Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Sommes partielles et restes

[redacted]***Exercice 2.1.1***[redacted] ♡ [redacted]

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $S_1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$, 2. $S_2 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 3. $S_3 = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

[redacted]***Exercice 2.1.2***[redacted] ♡ [redacted]

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

[redacted]***Exercice 2.1.3***[redacted] ♡ [redacted]

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}.$$

[redacted]***Exercice 2.1.4***[redacted] ♡ [redacted]

On admet que $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Montrer que* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ *est convergente et calculer sa somme* S_2.

[redacted]***Exercice 2.1.5***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Après avoir prouvé sa convergence, calculer les sommes partielles et le reste de la série* $\sum_{n\geqslant p} z^n$.

[redacted]***Exercice 2.1.6***[redacted] ♡ [redacted]

Soit $\alpha > 0$. *Montrer que*

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

[redacted]***Exercice 2.1.7***[redacted] ♡ [redacted] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ [redacted]

On considère la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *et on note* $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *sa somme. On veut trouver une valeur approchée de* L *à* 10^{-p} *près (*p *décimales exactes).*

1. *On décide de prendre comme valeur approchée de* L*, la somme partielle* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   Écrire une procédure Python qui calcule S_n.
2. *En utilisant une comparaison avec une intégrale, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. *Combien de termes sommer pour obtenir une valeur approchée de* L *à* 10^{-4} *près ?*
4. *Trouver une amélioration de la méthode.*

2.2 Séries à termes positifs

[redacted]***Exercice 2.2.1***[redacted] ♡ [redacted]

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$,
2. $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$,
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,
4. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
5. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$.

Exercice 2.2.2 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,
2. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,
3. $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$,
4. $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$,
5. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$,
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2.2.3 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$,
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,
3. $u_n = \frac{n!}{a^n}$,
4. $u_n = \sin n$,
5. $u_n = \frac{2n}{n+2^n}$,
6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 2.2.4 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$,
2. $u_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - 1$,
3. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
4. $u_n = 1-\cos\frac{1}{n}$,
5. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n + 1}$,
6. $u_n = \frac{n^2+1}{n!}$.

Exercice 2.2.5 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n^3}{n!}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{2n^3-1}$,
3. $u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$,
4. $u_n = \frac{\ln n}{n^2+3}$,
5. $u_n = e^{-n^2}$,
6. $u_n = \sin^3\frac{1}{n}$.

Exercice 2.2.6 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = (-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}$,
2. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,
3. $u_n = \frac{1}{n\ln n}$,
4. $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}$,
5. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
6. $u_n = \frac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, $a>0, \alpha>0$.

Exercice 2.2.7 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$,
2. $u_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
3. $u_n = \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1}$,
5. $u_n = \sin\frac{1}{2^n}$,
6. $u_n = \frac{(n+2)^{4/3}}{(n+1)(n+3)^{3/2}}$;

Exercice 2.2.8 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{3n^4-2}$,
3. $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$,
4. $u_n = \ln\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$,
5. $u_n = \frac{\ln n}{n}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\sin^2 n}$;

Exercice 2.2.9 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{2^n n!}{n^{\sqrt{n}}}$,
2. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
3. $u_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^\alpha$,
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} + a + \frac{b}{n}$,
5. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right)$,
6. $u_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Exercice 2.2.10 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = a^{\ln n}$, $a>0$,
2. $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$,
3. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$,
4. $u_n = (\ln(n+a))^\alpha - (\ln n)^\alpha$, $a>0$,
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$,
6. $u_n = \frac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$.

Exercice 2.2.11 ♡♡♡ **Type X**

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$,
2. $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2$,
3. $u_n = \frac{1}{(n+p)!}\sum_{k=1}^{n}k!$ avec $p \geqslant 1$.

On cherchera un équivalent de u_n

Exercice 2.2.12 ♡

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^\alpha + n^\alpha}}$$

avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.2.13 ♡♡

Étudier la convergence puis calculer la somme, quand celle-ci existe, de la série de terme général

$$u_n = \ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3).$$

Exercice 2.2.14 ♡

Trouver le polynôme P *pour que la série de terme général*

$$u_n = \left(n^4 + 2n^2\right)^{1/4} - (\mathrm{P}(n))^{1/3}$$

soit convergente.

