.6 ♡ ***CCP MP***

Soient u *et* v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Soit* λ *une valeur propre non nulle de* $u \circ v$*. Montrer que* λ *est une valeur propre de* $v \circ u$.
2. *Montrer que cette propriété reste valable si* $\lambda = 0$ *et si* E *est de dimension finie.*
3. *On pose* $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *et pour* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$, $v(\mathrm{P}) = \int_0^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$*. Calculer le noyau de* $u \circ v$ *puis celui de* $v \circ u$*. Conclusion ?*

3.3 Éléments propres d'une matrice

Exercice 3.3.1 ♡

Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A} = (i\,j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.3.2 ♡

1. *Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*
2. *Que dire de la réciproque ?*

Exercice 3.3.3 ♡

Soit F *un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme* u *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie.*
Établir que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u *sur* F *divise le polynôme caractéristique de* u.

Exercice 3.3.4 ♡♡ **Lemmes d'Hadamard et de Gerschgörin**

On considère une matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. ***Hadamard :*** *On suppose que* A *est à* diagonale dominante *:*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A *est inversible.*

2. ***Gerschgörin : Localisation des valeurs propres d'une matrice.*** *En déduire que le spectre (complexe) d'une matrice est inclus dans une union de disques :*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{D}(a_{ii}, \rho_i) \text{ où } \rho_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Exercice 3.3.5 ♡ **Classique**

On considère une matrice $\mathrm{A} = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ stochastique *: tous ses coefficients sont des réels* $\geqslant 0$ *et*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

1. *Montrer que* 1 *est valeur propre de* A.
2. *On définit sur* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *la norme* $\|\mathrm{X}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$*. Montrer que* $\|\mathrm{AX}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{X}\|_\infty$.
3. *En déduire que si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de* A*, alors* $|\lambda| \leqslant 1$.
4. *En utilisant la localisation des valeurs propres de Gerschgörin, montrer que si tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, alors* 1 *est la seule valeur propre de* A *de module* 1.

Exercice 3.3.6 ♡ **Matrice compagnon**

La matrice compagnon C(P) *du polynôme* $\mathrm{P} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *est par définition donnée par est la matrice carrée suivante :*

$$\mathrm{C}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $\chi_{\mathrm{C(P)}} = \mathrm{P}$.
2. *En déduire que si* $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{X} + \mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est un polynôme normalisé, si* $z \in \mathbb{C}$ *est racine de* P*, alors*

$$|z| \leqslant \max\big(|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\big).$$

Exercice 3.3.7 ♡

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le rang de* A*. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de* A *et indiquer si* A *est diagonalisable ou pas.*
2. *Donner les éléments propres de* A.

Exercice 3.3.8 ♡

Les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

3.4 Polynômes d'endomorphisme

[redacted]***Exercice 3.4.1***[redacted] ♡ [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$. *Soit* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme de* E *de rang* 1.

1. *Montrer que* u *admet un polynôme annulateur de la forme* $P = X^2 - kX$ *avec* $k \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*
2. *Que représente* k *pour* u *?*

[redacted]***Exercice 3.4.2***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On considère la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ 0_n & A & A \\ 0_n & 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{C}).$$

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, *calculer* $P(A)$ *en fonction de* A *de* P *et de ses dérivées.*

3.5 Polynôme caractéristique

[redacted]***Exercice 3.5.1***[redacted] ♡ [redacted]

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

[redacted]***Exercice 3.5.2***[redacted] ♡ [redacted] ***L'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices carrées*** [redacted]

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

[redacted]***Exercice 3.5.3***[redacted] ♡ [redacted] ***$\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A*** [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice inversible. Exprimer le polynôme caractéristique de* A^{-1} *à l'aide du polynôme caractéristique de* A.

[redacted]***Exercice 3.5.4***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *on forme la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Exprimer le polynôme caractéristique de M *en fonction de celui de* A.

