Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Algèbre linéaire

1.1.1 Bases et dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exercice 1.1.1 ♡♡ ***Mines PC 2011***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ où pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $f_i : x \mapsto \cos^i x$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 1.1.2 ♡

Soit $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n et soit $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de taille n. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(1,2,\dots,n)$. Montrer que $(1,\mathrm{D},\mathrm{D}^2,\dots,\mathrm{D}^{n-1})$ est une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 1.1.3 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille libre. Les familles

$$\mathrm{S} = (u_1-u_2, u_2-u_3,\dots,u_{n-1}-u_n, u_n-u_1)$$

$$\mathrm{T} = (u_1+u_2,\dots,u_{n-1}+u_n, u_n+u_1)$$

sont-elles libres ?

Exercice 1.1.4 ♡♡ ***Mines PC 2003***

Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

exo_inclusion_noyaux

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathrm{S} = (f_1,\dots,f_n)$ est libre.

1.1.2 Applications linéaires, noyau, image

Exercice 1.1.5 ♡♡

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array} \right. \quad \text{où } \varphi(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.*

Exercice 1.1.6 ♡ ***Formule d'Euler-Poincaré***

Une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{u_0} \mathrm{E}_1 \xrightarrow{u_1} \mathrm{E}_2 \xrightarrow{u_3} \mathrm{E}_3 \dots \xrightarrow{u_{n-1}} \mathrm{E}_n \xrightarrow{u_n} \{0\}$$

est exacte si et seulement si $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $\operatorname{Im} u_i = \operatorname{Ker} u_{i+1}$. Montrer que si tous les E_i sont de dimension finie alors on a la formule d'Euler-Poincaré :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim \mathrm{E}_k = 0.$$

Exercice 1.1.7 ♡

Soient $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(gof) = f^{(-1)}(\operatorname{Ker} g)$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$
3. $\operatorname{Im} g\circ f \subset \operatorname{Im} g$

[redacted]***Exercice 1.1.8***[redacted] ♡ [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathrm{L(E)}$ *un endomorphisme. On pose*

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = x\}$$

1. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer que la somme* $\operatorname{Ker} u + \mathrm{P}$ *est directe.*

[redacted]***Exercice 1.1.9***[redacted] ♡ [redacted]

Soient f *et* g *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \iff gof = 0$.
2. *Montrer que* $fog = gof \implies \operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Montrer que* $gof = \mathrm{id} \implies f$ *injective.*

[redacted]***Exercice 1.1.10***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Montrer que pour toute partie* A *de* E, $f(\mathrm{Vect}(\mathrm{A})) = \mathrm{Vect}\big(f(\mathrm{A})\big)$.

[redacted]***Exercice 1.1.11***[redacted] ♡♡ [redacted]

On considère trois K*-espaces vectoriels* E,F,G *et deux applications* $\mathrm{E} \xrightarrow{u} \mathrm{F} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *telles que :*

1. *l'application* u *est linéaire et surjective ;*
2. *l'application* vou *est linéaire de* E *vers* G.

Montrer que l'application v *est linéaire.*

[redacted]***Exercice 1.1.12***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soient trois $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E, F, G *et deux applications linéaires* $f \in \mathrm{L(E,F)}$, $g \in \mathrm{L(F,G)}$. *Montrer que :*

1. $\operatorname{Ker}(gof) = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{\mathrm{O_E}\}$;
2. $\operatorname{Im}(gof) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

[redacted]***Exercice 1.1.13***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* u *un endomorphisme de* E.

1. *On suppose dans cette question que* $u^2 = 0$.
   (a) *Montrer que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{id_E} + u$ *est un automorphisme de* E.
2. (a) *Montrer que :* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que :* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = \mathrm{E} \iff \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

[redacted]***Exercice 1.1.14***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $(u, v) \in (\mathrm{L(E)})^2$ *qui commutent :*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v, *c'est-à-dire*

$$v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u.$$

2. *Si l'on suppose de plus que* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$, *montrer que*

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \text{ et } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

[redacted]***Exercice 1.1.15***[redacted] ♡♡♡ [redacted]

Soit un K-espace vectoriel E *et un endomorphisme* $u \in \mathrm{L(E)}$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{E}$, *le système de vecteurs* $(x, u(x))$ *est lié. Montrer que l'application* u *est une homothétie.*

[redacted]***Exercice 1.1.16***[redacted] ♡♡ [redacted]

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *avec* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels tels que* $\dim \mathrm{E} = n$ *et* $\dim \mathrm{F} = p$. *Dire et démontrer, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de* f *:*

