FICHE : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Hypothèse de domination

On dit qu'une fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array} \right.$$

vérifie *l'hypothèse de domination* si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

- H1 φ est continue par morceaux sur I ;
- H2 φ est intégrable sur I ;
- H3 $\forall (x,t) \in A \times I, |F(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Continuité sous le signe somme

On considère une fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array} \right.$$

et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur A ;
- H3 F vérifie l'hypothèse de domination.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
est continue sur A.

Dérivation sous le signe somme

On considère une fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array} \right.$$

et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est dérivable sur A.
- H3 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.
- H4 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- H5 La fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$.

Alors :

1. La fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
2. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I.
3. $\forall x \in A, f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$.

Hypothèse de domination locale

On dit qu'une fonction
$$F:\left\{\begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t)\end{array}\right.$$
vérifie *l'hypothèse de domination locale* si et seulement si pour tout segment $K \subset A$, il existe une fonction $\varphi_K : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

- H1 φ_K est continue par morceaux sur I ;
- H2 φ_K est positive sur I ;
- H3 φ_K est intégrable sur I :
- H4 $\forall (x,t) \in K\times I, |F(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$

Théorème de continuité, extension à la domination locale

On considère une fonction
$$F:\left\{\begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t)\end{array}\right.$$
et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur A ;
- H3 F vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction
$$f:\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\ \mathrm{d}t\end{array}\right.$$
est continue sur A.

Dérivation sous le signe somme, extension à la domination locale

On considère une fonction
$$F:\left\{\begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t)\end{array}\right.$$
et on suppose que :

- H1 Pour tout $x \in A$, la fonction $F_2 : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- H2 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est dérivable sur A.
- H3 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.
- H4 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- H5 La fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$.

Alors :

1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La fonction
$$f:\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\ \mathrm{d}t\end{array}\right.$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
3. $\forall x \in A$, $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$.

Dérivations successives sous le signe somme

On considère une fonction
$$F:\left\{\begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t)\end{array}\right.$$
et on suppose que :

- H1 Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A ;
- H2 Pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto F(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$, …, $t \mapsto \dfrac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I.
- H3 Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- H4 La fonction $\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$ vérifie l'hypothèse de domination (locale).

Alors :

1. La fonction
$$f:\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\ \mathrm{d}t\end{array}\right.$$
est définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur A.
2. $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall x \in A$,
$$f^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\ \mathrm{d}t$$