[redacted]***Exercice 3.5.5***[redacted] ♡ [redacted] ***Théorème de Cayley-Hamilton*** [redacted]

On considère un polynôme unitaire

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^n + X^n \in \mathbb{K}_n[X]$$

À partir des coefficients de ce polynôme, on forme sa matrice compagnon *:*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique* $\chi_C(\lambda)$.
2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathfrak{L}(E)$. *Le but des questions suivantes est de montrer que* $\chi_u(u) = 0$. *Si* $u = 0$, *ce résultat est évident aussi on suppose que* $u \neq 0$.
   (a) *Soit* $x \in E$ *tel que* $u(x) \neq 0$. *Montrer qu'il existe* $p \in [\![1, n-1]\!]$ *tel que* $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ *est libre et tel que* $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ *est liée.*
   (b) *Il existe donc* $a_0, \dots, a_{n-1}$ *tels que* $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{p-1}(x) + u^p(x)$. *Posons* $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1} + X^p$. *Introduisons aussi* $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$. *Montrer que si* $u_{|F}$ *est la restriction de* u *à* F *alors* $\chi_{u_{|F}} = P$.
   (c) *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de* E *est un polynôme annulateur de* u *:* $\chi_u(u) = 0$.

[redacted]***Exercice 3.5.6***[redacted] ♡ [redacted] $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ [redacted]

Soient $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices quelconques.*

1. *Si* A *est inversible, montrer que* $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. *En considérant les produits par blocs*

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_n & -XI_n \end{pmatrix}$$

montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ *pour toutes matrices* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

[redacted]***Exercice 3.5.7***[redacted] ♡ [redacted] ***En dimension impaire*** [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie impaire et* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme de* E.

1. *Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par* u.
2. *Montrer qu'il existe un hyperplan stable par* u.

[redacted]***Exercice 3.5.8***[redacted] ♡♡♡ [redacted] ***X 2005*** [redacted]

Soient A *et* B *deux matrices complexes d'ordre* n. *On suppose que* A *et* B *commutent et que* B *est nilpotente. Montrer que* $\det(B + I_n) = 1$ *puis que* $\det(A + B) = \det(A)$.

[redacted]***Exercice 3.5.9***[redacted] ♡♡ [redacted] ***Mines 2009*** [redacted]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. *On note* $A^{-1} = (a'_{i,j})$, $J = ((1))$ *et* $B = A + J$. *Montrer que :*

$$\det(B) = \left(1 + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j}\right) \det(A).$$

Exercice 3.5.10 ♡ **CCP 2003**

Soient $A, B, C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} BC = CB \\ AB - BA = C \end{cases}.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad AB^{p+1} = B^p\left(BA + (p+1)C\right).$$
2. *En déduire que* $\det(B) = 0$ *ou* $\det(C) = 0$.

3.6 Existence de valeurs propres sur $\mathbb{C}$

Exercice 3.6.1 ♡ **Dimension finie versus dimension infinie**

1. *Justifier que tout endomorphisme d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie* E *possède au moins une valeur propre.*
2. *Observer que l'endomorphisme* $P(X) \mapsto (X-1)P(X)$ *de* $\mathbb{C}[X]$ *n'a pas de valeur propre.*

Exercice 3.6.2 ♡ **Centrale 2005**

Soient u, v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie non nulle.*

On suppose

$$u \circ v = v \circ u$$

Montrer que u *et* v *ont un vecteur propre en commun.*

Exercice 3.6.3 ♡ **CCP MP**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ *où* a, b, c *sont des réels.*

M *est-elle diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *?* M *est-elle diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *?*

3.7 Diagonalisation

Exercice 3.7.1 ♡

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.7.2 ♡

Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.7.3 ♡

Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$
2. $B = \begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix}$ *dans* $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 3.7.4 ♡

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

1. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
3. *Mêmes questions avec* B.

Exercice 3.7.5 ♡

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{K})$$

Trouver une CNS sur (a, b, c, d, e, f) *pour que* A *soit diagonalisable.*

Exercice 3.7.6 ♡

On considère un entier $n \geqslant 2$ *et deux complexes* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *tels que* $a \neq 0$ *et la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

1. *La matrice* $H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est-elle diagonalisable ?*
2. *En déduire que* A *est diagonalisable.*
3. *Calculer* $\det(A)$.

Exercice 3.7.7 ♡

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer son polynôme caractéristique* $\chi_A(X)$.
2. A *est-elle diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *?*
3. A *est-elle diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *?*
4. *Application : Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ *et soit*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(M)$.

exo:2005:Nov:Sun:15:55:17

exo:2005:Nov:Fri:15:53:38

:44

Exercice 3.7.8 ♡ Classique

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent.*

1. *Déterminer les valeurs propres de* u.
2. u *est-il diagonalisable ?*

:25

Exercice 3.7.9 ♡ Instructif

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Quels-sont les endomorphismes de* E *diagonalisables qui n'ont qu'une seule valeur propre ?*
2. *Quels-sont les endomorphismes de* E *diagonalisables tels que* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$ *?*
3. *Donner un exemple d'endomorphisme qui n'a qu'une seule valeur propre et qui n'est pas une homothétie.*