1. *L'image de toute famille libre de* E *par* f *est libre*
2. $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$
3. *L'image d'une base de* E *par* f *est génératrice de* F.
4. $\operatorname{rg} f = n$.
5. *L'image d'une base de* E *par* f *est libre.*
6. $\operatorname{rg} f = p$.
7. *L'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
8. *L'image de toute famille génératrice de* E *par* f *est génératrice de* F.
9. $\exists g \in \mathfrak{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\quad g \circ f = \mathrm{id_E}$
10. $\exists g \in \mathfrak{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\quad f \circ g = \mathrm{id_F}$

[redacted]***Exercice 1.1.17***[redacted] ♡ [redacted]

Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P(X+1)} + \mathrm{P(X-1)} - 2\mathrm{P(X)} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* φ *est linéaire ;*
2. *Montrer que* φ *n'est pas injective et déterminer son noyau ;*
3. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 0$, φ_n *induit un isomorphisme entre* $\mathrm{X}^2\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *;*
4. *En déduire que* φ *est surjective.*

[redacted]***Exercice 1.1.18***[redacted] ♡♡♡ [redacted]

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $f \in \mathrm{L(E)}$ *un endomorphisme. On définit*

$$\varphi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L(E)} & \longrightarrow & \mathrm{L(E)} \\ u & \longrightarrow & f \circ u - u \circ f \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* $\varphi_f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathrm{E}))$.
2. *Montrer que si* f *est nilpotent, alors* φ_f *est aussi nilpotent.*

[redacted]***Exercice 1.1.19***[redacted] ♡♡ [redacted] ***X 2016*** [redacted]

Soit V *un espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{V})$. *Montrer l'équivalence entre :*

1. *il existe* $(g, h) \in (\mathfrak{L}(\mathrm{V}))^2$ *tels que* $0 = h \circ g$ *et* $f = g \circ h$.

2. $f^2 = 0$.

Exercice 1.1.20 ♡ ***X 2016***

Soit V *un espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{V})$*. Montrer l'équivalence entre :*

1. *il existe* $(g,h) \in (\mathfrak{L}(\mathrm{V}))^2$ *tels que* $0 = h \circ g$ *et* $f = g \circ h$.
2. $f^2 = 0$.

1.1.3 Rang d'un endomorphisme

Exercice 1.1.21 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$*. Montrer que*

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \left[f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2\operatorname{rg}(f)\right].$$

Exercice 1.1.22 ♡♡

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $f^{n-1} \neq 0$ *et* $f^n = 0$*. Quel est le rang de* f *?*

Exercice 1.1.23 ♡♡ ***X 2016***

Soit V *un espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{V})$*. Montrer l'équivalence entre :*

1. *il existe* $(g,h) \in (\mathfrak{L}(\mathrm{V}))^2$ *tels que* $0 = h \circ g$ *et* $f = g \circ h$.
2. $f^2 = 0$.

Exercice 1.1.24 ♡♡♡ ***X 2003***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer que :*

$$\operatorname{rg}(\mathrm{A}) + \operatorname{rg}(\mathrm{B}) - n \leqslant \operatorname{rg}(\mathrm{AB}).$$

Exercice 1.1.25 ♡ ***Mines 2003, CCP 2001, Centrale 1999***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{AB} = 0$ *et* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ *est inversible. Montrer que :*

$$\operatorname{rg}(\mathrm{A}) + \operatorname{rg}(\mathrm{B}) = n.$$

1.1.4 Produit, sommes, sommes directes de sous-espaces vectoriels

Exercice 1.1.26 ♡

Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(u,v)$ *où* $u = (1,0,1)$ *et* $v = (1,1,0)$ *dans* $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.1.27 ♡

On considère le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *et* $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *; Posons :*

$$\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{V}ect(u)$$

Prouver que F *et* G *sont des sous-espaces supplémentaires de* E.

Exercice 1.1.28 ♡

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$*, on considère l'ensemble*

$$\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \mid x = y \text{ et } x - y + t = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, et déterminer une base de* F.
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E.
3. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Exercice 1.1.29 ♡

Soit l'espace vectoriel E *des polynômes à coefficients réels de degré* $\leqslant 4$*. On considère l'ensemble*

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, déterminer une base de* F *et préciser sa dimension.*
2. *Montrer que le sous-espace vectoriel* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$ *est un supplémentaire de* F *dans* E.

