FICHE : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans toute la fiche, X est un ensemble non vide et I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

Suites de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}$ si pour tout $x \in X$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in N, \quad n \geqslant N \implies |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers une fonction $f : X \mapsto E$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in N, \quad n \geqslant N \implies [\forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon]$$

Caractérisation de la convergence uniforme avec $\|\|_\infty$

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ si et seulement si :

1. À partir d'un certain rang, les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées.
2. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

CV uniforme $\implies$ CV simple

Soit une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f, alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvu}} f \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvs}} f$$

Convergence uniforme sur tout segment

Soit une partie $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Alors la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément sur tout segment* vers la fonction $f : I \mapsto E$ si et seulement si pour tout segment $K = [a,b] \subset I$:

1. À partir d'un certain rang $f - f_n$ est bornée sur K ;
2. $\|f_n - f\|_{\infty,K} = \sup\limits_{x\in K}|f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⚠ La convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I.

Pour la convergence uniforme sur I (resp. sur tout segment de I), la limite d'une suite de fonctions continue

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $f : I \mapsto E$. On suppose que :

- H1 toutes les fonctions f_n sont continues sur I ;
- H2 la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I).

Alors la fonction f est continue sur I.

Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues

On considère une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que

- H1 La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sur le segment $[a,b]$.

Alors la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, et

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dérivation et convergence uniforme sir I (resp. sur tout segment)

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$.

H3 La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I (resp. sur tout segment de I) vers une application $g : I \mapsto \mathbb{R}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
3. $f' = g$.

Généralisation

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;

H2 $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une application f_i ;

H3 la suite de fonctions dérivées kièmes, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément sur tout segment* vers une application g.

Alors :

1. La fonction $f = f_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
2. $f^{(k)} = g$.
3. $\forall i \in [\![0, k]\!]$, la suite de fonction $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f^{(i)}$ sur tout segment de I.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.

H2 La suite de fonctions (f_n) converge *simplement* sur I vers une fonction f.

H3 La fonction f est continue par morceaux sur I.

H4 **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* n qui est continue par morceaux et *intégrable sur* I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.
2. La fonction f est intégrable sur I.
3. $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Séries de fonctions

Série de fonctions

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On appelle *série de fonctions de terme général* f_n la suite (S_n) de terme général

$$S_n : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{cases}$$

On note $\sum f_n$ une telle série de fonctions. La fonction S_n s'appelle la *nième somme partielle* de la série $\sum f_n$.

Convergence simple d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Si $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, on définit alors la fonction

$$S : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{cases}$$

1. La fonction S s'appelle la *somme de la série de fonctions* est est notée $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S - S_n$ s'appelle le *reste d'ordre* n de la série de fonctions et est noté

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

Dire qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I revient à dire que la *suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S.

Convergence absolue d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge absolument* sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge .

Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément* sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sommes partielles) converge uniformément sur I.

Une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Caractérisation pratique de l'uniforme convergence

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

- H1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- H2 La suite de fonctions des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Convergence normale

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ bornée sur I *converge normalement* sur I, si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$$

converge où $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

Caractérisation de la convergence normale, série majorante

Une série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si et seulement si il existe une suite réelle (a_n) vérifiant les deux conditions suivantes :

- H1 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leqslant a_n$;
- H2 la série $\sum a_n$ converge.

La série $\sum a_n$ est dite être une *série majorante* de la série $\sum f_n$.

Comparaison des modes de convergence

$$\sum f_n \text{ CV normalement sur } I \implies \begin{cases} \sum f_n & \text{CV uniformément sur } I \\ \sum f_n & \text{CV absolument sur } I \end{cases} \implies \sum f_n \text{ CV simplement sur } I.$$

Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$

Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$:

1. Commencer par étudier la convergence *normale* : si
   — $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$,

— la série numérique $\sum \alpha_n$ converge,
alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément (absolument), donc simplement.

2 Si on n'arrive pas à montrer la convergence normale, étudier d'abord la convergence simple (ou absolue).

3 S'il y a convergence simple, étudier la convergence uniforme :

— La suite de fonctions $\|f_n\|_\infty$ converge-t-elle vers la fonction nulle ? Si ce n'est pas le cas, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

— Essayer de montrer que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pour cela, majorer-minorer le reste $R_n(x)$. On peut :

  — utiliser une comparaison avec une intégrale,

  — utiliser le critère spécial des séries alternées, qui majore $|R_n(x)|$ par le premier terme négligé,

  — majorer la série $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ en faisant apparaître des séries plus simples (géométriques, ...)

CV uniforme et continuité

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I ;

H2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I (resp. *uniformément sur tout segment de* I).

Alors la fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

CV uniforme et intégration, théorème d'intégration terme à terme

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;

H2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur le segment $[a, b]$.

Alors :

1. La fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur le segment $[a, b]$;
2. La série numérique $\sum \left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right)$ converge ;
3. On peut inverser les signes sommes : $\displaystyle\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \Big)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \Big)$.

CV uniforme et dérivation, théorème de dérivation terme à terme

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur I.

H3 La série de fonctions $\sum f'_n$ converge *uniformément* sur I (resp. *uniformément sur tout segment de* I).

Alors :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
3. On peut inverser dérivation et signe somme : $\displaystyle\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

CV uniforme et dérivation d'ordre k

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;

H2 $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge *simplement* sur I ;

H3 la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge *uniformément sur tout segment* de I.

Alors,

1. $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
3. $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\displaystyle\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \Big)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Interversion des signes sommes sur un intervalle

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I ;
- H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- H3 La fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.
- H4 La série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

1. La fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I.
2. $\displaystyle\int_I \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$.
3. On peut permuter les signes sommes :

$$\boxed{\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_I f_n\Big)}$$