Fiche : Développements limités des fonctions usuelles

Formule de Taylor avec reste intégrale ♡

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(a,x) \in I^2$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Formule de Taylor-Young ♡

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Autrement dit, on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$

$$\begin{array}{rrcl}
\heartsuit & \dfrac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\
\rightsquigarrow & \dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\
\rightsquigarrow & \dfrac{1}{1-x^2} & = & 1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)
\end{array}$$

Fonctions exponentielle et hyperboliques

$$\begin{array}{rrcl}
\heartsuit & e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\
\heartsuit & \operatorname{ch} x & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\
\heartsuit & \operatorname{sh} x & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \tanh x & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)
\end{array}$$

Fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{rrcl}
\heartsuit & \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\
\heartsuit & \sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \tan x & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)
\end{array}$$

Fonction logarithme

$$\begin{array}{rrcl}
\rightsquigarrow & \ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\
\heartsuit & \ln(1-x) & = & -\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{array}$$

Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\heartsuit \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

Cette dernière formule appliquée à $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ donne :

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+x} & = & 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\
\sqrt{1-x} & = & 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)
\end{array}$$

Fonctions réciproques

$$\begin{array}{rrcl}
\rightsquigarrow & \arctan x & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \operatorname{argth} x & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \arcsin x & = & x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \operatorname{argsh} x & = & x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\rightsquigarrow & \arccos x & = & \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} - \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{array}$$

La dernière s'obtient en remarquant que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
Légende : ♡ = à savoir par coeur, ⇝ = à savoir retrouver rapidemment.