:14

Exercice 3.7.10 ♡

On considère deux complexes $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 3.7.11 ♡

Pour $n \geqslant 3$, *diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. *sans calculer son polynôme caractéristique,*
2. *puis en le calculant.*

Exercice 3.7.12 ♡ Matrices de rang 1

1. *On considère deux matrices colonnes non nulles* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *et l'on forme la matrice* $A = XY^T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = 1$ *et déterminer* $\mathrm{Ker}(A)$ *et* $\mathrm{Im}(A)$. *Exprimer matriciellement* $\mathrm{Tr}(A)$ *à l'aide de* X *et* Y.
2. *Réciproquement, montrer que toute matrice de rang* 1 *s'écrit* $A = XY^T$ *où* X *et* Y *sont des matrices colonnes non nulles.*
3. *Que vaut le polynôme caractéristique d'une matrice de rang* 1 *?*
4. *Montrer qu'une matrice de rang* 1 *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
5. *On considère la matrice* $A = ((i/j)) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Diagonaliser cette matrice.*

Exercice 3.7.13 ♡ Diagonalisation simultanée

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *On suppose que* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *possède* n *valeurs propres distinctes et que* $v \in \mathfrak{L}(E)$ *commute avec* u. *Montrer qu'il existe une base* e *formée de vecteurs propres communs à* u *et* v.
2. *Soit* F *un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable* $u \in \mathfrak{L}(E)$. *Montrer que la restriction* $v = u_{|F}$ *de* u *à* F *est un endomorphisme diagonalisable de* F.
3. *Soient deux endomorphismes* $(u, v) \in \mathfrak{L}(E)^2$ *diagonalisables qui commutent :* $u \circ v = v \circ u$. *Montrer qu'il existe une base* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *de vecteurs propres communs à* u *et* v.

Exercice 3.7.14 ♡♡♡ Type X

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *deux matrices diagonalisables. Montrer que si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *alors la matrice définie par blocs*

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$$

est aussi diagonalisable.

Exercice 3.7.15 ♡ Centrale 2005

Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 3.7.16 ♡ ***Mines 2005***

Soient $a \in \mathbb{C}$ *et* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

3.8 Étude de matrices diagonalisables

Exercice 3.8.1 ♡

Montrer que si A *est diagonalisable alors* A^{T} *l'est aussi.*

Exercice 3.8.2 ♡

Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose la matrice AB *diagonalisable. Montrer que* BA *est diagonalisable.*

Exercice 3.8.3 ♡

Soient $\mathrm{A}_1 \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}_2 \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ *définie par*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A *est diagonalisable si, et seulement si,* A_1 *et* A_2 *le sont.*

Exercice 3.8.4 ♡

Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{K}$ *non tous deux nuls, montrer que la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2p}(\mathbb{K})$$

est diagonalisable.

Exercice 3.8.5 ♡

1. *Montrer que si* $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est de rang* 1 *alors* $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{M}$.
2. *En déduire que si* λ *est une valeur propre de* M *alors* $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\lambda = 0$.
3. *Quelles sont les valeurs propres de* M *possibles ?*
4. *Si* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0$, M *peut-elle être diagonalisable ?*

Exercice 3.8.6 ♡♡♡ ***Type X***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Sans utiliser le théorème spectral, prouver que la matrice suivante est diagonalisable :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.8.7 ♡♡♡ ***Type X***

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On s'intéresse à la matrice définie par blocs :*

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. *Exprimer le polynôme caractéristique de* B *en fonction de celui de* A.
2. *Relier les éléments propres de* B *à ceux de* A.
3. *Montrer que si* B *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *alors* A *l'est. Que dire de la réciproque ?*

Exercice 3.8.8 ♡♡♡ ***Type X***

Soit A *une matrice carrée d'ordre* n *diagonalisable. La matrice* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{A} \\ -\mathrm{A} & 3\mathrm{A} \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

3.9 Diagonalisabilité d'une matrice

Exercice 3.9.1 ♡

Soient $n \geqslant 2$ *et* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ *un* n*-uplet de scalaires non tous nuls. Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *la matrice dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à* $(a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

1. *Trouver les valeurs propres de* A.
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
3. *Soit* $\mathrm{B} = 2\mathrm{A} - \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$. *A quelle condition la matrice* B *est-elle diagonalisable ? Inversible ?*

Exercice 3.9.2 ♡♡ ***Type Centrale***

Soit $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *non nulle telle qu'il existe* $k \geqslant 2$ *vérifiant* $\mathrm{B}^k = 0$.