Exercice 1.1.30 ♡

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$*, on considère les sous-espaces vectoriels*

$$\mathrm{F} = \mathrm{V}ect((1,2,1,3),(2,0,0,1)) \text{ et } \mathrm{G} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, x = y\right\}$$

1. *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels* F *et* G.
2. *Montrer que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
3. *En déduire que* $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 1.1.31 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f^3 = \mathrm{id}$*. Montrer que*

$$\operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{id}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f - \mathrm{id}\right) = \mathrm{E}.$$

Exercice 1.1.32 ♡

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$*. Pour tout* $i \in [\![0,n]\!]$*, on pose*

$$\mathrm{F}_i = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}, \quad \mathrm{P}(j) = 0\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}_0 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_n$.

Exercice 1.1.33 ♡

Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *des endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que* $u_1 + \ldots + u_n = \mathrm{id}$ *et tels que*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad i \neq j \implies u_i \circ u_j = 0.$$

1. *Montrer que pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*,* u_i *est un projecteur.*
2. *Montrer que* $\bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} u_i = \mathrm{E}$.

3. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est libre.

4. Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts et $u=\sum_{k=1}^{n} a_i u_i$.
   (a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Exprimer u^p en fonction de p, des a_i et des u_i.
   (b) Montrer que $\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, u^2,\dots,u^{n-1}\right)$ est libre et que $\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, u^2,\dots,u^{n}\right)$ est liée.

Indication 1.0 : Pour la dernière question, on pourra s'intéresser au sev F de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ donné par $\mathrm{F}=\mathrm{V}ect(u_1,\dots,u_n)$, montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^k\in\mathrm{F}$ et utiliser une base de F.

Exercice 1.1.34 ♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1,\dots,p_m$ des projecteurs de E tels que $p_1+\dots+p_m=\mathrm{id}$. Montrer que

$$\mathrm{E}=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathrm{Im}\,p_i.$$

Exercice 1.1.35 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_m$ des sevs de E tels que $\mathrm{E}=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{F}_i$. Montrer qu'il existe des sevs $\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_m$ de E tels que

$$\forall i\in[\![1,m]\!],\quad \mathrm{G}_i\subset\mathrm{F}_i \quad\text{et}\quad \mathrm{E}=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathrm{G}_i.$$

Exercice 1.1.36 ♡♡♡ **Un grand classique**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note :

$$\mathrm{K}_p=\mathrm{Ker}\,f^p \quad\text{et}\quad \mathrm{I}_p=\mathrm{Im}\,f^p.$$

1. Montrer que :
$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \mathrm{K}_p\subset\mathrm{K}_{p+1}\quad\text{et}\quad \mathrm{I}_{p+1}\subset\mathrm{I}_p.$$
2. Prouver qu'il existe un plus petit entier naturel $r\leqslant n$ tel que : $\forall i\geqslant r,\quad \mathrm{K}_i=\mathrm{K}_{i+1}$.
3. Montrer de même que :
$$\forall i\geqslant r,\quad \mathrm{I}_i=\mathrm{I}_{i+1}.$$
4. Montrer que : $\mathrm{E}=\mathrm{K}_r\oplus\mathrm{I}_r$.

Exercice 1.1.37 ♡

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3$ trois sevs de E tels que $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\oplus(\mathrm{E}_2\oplus\mathrm{E}_3)$. Montrer que $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\oplus\mathrm{E}_2\oplus\mathrm{E}_3$.

Exercice 1.1.38 ♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{F},\mathrm{F}',\mathrm{G},\mathrm{G}'$ des sevs de E tels que :

1. $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$,
2. $\mathrm{E}=\mathrm{F}'\oplus\mathrm{G}'$,
3. $\mathrm{F}'\subset\mathrm{G}$

Montrer que $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}'\oplus\left(\mathrm{G}\cap\mathrm{G}'\right)$.

Exercice 1.1.39 ♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E tel que $u^3=u$.

1. Que peut-on dire de u et de E quand u est bijective ?
2. On suppose u non bijective. Montrer l'équivalence $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\oplus\mathrm{E}_2\oplus\mathrm{E}_3 \iff u^3=u$ où $\mathrm{E}_1=\mathrm{Ker}\,u$, $\mathrm{E}_2=\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id})$, $\mathrm{E}_3=\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{id})$.

Exercice 1.1.40 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer l'équivalence :
$$\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Ker}\,u^2 \iff \mathrm{E}=\mathrm{Ker}\,u\oplus\mathrm{Im}\,u.$$
   Est-ce vrai en dimension infinie ?
2. On suppose que $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Ker}\,u^2$. Montrer que : $\forall n\geqslant 2,\quad \mathrm{Ker}\,u^n=\mathrm{Ker}\,u$.
3.

