

# Fiche de liaison sup-spé

## Table des matières

<b>1 Résumé du cours</b>	<b>1</b>
1.1 Rappels d'analyse	1
1.1.1 Fonctions usuelles	1
1.1.2 Équations différentielles	2
1.1.3 Suites	3
1.1.4 Séries numériques	4
1.1.5 Fonctions d'une variable réelle	4
1.1.6 Dérivation	5
1.1.7 Intégration	5
1.1.8 Développements limités	6
1.2 Rappels de probabilités	7
1.2.1 Espaces probabilisés	7
1.2.2 Variables aléatoires et lois de probabilités	8
1.3 Rappels d'algèbre	9
1.3.1 Nombres complexes	9
1.3.2 Polynômes	10
1.3.3 Sous-espaces vectoriels	11
1.3.4 Familles libres, liées, génératrices, base	11
1.3.5 Supplémentarité	11
1.3.6 Applications linéaires	12
1.3.7 Projecteurs	12
1.3.8 Matrices	12
1.3.9 Déterminant	13
1.3.10 Systèmes linéaires	14
1.3.11 Espaces euclidiens	14
<b>2 Questions de cours</b>	<b>16</b>
2.1 Fondements	16
2.1.1 Applications	16
2.1.2 Récurrence	16
2.1.3 Trigonométrie	16
2.2 Nombres complexes	16
2.2.1 Forme algébrique - Forme trigonométrique	16
2.2.2 Racines de l'unité - Résolution du trinôme du second degré	16
2.3 Fonctions usuelles	16
2.3.1 Fonctions exponentielle, logarithme et puissances	16
2.3.2 Fonctions trigonométriques	16
2.3.3 Fonctions hyperboliques	16
2.4 Limites usuelles	16
2.5 Dérivées des fonctions usuelles	16
2.6 Équations différentielles	17
2.6.1 Équations différentielles du premier degré	17
2.6.2 Équations différentielles du second degré	17
2.7 Systèmes linéaires	17
2.8 Ensemble des entiers - Combinatoire - Formule du binôme de Newton	17
2.8.1 Combinatoire	17
2.8.2 Formule du binôme	17
2.8.3 L'ensemble des réels	17
2.9 Suites réelles	17
2.10 Espaces vectoriels	17
2.11 Fonctions d'une variable réelle	18
2.12 Dimension d'un espace vectoriel	18
2.13 Dérivabilité	18
2.14 Dérivée en un point	18
2.14.1 Dérivée sur un intervalle	18
2.14.2 Applications de la dérivation	18
2.14.3 Dérivées d'ordre $n$	18
2.14.4 Calcul de dérivées	18
2.15 Matrices - Systèmes linéaires - Déterminants	18
2.15.1 Calcul Matriciel	18
2.15.2 Systèmes linéaires	19
2.15.3 Déterminant	19
2.16 Intégration	19
2.17 Développements limités	19
2.18 Polynômes	19
2.19 Séries numériques	19
2.20 Probabilités	20
2.20.1 Espaces probabilisés	20
2.20.2 Variables aléatoires et lois de probabilité	20
2.21 Produits scalaires et espaces euclidiens	20

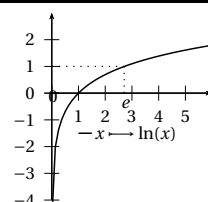
<b>3 Exercices</b>	<b>20</b>
3.1 Nombres complexes	20
3.2 Fonctions usuelles	21
3.3 Équations différentielles	21
3.4 L'ensemble des réels	22
3.5 Ensemble des entiers - Combinatoire - Formule du binôme de Newton	22
3.6 Suites réelles	22
3.7 Espaces vectoriels	23
3.8 Fonctions d'une variable réelle	24
3.9 Dimension d'un espace vectoriel	24
3.10 Dérivabilité	25
3.11 Matrices - Systèmes linéaires - Déterminants	26
3.12 Intégration	28
3.13 Développements limités	29
3.14 Polynômes	31
3.15 Probabilités	32
3.16 Séries numériques	33
3.17 Produit scalaire et espaces euclidiens	34

## 1 Résumé du cours

### 1.1 Rappels d'analyse

#### 1.1.1 Fonctions usuelles

ln

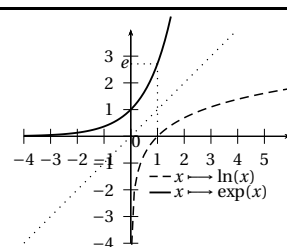


- valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln' x = 1/x$
- $\lim_{0^+} \ln = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$
- Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  :

$\ln ab = \ln a + \ln b$   
 $\ln a/b = \ln a - \ln b$   
 $\ln a^b = b \ln a$

- $\ln$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , à

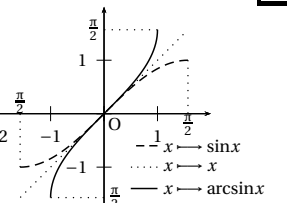
exp



- exp est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp' x = \exp x$
- $\lim_{-\infty} \exp = 0$  et  $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$
- Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  :

$\exp(a+b) = \exp a \exp b$   
 $\exp(a-b) = \exp a / \exp b$   
 $\exp(na) = (\exp a)^n$