Exercice 2.2.15 ♡

Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = (1+2+3+\ldots+n)^\alpha$ est-elle convergente ?

Exercice 2.2.16 ♡♡

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs.

1. *Montrer que les séries de terme général u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \ln(1+u_n)$ sont de même nature.*
2. *Si $\sum u_n$ converge, montrer que la série $\sum (u_n)^\alpha$, avec $\alpha \geqslant 1$, est aussi convergente.*

Exercice 2.2.17 ♡♡

Soit (a_n) une suite de réels positifs.

1. *On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série de terme général :*

   (a) $u_n = a_n^2$;

   (b) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$;

   (c) $u_n = \sin\left(\dfrac{a_n}{1+a_n}\right)$.

   (d) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n+\sqrt{n}}$;

   (e) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n-\sqrt{n}}$.

2. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série de terme général :*

   (a) $u_n = \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$;

   (b) $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 2.2.18 ♡ **Règle de Raabe-Duhamel**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. *On suppose qu'à partir d'un certain rang*

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$.

2. *On suppose que*

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

   Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

3. *On suppose cette fois-ci que*

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$

   Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 2.2.19 ♡

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.2.20 ♡

Soit $\sum u_n$ une série convergente et à terme général positif. Étudier la convergence de $\sum u_n^2$.

Exercice 2.2.21 ♡♡♡ **Centrale PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. Étudier la convergence et la somme de

$$\sum \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

Exercice 2.2.22 ♡ **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. *Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

   Indication *: écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.*

2. *Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?*

Exercice 2.2.23 ♡ **CCP MP**

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.
(*i* est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

[redacted]**Exercice 2.2.24**[redacted] ♡ [redacted]
Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où

stirling 1c

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$$

[redacted]**Exercice 2.2.25**[redacted] ♡ [redacted] ***Oral CCP PC*** [redacted]

stirling 1d

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer a_0 et a_1.

stirling 1e

2. (a) Montrer que (a_n) est décroissante.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}a_n$.
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.
3. (a) Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.
   (b) En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

ing

[redacted]**Exercice 2.2.26**[redacted] ♡♡ [redacted] ***Intégrales de Wallis, Formule de Stirling*** [redacted]
Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

qui donne un équivalent de la factorielle.

1. Montrer que la suite de terme général

$$a_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$$

converge vers une limite L non nulle.
Indication : Poser $u_n = \ln a_n$ puis considérer la série (v_n) de terme général $u_{n+1}-u_n$.

2. En déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{L}}\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}$.

3. L'objet de la suite du problème est de calculer L. Pour ce faire, on considère, pour n entier naturel, l'intégrale (dite de Wallis) définie par :

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Calculer W_0 et W_1.
   (c) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$$

   (d) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad\text{et}\quad \mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

   (e) Montrer que (W_n) est décroissante et positive. En déduire que (W_n) est convergente.
   (f) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n+2}} \leqslant \frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n+2}}.$$

   (g) Montrer que $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.
   (h) Établir que pour tout $n\in\mathbb{N},\quad (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (i) En déduire que : $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
4. En calculant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a_{2n}}{a_n^2}$ et en faisant apparaître W_{2n}, calculer L et en déduire la formule de Stirling.

[redacted]**Exercice 2.2.27**[redacted] ♡♡ [redacted] ***Mines PC 2003*** [redacted]
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

2.3 Comparaison série-intégrale

[redacted]**Exercice 2.3.1**[redacted] ♡ [redacted] ***Constante d'Euler*** [redacted]
Montrer qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

[redacted]**Exercice 2.3.2**[redacted] ♡ [redacted]

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ *où* $\beta > 0$.

[redacted]**Exercice 2.3.3**[redacted] ♡ [redacted] **Série de Bertrand** [redacted]

Étudier la nature de la série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[redacted]**Exercice 2.3.4**[redacted]

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n \, (\ln(\ln n))^2}$.