1.1.5 Hyperplans, formes linéaires

Exercice 1.1.41 ♡

1. Montrer que deux supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.
2. Soient $\mathrm{E}=\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}_a=\left\{f\in\mathrm{E}\mid f(a)=0\right\}$.
   (a) Que peut-on dire de F_a ?
   (b) Déterminer tous les supplémentaires de F_a dans E.

Exercice 1.1.42 ♡

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{E}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on considère un hyperplan H stable pour le produit. Montrer que $\mathrm{I}_n\in\mathrm{H}$.

Indication 1.0 : On pourra raisonner par l'absurde et montrer l'implication $\mathrm{M}^2\in\mathrm{H}\implies\mathrm{M}\in\mathrm{H}$.

Exercice 1.1.43 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit F un sev de E tel que $\mathrm{F}\neq\mathrm{E}$.

1. Montrer qu'il existe un hyperplan H de E contenant F.
2. Montrer que F est égal à l'intersection des hyperplans le contenant.

Exercice 1.1.44 ♡ **À savoir retrouver**

Montrer que deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

Exercice 1.1.45 ♡ **X 2011**

Soient H et K deux hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n. Que peut-on dire de la dimension de $\mathrm{H}\cap\mathrm{K}$?

[redacted] Exercice 1.1.46 [redacted] ♡ [redacted] Centrale 2012 [redacted]

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \varphi(x)u.$$

[redacted] Exercice 1.1.47 [redacted] ♡♡♡ [redacted] Centrale 91, Mines 06, X 2014 [redacted]

Montrer que tout hyperplan H de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Indication 1.0 : Raisonner par l'absurde et montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $\mathrm{N} \in \mathrm{H}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$. Que dire de λ pour I_n ? Construire alors une matrice inversible élément de H.

1.1.6 Endomorphismes commutants

doms

[redacted] Exercice 1.1.48 [redacted] ♡♡♡ [redacted] Endomorphisme commutant avec tous les autres [redacted]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes f de E tels que :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \big(x, f(x)\big) \text{ est une famille liée.}$$

2. *En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tout autre endomorphisme.*

Indication 1.0 : Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pourra considérer une projection sur $\mathrm{Vect}(x)$.

5_14

[redacted] Exercice 1.1.49 [redacted] ♡ [redacted] ENS PC 99 [redacted]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $e = \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ soit libre. Montrer que les seuls endomorphismes de E commutant avec u sont les polynômes en u.

[redacted] Exercice 1.1.50 [redacted] ♡ [redacted]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$ (On dit que u est nilpotent d'indice n).

1. *Montrer que u n'est pas bijective.*
2. *Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}) \mid u \circ v = v \circ u\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(u)$.*
3. *Déterminer le rang de u.*
4. *Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(u)$.*

[redacted] Exercice 1.1.51 [redacted] ♡ [redacted] Type X [redacted]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soient n endomorphismes $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ tous nilpotents et qui commutent deux à deux. Montrer que leur produit est nul.

1.1.7 Projecteurs

[redacted] Exercice 1.1.52 [redacted] ♡ [redacted]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E.

1. *On suppose qu'il existe $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un projecteur tel que $u = p \circ u - u \circ p$.*
   (a) *Montrer que $u\big(\mathrm{Ker}\, p\big) \subset \mathrm{Im}\, p$ et que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$.*
   (b) *En déduire que $u^2 = 0$.*
2. *Réciproquement, montrer que si $u^2 = 0$ alors il existe $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un projecteur tel que $u = p \circ u - u \circ p$.*

[redacted] Exercice 1.1.53 [redacted] ♡♡ [redacted]

On définit sur $\mathrm{E} = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ l'application $u : \mathrm{P} \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\right)$.

1. *Montrer que u est un projecteur et détermines sa matrice dans la base canonique.*
2. *Déterminer son noyau, son image.*

[redacted] Exercice 1.1.54 [redacted] ♡ [redacted]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. *Soient $p, q \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ deux projecteurs de E tels que $p + q = 0$. Montrer que $p = q = 0$.*
2. *On suppose E de dimension finie n. Soit $k \geqslant 2$ et soit $(p_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ une famille de k projecteurs de E de somme nulle. Montrer que : $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i = 0$.*

[redacted] Exercice 1.1.55 [redacted] ♡♡ [redacted] X PC 2016 [redacted]

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère $e \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$, $i \in \mathfrak{L}(\mathrm{Im}(e), \mathrm{E})$ et $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{Im}(e))$ des applications linéaires telles que $i \circ p = e$ et $p \circ i = \mathrm{id}$.