1. *Montrer que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, *si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ *alors* $\lambda^p \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}^p)$. *En déduire le spectre de* B. *La matrice* B *est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{AB} = 0$.
   (a) *Montrer qu'il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *telle que*

   $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A}_1 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) *Montrer que* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ *et* A *ont le même spectre.*

Exercice 3.9.3 ♡ ***CCP MP***

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où* a *est un réel.*

1. *Déterminer le rang de* A.
2. *Pour quelles valeurs de* a, *la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

[redacted] *Exercice 3.9.4* [redacted] ♡ [redacted] *CCP MP* [redacted]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* A. A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ *et* $B = aI_3 + bA + cA^2$, *où* I_3 *désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question* ***1.*** *les éléments propres de* B.

[redacted] *Exercice 3.9.5* [redacted] ♡ [redacted] *CCP 2003* [redacted]

Trouver, sans calculer son polynôme caractéristique, les éléments propre de

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

[redacted] *Exercice 3.9.6* [redacted] ♡♡ [redacted] *Centrale PSI 2013* [redacted]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $A_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.

1. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer* A^p *pour* $p \in \mathbb{N}$.

[redacted] *Exercice 3.9.7* [redacted] ♡ [redacted] *Petites Mines 2011, CCP 2016* [redacted]

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

1. *Calculer* M^2 .
2. M *est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.*

[redacted] *Exercice 3.9.8* [redacted] ♡♡ [redacted] *Mines 2011* [redacted]

Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

[redacted] *Exercice 3.9.9* [redacted] ♡ [redacted] *X 2013* [redacted]

On se donne des nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ *et on pose pour* $n \geqslant 2$ *:*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & \ddots & a_n & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

1. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *calculer* J^p.
2. *Exprimer* A *comme un polynôme en* J.
3. *Soit* ω *une racine nième de l'unité. On pose* $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}^T$. *Calculer* JX_ω.
4. *En déduire que* J *est diagonalisable. Préciser une matrice de passage* P *diagonalisant* J.
5. *Montrer que* A *est diagonalisable. Préciser ses éléments propres. Que vaut* $\det(A)$ *?.*

[redacted] *Exercice 3.9.10* [redacted] ♡♡♡ [redacted] *Mines 2003* [redacted]

Soit u *un endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *admettant* n *valeurs propres deux à deux distinctes* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. *On note* $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathfrak{L}(E) : u \circ v = v \circ u\}$.

1. *Montrer que tout élément de* $\mathscr{C}(u)$ *est diagonalisable et s'écrit comme un polynôme en* u.
2. *Montrer que* $\mathscr{C}(u)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et que* $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ *en forme une base.*

3.10 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

[redacted] *Exercice 3.10.1* [redacted] ♡♡ [redacted] *Type Mines* [redacted]

Soit u *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* E.
On suppose que

$$Im(u - Id_E) \cap Im(u + Id_E) = \{0_E\}$$

Montrer que u *est diagonalisable.*

[redacted] *Exercice 3.10.2* [redacted] ♡ [redacted]

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. *Pour* $P \in E$, *on pose* $\varphi(P) = P - (X+1)P'$.

1. *Justifier que* φ *définit un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Déterminer les valeurs propres de* φ *et justifier que* φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.10.3 ♡

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et deux réels* $a \neq b$. *Pour* $P \in E$, *on pose*

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

a) Montrer que φ *est un endomorphisme de* E.
b) Déterminer les valeurs propres de φ *et en déduire que* φ *est diagonalisable.*

Exercice 3.10.4 ♡

L'endomorphisme φ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\varphi(M) = M + tr(M)I_n$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 3.10.5 ♡♡♡ **Type Centrale**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $f \in \mathfrak{L}(E)$. *On introduit alors*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(E) \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = f \circ g \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que toute valeur propre de* f *est une valeur propre de* φ.
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, *caractériser le sous-espace propre* $E_\varphi(\lambda)$ *de* φ *et calculer sa dimension en fonction de celle de* $E_f(\lambda)$.
3. *Prouver que si* f *est diagonalisable alors* φ *l'est aussi.*

Exercice 3.10.6 ♡ **CCP MP**

Soit p, *la projection vectorielle de* $\mathbb{R}^3$, *sur le plan* P *d'équation* $x+y+z=0$, *parallèlement à la droite* D *d'équation* $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ *et donner la matrice de* p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

Exercice 3.10.7 ♡ **CCP MP**

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension* n, *et soit* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, *où* v *est un vecteur donné de* E.