[redacted]**Exercice 2.3.5**[redacted] ♡ [redacted] **Équivalent du reste de la série de Riemann** [redacted]

1. *Montrer que si* $0 < \alpha < 1$ *alors* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
2. *Déterminer un encadrement puis un équivalent du reste d'ordre* n *de la série de Riemann* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *pour* $\alpha > 1$.
3. *Application : donner la nature de la série de terme général* $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *puis celle de la série de terme général* $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

[redacted]**Exercice 2.3.6**[redacted] ♡♡ [redacted] **Mines-Pont PC** [redacted]

Indiquer la nature de $\sum u_n$ *si*

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

sans utiliser un télescopage.

[redacted]**Exercice 2.3.7**[redacted] ♡ [redacted] **CCP MP** [redacted]

1. *On considère la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\boxed{\alpha \leqslant 0}$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, *démontrer que la série diverge.*

   (b) **Cas** $\boxed{\alpha > 0}$

   Étudier la nature de la série.
   Indication *: On pourra utiliser la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. *Déterminer la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

[redacted]**Exercice 2.3.8**[redacted] ♡ [redacted] **Centrale PC 2001** [redacted]

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^a}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

[redacted]**Exercice 2.3.9**[redacted] ♡♡ [redacted]

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = n^a \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

[redacted]**Exercice 2.3.10**[redacted] ♡ [redacted] **CCP 2011** [redacted]

Pour $n \geqslant 2$, *on pose :*

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln^2 k.$$

1. *Montrer que* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *diverge.*
2. *Montrer que :*
$$\int_1^n \ln^2 t \,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln^2 t \,\mathrm{d}t.$$
3. *Calculer* $\int_1^x \ln^2 t \,\mathrm{d}t$ *et en déduire que :*
$$\int_1^n \ln^2 t \,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln^2 n.$$
4. *Donner un équivalent de* $\frac{1}{u_n}$ *quand* $n \to +\infty$.
5. *Quelle est la nature de la série* $\sum \frac{1}{u_n}$ *?*

2.4 Critère de d'Alembert

[redacted]**Exercice 2.4.1**[redacted] ♡ [redacted]

Nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.

[redacted]**Exercice 2.4.2**[redacted] ♡ [redacted]

Nature de la série $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

[redacted]**Exercice 2.4.3**[redacted] ♡♡ [redacted]

Nature de la série $\sum \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$ *où* $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.4.4 ♡

Nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 2.4.5 ♡♡ ***Règle de Cauchy***

On considère une série à termes positifs $\sum u_n$. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

En utilisant une série géométrique, montrer la règle de Cauchy :

1. *Si $0 \leqslant l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 2.4.6 ♡ ***Règle de Raabe-Duhamel, preuve avec le critère de comparaison logarithmique***

Soit une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1/n)$$

1. *Si $\alpha < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.*
2. *Si $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.*

On utilisera le théorème de comparaison logarithmique avec une série de Riemann. Ce résultat s'appelle la règle de Raabe-Duhamel *qui est hors-programme mais qu'il faut savoir retrouver.*

2.5 Séries de signes quelconques

Exercice 2.5.1 ♡

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence et, S désignant la somme de la série, préciser pour les trois premières n tel que $|S_n - S| \leqslant 10^{-2}$. En déduire un encadrement de S à 10^{-2} près.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$,
6. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

Exercice 2.5.2 ♡

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
2. $u_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$
3. $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
6. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

Exercice 2.5.3 ♡

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$,
2. $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$, $\alpha \neq \beta$,
4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{a}{n}\right)$,
5. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+2}\right)$,
6. $u_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \dfrac{\sin t}{(1+t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha > 0$
7. $u_n = (-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, P *et* Q *deux polynômes,*
8. $u_n = \cos\left(\pi n^2\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$.

Exercice 2.5.4 ♡

Étudier la convergence de $\sum(-1)^n x^n$ pour $x]-1,1[$.

Exercice 2.5.5 ♡

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exercice 2.5.6 ♡

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n\, n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.5.7 ♡

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Exercice 2.5.8 ♡ ***Intégrale de Dirichlet***

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t,$$

déterminer le signe de I.