1. *Montrer que i est injective et que p est surjective.*
2. *Montrer que si $e \circ e = e$ alors i et p existent.*
3. *Que dire de la réciproque ?*
4. *Y a t-il unicité du couple (i, p) ?*

1.2 Matrices

1.2.1 Calcul matriciel

[redacted] Exercice 1.2.1 [redacted] ♡ [redacted]

On munit $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de sa base canonique $e = \left(\mathrm{E}_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Reconnaître les application définies, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ par

$$f_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{E}_{ii}\mathrm{M}\mathrm{E}_{jj} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \mathrm{E}_{ii}\mathrm{M}\mathrm{E}_{ii} \end{array} \right. .$$

1.2.2 Matrices inversibles

Exercice 1.2.2 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme que* $P = X^3 - 3X + 3$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Exercice 1.2.3 ♡♡

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2.4 ♡♡

Soit A *une matrice carrée nilpotente de taille* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que la matrice* $(I_n - A)$ *est inversible.*

Exercice 1.2.5 ♡♡ ***X PC 2007***

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* A^{-1} *peut s'écrire comme un polynôme de* A.

Exercice 1.2.6 ♡♡ ***X PC 2013***

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{i,j}| > \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A *est inversible.*

Exercice 1.2.7 ♡♡♡ ***CCP PC 1992***

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = A + B$. *Montrer que* $AB = BA$.

1.2.3 Puissances d'une matrice

Exercice 1.2.8 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

exo_tr_produit_scalaire

1. *Montrer que* $A - I_3$ *est nilpotente d'ordre* 3 *(c'est-à-dire que* $(A - I_3)^2 \neq 0$ *et que* $(A - I_3)^3 = 0$
2. *En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2.9 ♡

Calculer A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de deux manières différentes.*

Exercice 1.2.10 ***X PC 2011***

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On pose pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $M(z) = A + zB$. *On suppose que* $M(z)$ *est nilpotente pour* $n+1$ *valeurs distinctes de* z. *Montrer que* A *et* B *sont aussi nilpotentes.*

Exercice 1.2.11 ♡♡

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 5X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$, *déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^2 - 5X + 4$.
4. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2.12 ♡♡

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *remplie de* 1 *:*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* J^2 *puis pour* $k \in \mathbb{N}$, J^k.
2. J *est-elle inversible ?*
3. *On considère la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculer les puissances successives de A.

1.2.4 Trace

Exercice 1.2.13 ♡♡ ***Un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées***

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On note*

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(AB^T)$$

1. *Calculer* $< A, B >$ *en fonction des coefficients de* A *et* B.
2. *Vérifier que* $< A, B >=< B, A >$
3. *On note* $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$. *Montrer que* $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
4. *Montrer que* $A \mapsto < A, B >$ *et* $B \mapsto < A, B >$ *sont des formes linéaires sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5. *Montrer que* $|<\mathrm{A},\mathrm{B}>| \leqslant \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{B}\|$.

On a prouvé que $<,>$ *est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *voir le chapitre* **??**. *L'inégalité prouvée dans la dernière question n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz. Voir le théorème* **??** *page* **??**.

Exercice 1.2.14 ♡ ***TPE PC 2011***

1. *Existe-t-il deux matrices* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $\mathrm{AB}-\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$?
2. *Montrer que s'il existe* $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $\mathrm{AB}-\mathrm{BA} = \mathrm{A}$ *alors* A *n'est pas inversible.*
3. *Montrer que si* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}) = 0$ *alors* $\mathrm{A} = 0$

Exercice 1.2.15 ♡

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $\mathrm{AB}-\mathrm{BA} = \mathrm{B}$.
Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{B}^k) = 0$.

Exercice 1.2.16 ♡

Soit deux matrices $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{AX}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BX})$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 1.2.17 ♡

Dans le $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *on considère* $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{E}$. *Discuter et résoudre dans* E *l'équation*

$$\mathrm{M} + \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Exercice 1.2.18 ♡ ***TPE PC 2009***

Déterminer toutes les formes linéaires φ *sur* $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *vérifiant :*

$$\forall \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA}).$$

Exercice 1.2.19 ♡

1. *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\right)$.
2. *On note* $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de taille* n. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}^4) \geqslant 0$ *puis montrer l'implication* $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}^4) = 0 \implies \mathrm{M} = 0$.

