FICHE : INTÉGRATION

Subdivision

Soit $[a,b]$ un segment. On appelle **subdivision** du segment $[a,b]$ toute famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Fonction continue par morceaux

— Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = n$ du segment $[a,b]$ telle que :

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
2. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, φ restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie strictement à droite en x_k et strictement à gauche en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

— Une telle subdivision est dite **adaptée** ou **subordonnée** à φ.

Théorème fondamental

Si

H1 f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$

alors $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ existe.

Autrement dit, si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors elle est intégrable sur $[a,b]$.

Propriétés de l'intégrale

oient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$

1

$$\boxed{f \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g}$$

2 Soit $c \in]a,b[$.

$$\boxed{\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f}$$

3 Comme f est une fonction réelle continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, il existe des réels m et M tels que $\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$. On a alors :

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}(b-a)}$$

4

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

5 On a l'**inégalité de la moyenne** :

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|}$$

Primitive

Soit f une fonction définie sur une partie I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que :

H1 F est dérivable sur I.

H2 $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x)$

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\mathrm{G} = \mathrm{F} + c$.

Une formule essentielle

$$\boxed{\int u' u^\alpha = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}}$$

Théorème fondamental de l'analyse

H1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

H2 Soit f une fonction continue sur I

Soit $a \in \mathrm{I}$ alors la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F} : \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et est la seule primitive de f qui s'annule en a :

$$\mathrm{F}' = f \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(a) = 0.$$

Corollaire du TFA

Soient :

H1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

H2 Soit f une fonction continue sur I

alors $\boxed{f \text{ admet une primitive F sur I}}$.

Autrement dit :toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur ce segment.

Formule d'intégration par parties

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On a :

alors :

$$\boxed{\int_a^b \overbrace{u'(t)}^{\text{intègre}} \underbrace{v(t)}_{\text{dérive}}\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Changement de variable

Pour calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:

1. On vérifie que $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathrm{I}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ et que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
2. On pose $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$
3. On écrit : $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

Attention de bien penser à transformer les bornes

Formule de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(a, x) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

— Le polynôme

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

est appelé **polynôme de Taylor de f de degré n.**

— L'intégrale

$$\mathrm{R}_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée **reste intégral.**

Somme de Riemann

Soit une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$. On définit les suites de termes généraux

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{x} \text{ et } \mathrm{T}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{x}$$