FICHE : INÉGALITÉS CLASSIQUES

Avec des identités remarquables

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$4ab \leqslant (a+b)^2$$
$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$$
$$2\,|ab| \leqslant a^2+b^2$$
$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ si } a,b>0$$
$$1+nx \leqslant (1+x)^n \text{ pour } x>-1 \text{ (Inégalité de Bernoulli)}$$
$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b| \text{ (Inégalités triangulaires)}$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz et applications

Dans un préhilbertien $(E, \langle .|. \rangle)$, pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\boxed{|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Il en résulte que :

- $\forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$;
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}), \quad \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t}$;
- Pour toutes fonctions f, g continues et de carré intégrable sur I : $\left|\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I |g(t)|^2\,\mathrm{d}t}$;

Fonctions usuelles

$$\forall x \geqslant 0, \quad 1-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$$
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x - 1| \leqslant \frac{x^2}{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x \leqslant x$$
$$\forall x \geqslant 0, \quad x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall x>-1, \ln(1+x) \leqslant x$$
$$\forall x > 0, \quad \ln x < x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x$$
$$\forall x \geqslant 0, \quad \mathrm{sh}\, x \geqslant x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}$$

Inégalité des accroissement finis - Version I

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 f est continue sur $[a,b]$

H2 f est dérivable sur $]a,b[$

H3 Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors on a :

$$\boxed{m\,(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M\,(b-a)}$$

Inégalité des accroissement finis - Version II

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\quad f$ est continue sur $[a,b]$

H2 $\quad f$ est dérivable sur $]a,b[$

H3 $\quad |f'|$ est majorée sur $]a,b[$: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant \alpha$

Alors on a :

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|\, |b-a|}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Si $x \in I$, on peut, d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, écrire $f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= T_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}}$$

où M_{n+1} est un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,x]$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,x]$)

Comparaison séries-intégrales

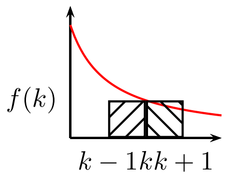
Soit $f : [a,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ($a \in \mathbb{N}$). On suppose que :

H1 $\quad f$ est à valeurs *positives*.

H2 $\quad f$ est *décroissante*.

Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_a^n f(t)\, \mathrm{d}t\right)$ sont de même nature. De plus, si elles convergent :

$$\boxed{\int_{a+1}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=a+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t}$$



Critère spécial des séries alternées (TSA)

On considère une série $\sum \underbrace{(-1)^n v_n}_{u_n}$.

H1 $\quad$ À partir d'un certain rang $v_n \geqslant 0$.

H2 $\quad$ La suite (v_n) est *décroissante* à partir d'un certain rang.

H3 $\quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors :

1. la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge ;
2. On dispose d'une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n v_n$ par la valeur absolue du premier terme négligé $|u_{n+1}|$:

$$\boxed{|R_n| \leqslant v_{n+1}}$$

3. Le signe du reste R_n est le même que celui du premier terme négligé : $\mathrm{sg}(R_n) = \mathrm{sg}(u_{n+1})$.
4. En notant respectivement S et S_n la somme et la nième somme partielle de la série, comme (S_{2n}) est décroissante, que (S_{2n+1}) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, on a les inégalités sur les sommes partielles :

$$\boxed{S_1 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \ldots \leqslant S \leqslant \ldots \leqslant S_{2n} \leqslant \ldots \leqslant S_2 \leqslant S_0}.$$