Fiche : Dérivées et primitives des fonctions usuelles

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

- $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est dérivable sur $]-1, 1[$.
- $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est dérivable sur $]-1, 1[$.
- $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$\log_a x$ $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{sh^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$]-1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est $\boxed{\text{une}}$ primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont $\boxed{\text{uniques à une constante près}}$ notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
x^α $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x) + C$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x) + C$
$1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + C$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ sur I est $-\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$ sur I est $-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln\lvert u\rvert$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

Plus généralement, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^a = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u \ + C & \text{si } a = -1 \end{cases}}$$