FICHE : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dans toute la fiche f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$

8 techniques de calcul de limites

- Par factorisation par les termes dominants
- Par multiplication par la quantité conjuguée
- Par usage des limites usuelles ou des croissances comparées.
- En utilisant les équivalents.
- Par application du théorème des gendarmes.
- En reconnaissant le taux d'accroissement d'une fonction dérivable.
- Par changement de variable.
- Par simplification.

Théorème d'opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l et l' lorsque x tend vers a. Alors :

- On a :
$$\boxed{|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |l|}$$
- Si λ et μ sont deux réels :
$$\boxed{\lambda f(x)+\mu g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda l+\mu l'}$$
- On a :
$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} ll'$$
- Si $l \neq 0$, $1/f$ est définie au voisinage de a et :
$$\boxed{\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{l}}$$
- Plus généralement, si $l \neq 0$, f/g est définie au voisinage de a et :
$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{l}{l'}}$$

Théorème des gendarmes

Soient α, f, β trois fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall x \in V, \quad \alpha(x) \leqslant f(x) \leqslant \beta(x)$

H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ et $\beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

alors la fonction f admet une limite au point a et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Ce théorème se généralise aux limites infinies : par exemple, si au voisinage de $a \in \bar{I}$, on a :

H1 $f(x) \geqslant \alpha(x)$.

H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Théorème de la limite monotone

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $I =]a,b[$.
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** alors il y a deux possibilités :

1. f est majorée et alors f admet une limite finie lorsque x tend vers b. On a alors $\lim\limits_{b} f = \sup\limits_{I} f$.
2. f n'est pas majorée et alors $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

Fonction négligeable devant une autre

Définition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est **négligeable** devant $g(x)$ au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \text{ au voisinage de } a \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

On note alors : $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Croissances comparées

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:
$$\boxed{(\ln x)^{\gamma} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^{\alpha}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{x^{\alpha} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\beta x}\right)}$$
- En 0 :
$$\boxed{|\ln x|^{\gamma} = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{e^{\beta x} = \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)}$$

Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Définition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction α définie sur un voisinage de a telle que :

$$f(x) = \alpha(x)\, g(x) \text{ au voisinage de } a \quad \text{et} \quad \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

On note alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1}$$

Opérations sur les équivalents

On peut effectuer des :

- produits d'équivalents
- quotients d'équivalents.
- puissances d'équivalents.

Par contre, il ne faut pas :

- Sommer des équivalents.
- Composer des équivalents. En particulier, il ne faut par :
  - Prendre des logarithmes d'équivalents.
  - Prendre des exponentielles d'équivalents.

Équivalents usuels

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

alors :

$$\boxed{\ln\big(1+f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \qquad \boxed{e^{f(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

$$\boxed{\sin f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\tan f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\operatorname{sh} f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\tanh f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

$$\boxed{\arcsin f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\arctan f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\operatorname{argsh} f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)} \quad \boxed{\operatorname{argth} f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)}$$

$$\boxed{\cos f(x) - 1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{f(x)^2}{2}} \quad \boxed{\operatorname{ch} f(x) - 1 \underset{x\to a}{\sim} \frac{f(x)^2}{2}} \quad \boxed{\arccos f(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x\to a}{\sim} -f(x)}$$

$$\boxed{\big(1+f(x)\big)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Propriétés importantes des équivalents

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors :

- il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.
- si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Définition de la continuité

- On dit que f est **continue en** $a \in \mathrm{I}$ si et seulement si

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{l = f(a)}$$

- On dit qu'une fonction f est **continue sur un intervalle** I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I.

Théorème d'opérations sur les fonctions continues

- Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.
- Une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I.
- Le produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
- Le quotient de deux fonctions continues sur I est (s'il est défini) continue sur I.
- La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ tel que $a < b$. On suppose que :

H1 f est continue sur $[a,b]$.

H2 $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.

Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\boxed{f(c) = 0}$.

Continue implique bornée

Une fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteind ses bornes

Théorème de la bijection

Soit une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On note $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. On suppose que la fonction f est

H1 continue sur I.

H2 strictement monotone sur I.

alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction **continue** et strictement monotone sur J de même sens que f.