Exercice 2.5.9 ♡ ***Oral Mines-Pont PC***

Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+n^{1/3}}\right)$.

Exercice 2.5.10 ♡ ***Important : à retrouver par vous-même***

1. *Montrer que la série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente, et montrer que*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$
Donner une majoration du reste R_n *de cette série.*
2. *Calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 2.5.11 ♡ ***Transformation d'Abel***

Soient (a_n) *une suite positive décroissante de limite nulle et* (S_n) *une suite bornée.*

1. *Montrer que la série* $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ *est convergente.*
2. *En déduire que la série* $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ *est convergente.*
3. *Établir que pour tout* $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, *la série* $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ *est convergente.*

Exercice 2.5.12 ♡ ***Mines 2013***

Étudier la nature de la série de terme général
$$u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right).$$

Exercice 2.5.13 ♡

Étudier la nature de la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

2.6 Suites et séries

Exercice 2.6.1 ♡ ***Constante d'Euler***

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n.$$

1. *Montrer que la suite* (u_n) *converge en passant par une série.*
2. *Montrer que la suite* (u_n) *converge en utilisant une méthode élémentaire. La limite de cette suite est notée* γ *et est appelée constante d'Euler.*
3. *Trouver une valeur approchée de* γ *grâce à votre calculatrice.*
4. *La convergence de la suite* (u_n) *vers* γ *est-elle rapide ? (On pourra montrer que* $\gamma - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.*)*

Exercice 2.6.2 ♡

Démontrer la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.6.3 ♡

Étudier la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 2.6.4 ♡♡♡

Étudier, à l'aide d'une série, *la nature des* **suites** *de terme général* u_n *suivantes :*

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ *(on note* γ *sa limite) ;*
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$;
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - a\ln n$ *(En cas de convergence, exprimer la limite à l'aide de* γ*).*

2.7 Calculs de somme de séries

Exercice 2.7.1 ♡♡♡ ***Centrale PC 2005***

Soit $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. *On pose*
$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(a^{2^k}+1\right)}.$$

1. *Discuter suivant la valeur de* a *la nature de* $\sum u_n$.
2. *Lorsque la série converge, calculer sa somme.*

Indication 2.0 : Montrer que $u_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n$ *où* (α_n) *est une suite à déterminer.*

Exercice 2.7.2 ♡ ***Mines 2007***

1. *Étudier la convergence et calculer la somme de* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *en remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,dt$.
2. *Même question avec* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

2.8 Produit de Cauchy de deux séries

Exercice 2.8.1 ♡

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. *Étudier sa convergence et sa convergence absolue.*
2. *Soient* $a<b$*. Majorer simplement* $(x-a)(b-x)$ *pour* $x\in[a,b]$.
3. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série divergente.*

Exercice 2.8.2 ♡♡♡

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. *Convergence de cette série ?*
2. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série convergente.*

Exercice 2.8.3 ♡

Soit $z\in\mathbb{C}$*. Montrer que*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$$

Exercice 2.8.4 ♡

Indiquer la nature et éventuellement la somme de la série de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2 2^{n-k}}$$

Exercice 2.8.5 ♡

1. *Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général*

$$w_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2(n-p)!}.$$

2. *Faire de même avec la série de terme général*

$$w_n=\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2(n-p)^2}$$

en admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2.8.6 ♡

On considère les suites (a_n) *et* (b_n) *données par* $a_0=b_0=0$ *et* $\forall n\geqslant 1,\ a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont convergentes mais que leur produit de Cauchy est une série divergente.*

2.9 Formule de Stirling

Exercice 2.9.1 ♡

Trouver un équivalent de

$$u_n=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}.$$

Peut-on retrouver ce résultat à l'aide du critère de d'Alembert.

Exercice 2.9.2 ♡

Étudier la limite de $\dfrac{(2n)!}{n^n n!}$ *ainsi que la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 2.9.3 ♡

Étudier suivant les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ *la nature de la série de terme général* $u_n=\dfrac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.