Exercice 1.2.20 ♡

Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *vérifie* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 1$ *alors* A *est la matrice d'un projecteur.*

Exercice 1.2.21 ♡

Dans $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *on considère* $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ *de trace non nulle. Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on considère l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{M} + \alpha\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} \end{array} \right. .$$

Montrer que f *est un endomorphisme puis déterminer son noyau, son rang, son image et sa trace.*

1.2.5 Changements de base

Exercice 1.2.22 ♡

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *et* $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ *tous deux munis de leurs bases canoniques respectives qu'on notera* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *et* $f = (f_1, f_2)$. *Soit* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array} \right.$.

1. *Prouver que* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et écrire la matrice de* u *relativement aux bases* e *et* f.
2. *On considère les familles de vecteurs* $e' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ *avec* $e'_1 = (0,1,-1)$, $e'_2 = (1,0,2)$, $e'_3 = (1,1,0)$ *et* $f' = \left(f'_1, f'_2\right)$ *avec* $f'_1 = (1,0)$, $f'_2 = (1,1)$. *Montrer que* e' *et* f' *sont des bases de respectivement* E *et* F *et écrire les matrices de changement de base de* e *vers* e' *et de* f *vers* f'.
3. *En déduire la matrice de* u *relativement aux bases* e' *et* f'.

Exercice 1.2.23 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* e, *on considère la famille de vecteurs* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *donnés par* $\varepsilon_1 = (1,0,2)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$. *Posons* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E. *Donner une base de* E *adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.*
2. *Écrire, dans la base* e, *la matrice de la projection* p *de* E *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire les matrices, dans la base* e *de :*
   (a) *la projection* p' *de* E *sur* G *parallèlement à* F.
   (b) *la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G.

Exercice 1.2.24 ♡

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\varepsilon_1 = (0,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ *et* $\varepsilon_3 = (0,1,1)$. *On pose :* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\varepsilon_3)$.

1. *Prouver que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E *et en déduire que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique* e *de* E *de la projection* p *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire, dans la base canonique de* E, *la matrice de la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G *et la matrice de la projection* p' *sur* G *parallèlement à* F.

Exercice 1.2.25 ♡

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par* A *dans la base* e. *On pose* $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,2)$ *et* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*

3. *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et de* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 1.2.26 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, e_2, e_3)$. *On considère* f *l'endomorphisme de* E *dont la matrice dans la base* e *est* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^2. *Que peut-on en déduire au sujet de* f ?
2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$.
3. *Prouver de deux façons différentes que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E.
4. *Quelle est la matrice de* f *relativement à une base adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 1.2.27 ♡

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. *Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* e *est* A.

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$. *Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer une base à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$ *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Écrire* f *comme composée de transformations vectorielles élémentaires.*

Exercice 1.2.28 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, e_2, e_3)$. *On considère* $u \in \mathfrak{L}(E)$ *représenté dans la base* e *par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la famille* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_1 = -e_1 + e_2 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_2$ *et* $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ *est une base de* E. *Écrire la matrice de passage de la base* e *à la base* ε.
2. *Calculer la matrice de* u *dans la base* ε.
3. *En déduire la matrice de* u^n *dans la base* e.

Exercice 1.2.29 ♡ **Votre première diagonalisation**

On considère le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $e = (e_1, e_2, e_3)$. *Soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté dans la base* e *par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Le but de cet exercice est de trouver une base* ε *de* E *tel que dans cette base la matrice de* u *est diagonale. On dira alors qu'on a diagonalisé* u.

1. *Développer le polynôme* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. P *est appelé* ***polynôme caractéristique*** *de* u.
2. *Calculer les racines de* P. *Les trois réels trouvés sont appelées* ***valeurs propres*** *de* u.
3. *Déterminer des vecteurs* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *de* E *en sorte que* (ε_1) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u - id)$, (ε_2) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u - 2id)$ *et* (ε_3) *forme une base de* $\operatorname{Ker}(u + id)$. *Ces trois vecteurs sont des* ***vecteurs propres*** *de* u.
4. *Montrer que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E.
5. *Vérifier que la matrice de* u *dans la base* ε *est diagonale.*

1.2.6 Calculs par blocs

Exercice 1.2.30 ♡

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}[n, p]\mathbb{K}$, $C \in GL_p(\mathbb{K})$ *et*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Montrer que $M \in GL_{n+p}(\mathbb{K})$ *et calculer* M^{-1}.

Exercice 1.2.31 ♡

Montrer que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Indication 1.0 : On pourra faire intervenir des nombres complexes.