1. *Donner le rang de* f.
2. f *est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur* v*)*

Exercice 3.10.8 ♡♡♡ **Type X**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère un endomorphisme* u *de* E *tel que* u^2 *soit diagonalisable.*

1. *L'endomorphisme* u *est-il toujours diagonalisable ?*
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Sp}(u^2) \subset \mathbb{R}_+$ *et* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.

Exercice 3.10.9 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^2 = \mathrm{id}_E$.

1. *Montrer que :*
   (a) $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E) = \{0\}$;
   (b) $\mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$;
   (c) $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.
2. *Montrer que* $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E) = n$.
3. *En déduire que* u *est diagonalisable.*

Exercice 3.10.10 ♡

Soient u *et* v *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* u *admet* n *valeurs propres distinctes dans* $\mathbb{K}$.
Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
— $u \circ v = v \circ u$;
— *Tout vecteur propre de* u *est un vecteur propre de* v.

Exercice 3.10.11 ♡

Soit E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* v *un endomorphisme nilpotent d'indice* k *de* E *(c'est-à-dire tel que* $u^{k-1} \neq 0$ *et* $u^k = 0$*).*

1. *Montrer que* $\chi_u(X) = X^n$.
2. *Soit* v *un automorphisme de* E *qui commute avec* u *et soit* $f = u + v$.
   (a) *Montrer que* f *et* v *ont les mêmes valeurs propres.*
   (b) *Montrer que* $w = v^{-1} \circ u$ *est nilpotent.*
   (c) *En déduire que* $\det(f) = \det(v)$.

Exercice 3.10.12 ♡

On définit sur le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $F = \{M \in E \mid AM = MD\}$.

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E *admettant* (U, A) *comme base.*
2. *Montrer que*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM - MD \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de E.

3. *Déterminer les solutions dans* E *de* $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ *puis de* $f(\mathrm{M}) = -\mathrm{M}$.

4. *Montrer que* f *est diagonalisable et en donner le spectre.*

[redacted]***Exercice 3.10.13***[redacted] ♡♡♡ [redacted] ***Type Centrale*** [redacted]

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $g \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E. *On introduit l'application :*

$$\mathrm{T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\mathrm{E}) \\ f & \longmapsto & f \circ g - g \circ f \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* $\mathrm{T} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathrm{E}))$.
2. *Montrer que si* g *est nilpotent,* T *l'est aussi. Que dire de la réciproque ?*
3. *Montrer que si* g *est diagonalisable alors* T *l'est aussi.*

[redacted]***Exercice 3.10.14***[redacted] ♡ [redacted] ***Mines PC 2016*** [redacted]

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$. *On considère :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{A} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Im}\, f$.
3. f *est-elle diagonalisable ?*

[redacted]***Exercice 3.10.15***[redacted] ♡ [redacted] ***Mines 2011*** [redacted]

Soient E*-un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\mathrm{rg}\, u = 1$.

1. *Montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Tr}\,(u) \neq 0$.
2. *Montrer que* u *est non iagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.

[redacted]***Exercice 3.10.16***[redacted] ♡ [redacted] ***Mines PC 2016*** [redacted]

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$. *On considère :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{A} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Im}\, f$.
3. f *est-elle diagonalisable ?*

[redacted]***Exercice 3.10.17***[redacted] ♡ [redacted] ***Mines 2016*** [redacted]

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie* n. *Soit* u *un endomorphisme à* n *valeurs propres distinctes. Déterminer les sous-espaces vectoriels de* E *stables par* u.

[redacted]***Exercice 3.10.18***[redacted] ♡ [redacted] ***Mines 2016*** [redacted]

Soit A *et* B *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{B}$.

