FICHE : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les petits o...

$$\boxed{\underset{x\to 0}{o}(1) = \varepsilon(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = x^n \varepsilon(x)}$$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Définition

Soient une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n au voisinage de x_0 s'il existe :

$$\begin{cases} \text{un polynôme P de degré} \leqslant n \\ \text{une fonction } \varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \text{ vérifiant } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \end{cases}$$

tels que

$$\forall x \in \mathrm{I}, f(x) = \mathrm{P}(x) + \underbrace{(x - x_0)^n \varepsilon(x)}_{= \underset{x\to a}{o}(x^n)}$$

— P est appelé **partie régulière** ou **partie principale** du développement limité de f en x_0.
— $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé **reste** du développement limité de f en x_0.

Propriétés

Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en 0 alors :

- la partie régulière du DL d'ordre n en 0 de f est unique.
- Si f est paire (resp. impaire) sur un voisinage (symétrique) de 0 alors la partie principale de son DL à l'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Formule de Taylor-Young

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. Il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)}$.

Opérations sur les DLs

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I admettant en 0 des DL d'ordre n :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \mathrm{P}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{Q}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

où P et Q sont des polynômes réels de degré n alors

- $f + g$ admet un Dl d'ordre n en 0 donné par, pour tout $x \in \mathrm{I}$:
$$(f+g)(x) = (\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$
- fg admet un Dl d'ordre n en 0 donné par, pour tout $x \in \mathrm{I}$:
$$(fg)(x) = \mathrm{R}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$
où $\mathrm{R}(x)$ est égal au produit $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ auquel on a retiré tout les terme de degré $> n$.
- Si de plus $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$ alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$ dans le polynôme $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.
- Si g admet une limite non nulle en 0 alors $\frac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en 0.

Comment inverser un DLs

On suppose que $g(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u} \text{ avec } u = -\left(a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right) \\
&= 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \underset{x\to 0}{o}\left(u^n\right) \\
&= 1 - \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) + \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 + \ldots + (-1)^n \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

qu'on développe et tronque en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$.

Primitivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si :

H1 f est dérivable sur I.

H2 f' admet un DL d'ordre n en 0 :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = \overbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}^{\mathrm{P}'(x)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

alors f admet un DL d'ordre $n+1$ en 0 obtenu en primitivant la partie régulière du DL de f' et en ajoutant $f(0)$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{\mathrm{P}(x)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)}$$

ATTENTION ! ! ! On ne peut pas, en général, dériver un DL