Exercice 1.2.32 ♡

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension respectives* m, $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ *de rang* r. *Notons* $\mathscr{C}(u) = \left\{ v \in \mathfrak{L}(F, E) \mid u \circ v = 0_{\mathfrak{L}(F)} \text{ et } v \circ u = 0_{\mathfrak{L}(F)} \right\}$. *Montrer que* $\mathscr{C}(u)$ *est un sev de* $\mathfrak{L}(F, E)$ *et calculer sa dimension.*

1.2.7 Matrices semblables

Exercice 1.2.33 ♡ **TPE PC 2006**

On considère

$$S : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A = (a_{i,j}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, a_{j,i} \end{cases}.$$

Montrer que si A *et* B *sont semblables alors* $S(A) = S(B)$.

Exercice 1.2.34 ♡♡ ***X PC 2011***

Soient $x_0, x_1, x_n \in \mathbb{R}$ $n+1$ réels deux à deux distincts. Trouver l'inverse (après avoir justifié son existence) de la matrice de Vandermonde en considérant

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right. .$$

Exercice 1.2.35 ♡♡♡

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1.3 Déterminants

1.3.1 Formes multilinéaires alternées

Exercice 1.3.1 ♡

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = Id - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x)) f(q(y)) - f(p(y)) f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

1.3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 1.3.2 ♡

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$. Montrer que l'espace E est de dimension paire.

Exercice 1.3.3 ♡

Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. *Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.*
2. *Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.*

Exercice 1.3.4 ♡ ***Centrale PC***

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. *Montrer qu'il existe un unique couple de complexes (a, b) tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z}$$

2. *Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.*

1.3.3 Déterminant d'une matrice

Exercice 1.3.5 ♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique avec n impair. Montrer qu'elle n'est pas inversible.

Exercice 1.3.6 ♡

Soit la matrice $A = ((\inf(i, j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer son déterminant.

Exercice 1.3.7 ♡

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $n > p$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

1.3.4 Calcul de déterminants

Exercice 1.3.8 ♡

Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.3.9 ♡

Calculer le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x+1) & 1 & \dots & & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & & \dots & & (x+n) \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.10 ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on a

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 1.3.11 ♡

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.12 ♡♡ Centrale PC 2003

Calculer :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ n-1 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.13 ♡♡ CCP PC 2003

Soient a, b, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. On se propose de calculer

$$\Delta=\begin{pmatrix} r_1 & b & \dots & b\\ a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ a & \dots & a & r_n \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, on introduit le déterminant d'ordre n :

$$\mathrm{P}(x)=\begin{pmatrix} r_1-x & b-x & \dots & b-x\\ a-x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x\\ a-x & \dots & a-x & r_n-x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{C}$.

1. *Montrer que* P *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* 1.
2. *Calculer* $\mathrm{P}(a)$ *et* $\mathrm{P}(b)$ *quand* $a \neq b$.
3. *Déterminer entièrement* $\mathrm{P}(x)$ *et* Δ *quand* $a \neq b$.
4. *En utilisant la continuité de l'application qui à chaque réel b associe* $\mathrm{P}(0)$, *déduire* Δ *lorsque* $a = b$

Exercice 1.3.14 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A}=((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ii}=1, a_{1,i}=1, a_{i1}=1$ *et* 0 *sinon.*

Exercice 1.3.15 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A}=((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $a_{ij}=\alpha$ *pour* $i \leqslant j$ *et* $a_{ij}=1$ *pour* $i > j$.

Exercice 1.3.16 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A}=((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ii}=i$ *et sinon* $a_{ij}=2$.

Exercice 1.3.17 ♡

Calculer le déterminant $(2p)\times(2p)$ *suivant :*

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b\\ & \ddots & & & \nearrow & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \nearrow & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.18 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A}=((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ij}=(-1)^{i+j}$.

Exercice 1.3.19 ♡

Caluler $\mathrm{D}=\det\max(i,j)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 2 & 3 & \dots & n\\ 3 & 3 & 3 & \dots & n\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ n & n & \dots & \dots & n \end{vmatrix}.$

Exercice 1.3.20 ♡

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n\\ n & 2 & n & \dots & n\\ n & n & 3 & \dots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.21 ♡

Calculer $\det(ia+jb)$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3.22 ♡

Calculer $\det(1+a_ia_j)$ *où* $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3.23 ♡

Calculer $\det(|i-j|)$.