1. *Montrer que* B *n'est pas inversible*
2. *Calculer* $\mathrm{AB}^k - \mathrm{B}^k\mathrm{A}$. *En déduire que* B *est nilpotente.*

[redacted]***Exercice 3.10.19***[redacted] ♡ [redacted] ***Un endomorphisme diagonalisable sur une décomposition en somme directe de*** E ***est diagonalisable sur*** E [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. *On suppose que* $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{E}_i$ *où pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, E_i *est un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $u_{|\mathrm{E}_i}$ *est diagonalisable. Montrer que* u *est diagonalisable.*

[redacted]***Exercice 3.10.20***[redacted] ♡ [redacted] ***Centrale 2016 Maths 1*** [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *telle que* $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

1. *Donner un exemple d'un tel endomorphisme dans* R^2 .
2. *Montrer que* f *n'admet pas de valeur propre réelle. En déduire que la dimension de* E *est paire.*
3. *Montrer que pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{V}ect(x, f(x))$ *est stable par* f.
4. *Déduire des questions précédentes qu'il existe* $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{E}$ *tel que* $(u_1, f(u_1), \dots, u_n, f(u_n))$ *soit une base de* E *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*

3.11 Trigonalisation

[redacted]***Exercice 3.11.1***[redacted] ♡ [redacted]

Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

[redacted]***Exercice 3.11.2***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose* χ_{A} *scindé.*

1. *Justifier que* A *est trigonalisable.*
2. *Établir que pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$Sp(\mathrm{A}^k) = \left\{ \lambda^k \mid \lambda \in Sp(\mathrm{A}) \right\}$$

[redacted]***Exercice 3.11.3***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *de polynôme caractéristique*

$$\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \lambda_i).$$

Déterminer une matrice de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \lambda_i^p).$$

[redacted]***Exercice 3.11.4***[redacted] ♡ [redacted]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{A}^3 = 2\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 3.11.5 ♡

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

Exercice 3.11.6 ♡

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose le polynôme caractéristique de A *de la forme*

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$.

Exercice 3.11.7 ♡

Expliquer pourquoi le déterminant de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est le produit des valeurs propres complexes de* A, *valeurs propres comptées avec multiplicité.*

Exercice 3.11.8 ♡

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.
2. *Trigonaliser la matrice* A.

Exercice 3.11.9 ♡

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.
2. *Trigonaliser la matrice* A.

Exercice 3.11.10 ♡

Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.11.11 ♡

Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable et préciser la matrice de passage.

Exercice 3.11.12 ♡

Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *est semblable à la matrice* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.12 Applications de la diagonalisation

3.12.1 Résolution d'équations matricielles

Exercice 3.12.1 ♡♡ **Centrale PC 2011**

1. *Diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *On veut résoudre l'équation* $X^2 + X = A$ *d'inconnue* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) *Montrer que si* X *est solution de cette équation alors* X *et* A *ont les mêmes vecteurs propres. Préciser alors une matrice* P *qui les diagonalise simultanément.*
   (b) *En posant* $Y = P^{-1}XP$, *résoudre l'équation.*

Exercice 3.12.2 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Prouver que* A *est trigonalisable mais pas diagonalisable. Donner une base qui trigonalise* A.
2. *Montrer que si* $M^2 = A$ *alors* $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$. *En déduire toutes les matrices* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *solutions de* $M^2 = A$.

Exercice 3.12.3 ♡ **CCP MP**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* A.
2. *Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A *est* $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 3.12.4 ♡♡ **Centrale 2011**

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer l'ensemble des matrices* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *solutions de* $M + M^2 = J$.

3.12.2 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 3.12.5 ♡

Calculer A^n *pour*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.12.6 ♡

3.12.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Exercice 3.12.7 ♡

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), ces trois suites sont-elles convergentes ?

Exercice 3.12.8 ♡

On considère deux réels $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2}{\dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}}$$

Déterminer la limite de (u_n) en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 3.12.9 ♡

Trouver toutes les suites numériques (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 3.12.10 ♡

Trouver toutes les suites numériques satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

3.12.4 Résolution de systèmes différentiels

Exercice 3.12.11 ♡ ***CCP MP***

1. *On considère la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) *Justifier sans calcul que* A *est diagonalisable.*
   (b) *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *On considère le système différentiel* $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, *$x, y, z$ désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur* $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 3.12.12 ♡ ***CCP MP***

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à* A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. *En déduire la résolution du système différentiel* $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

3.12.5 Divers

Exercice 3.12.13 ♡♡♡ ***Centrale 91, Mines 06, X 2014***

Montrer que tout hyperplan H *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *rencontre* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Indication 3.0 : Raisonner par l'absurde et montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *il existe une matrice* $\mathrm{N} \in \mathrm{H}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$. *Que dire de λ pour* I_n *? Construire alors une matrice inversible élément de* H.

Exercice 3.12.14 ♡

Dans $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on considère* $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ *de trace non nulle. Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on considère l'application*

$$f : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{M} + \alpha \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} \end{cases}.$$

Montrer que f est un endomorphisme puis déterminer son noyau, son rang, son image et sa trace.