Exercice 1.3.24 ♡

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\Delta(h)=\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h)\\ 1 & f(x+h) & f(x+2h)\\ 1 & f(x+2h) & f(x+3h) \end{vmatrix}$$

Déterminer

$$\lim_{h\to 0}\Delta(h)/h^2$$

Exercice 1.3.25 ♡

Calculer les déterminants suivants en utilisant un déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Indication 1.0 : Pour le deuxième, introduire

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.3.26 ♡

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 1.3.27 ♡ **Déterminant de Cauchy**

On considère $2n$ *scalaires* $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ *tels que tous les* a_i *sont distincts et* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_i \neq 0$. *On veut calculer le déterminant de* Cauchy *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

a. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*

$$R(X) = \frac{(b_1 - X)\dots(b_{n-1} - X)}{(X + a_1)\dots(X + a_n)}$$

b. *Exprimer* Δ_n *en fonction de* Δ_{n-1}.

c. *Calculer* Δ_n.

1.3.5 Calcul de déterminants en utilisant une relation de récurrence

Exercice 1.3.28 ♡

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.3.29 ♡

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 1.3.30 ♡

Calculer le déterminant tridiagonal avec $\alpha + \beta$ *sur la diagonale principale,* 1 *en dessous et* $\alpha\beta$ *au dessus.*

Exercice 1.3.31 ♡

Calculer le déterminant tridiagonal avec des 1 *partout.*

Exercice 1.3.32 ♡

Calculer le déterminant tridiagonal

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1.3.6 Exercices théoriques sur les déterminants

Exercice 1.3.33 ♡

Soient deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *avec* $p < n$. *Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Exercice 1.3.34 ♡

Considérons pour $n \geqslant 2$*, l'application*

$$\det : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 1.3.35 ♡

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 1.3.36 ♡

Déterminer toutes les formes p*-linéaires alternées sur* $\mathbb{R}^n$ *où* $p > n$.

Exercice 1.3.37 ♡

Dans $\mathbb{R}^5$, *déterminer tous les endomorphismes* f *vérifiant* $f^2 + \mathrm{id} = 0$.

Exercice 1.3.38 ♡

Déterminer le rang de la comatrice $\widetilde{A}$ *en fonction du rang de* A. *(Penser à la caractérisation du rang par les matrices extraites.)*

Exercice 1.3.39 ♡

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *de colonnes* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. *On définit à partir des colonnes de* A, *la matrice* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *de vecteurs colonnes* $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *où :*

$$B_i = \sum_{j\neq i} A_i$$

Exprimez le déterminant de la matrice B *en fonction du déterminant de la matrice* A.

Exercice 1.3.40 ♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficients entiers relatifs. Montrer l'équivalence*

$$\underbrace{\left(\text{A inversible et } A^{-1} \text{ a ses coefficients dans } \mathbb{Z}\right)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\left(\det(A) = \pm 1\right)}_{(ii)}$$

Démontrer que $\mathrm{G}l_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1,1\}\}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{G}l_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.3.41 ♡

Soient deux matrices à coefficients réels $(A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. *On suppose qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.3.42 ♡

On considère un système $(f_1,\dots,f_n)$ *de fonctions de* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *qui est libre dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* n *réels* $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tels que la matrice* $A = ((f_i(x_j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *soit inversible.*

Exercice 1.3.43 ♡

Soit une application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ *non-constante vérifiant :*

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que

$$\underbrace{\left(f(A) = 0\right)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\left(\det(A) = 0\right)}_{(ii)}$$

Exercice 1.3.44 ♡

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+j > n+1 \implies a_{ij} = 0$$

Calculer $\det(A)$. *Si on suppose de plus que* $a_{ij} > 0$ *lorsque* $i+j \leqslant n+1$, *déterminer le signe de* $\det(A)$.

Exercice 1.3.45 ♡

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et on définit la matrice* $A' = ((\ (-1)^{i+j} a_{ij}))$. *Exprimer* $\det(A')$ *en fonction de* $\det(A)$.

Exercice 1.3.46 ♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *et l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$. *Exprimer* $\det(f)$ *en fonction de* $\det(A)$.

Exercice 1.3.47 ♡

Calculer pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, *le déterminant d'ordre* $(2n)$ *:* $m = \begin{vmatrix} a & & \mathbb{O} & b & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & \mathbb{O} & & b \\ c & & \mathbb{O} & d & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & c & \mathbb{O} & & d \end{vmatrix}$.

Exercice 1.3.48 ♡

Quel est de déterminant de l'endomorphisme Φ *défini par*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array} \right. .$$

Exercice 1.3.49 ♡

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n > p$. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Exercice 1.3.50 ♡♡♡ ***Mines PC 2009***

Soient $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AC = CA$. *On pose* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. *Montrer que*

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$