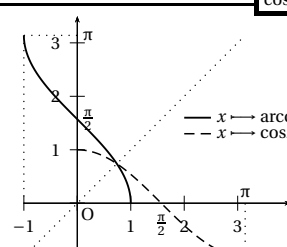
sin et arcsin



arcsin est :

- définie sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
- impaire.
- dérivable sur  $] -1, 1[$
- $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

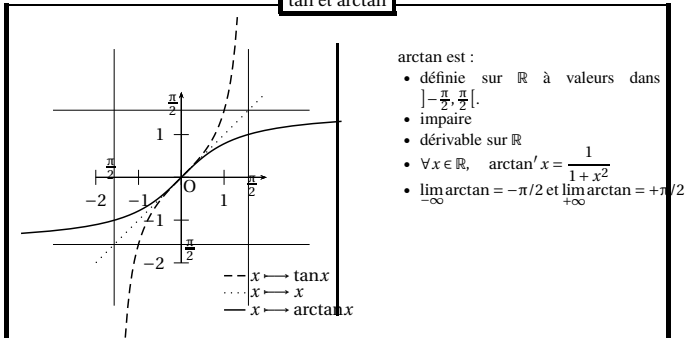
cos et arccos



arccos est :

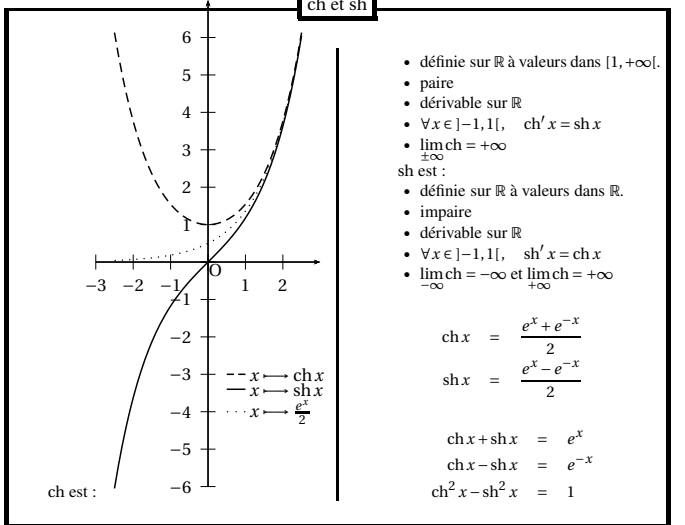
- définie sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $[0, \pi]$ .
- dérivable sur  $] -1, 1[$
- $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

**tan et arctan**



- arctan est :
- définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
  - impaire
  - dérivable sur  $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$
  - $\lim_{-\infty} \arctan = -\pi/2$  et  $\lim_{+\infty} \arctan = +\pi/2$

**ch et sh**



- ch est :
- définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[1, +\infty[$ .
  - paire
  - dérivable sur  $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in ]-1, 1[, \text{ch}' x = \text{sh} x$
  - $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$
- sh est :
- définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
  - impaire
  - dérivable sur  $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in ]-1, 1[, \text{sh}' x = \text{ch} x$
  - $\lim_{-\infty} \text{ch} = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$

$$\text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

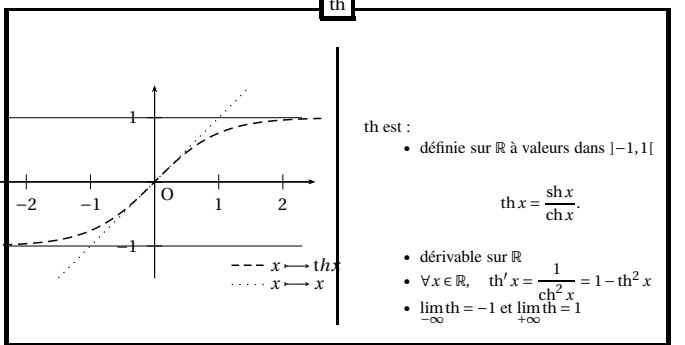
$$\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch} x + \text{sh} x = e^x$$

$$\text{ch} x - \text{sh} x = e^{-x}$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

**th**



- th est :
- définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]-1, 1[$
- $$\text{th} x = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}$$
- dérivable sur  $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$
  - $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$  et  $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$

**Dérivées des fonctions usuelles**

Dans chaque ligne,  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$
$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

**Opérations et dérivées**

$(f + g)' = f' + g'$   
 $(\lambda f)' = \lambda f'$ ,  $\lambda$  désignant une constante  
 $(fg)' = f'g + fg'$   
 $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$   
 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$   
 $(u^n)' = nu^{n-1} u'$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ )  
 $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ )  
 $(e^u)' = u'e^u$   
 $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

Plus généralement, si  $u > 0 : \forall a \in \mathbb{R}, (u^a)' = au'u^{a-1}$

**Primitives des fonctions usuelles**

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont uniques à une constante près notée C.

$f(x)$	I	F(x)
$a^x$ ( $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ )	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ )	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x) + C$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x) + C$
$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$	$\text{th}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + C$

**Opérations et primitives**

On suppose que  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de  $u'u^n$  sur I est  $\frac{u^{n+1}}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
- Une primitive de  $\frac{u'}{u^2}$  sur I est  $-\frac{1}{u}$ .
- Une primitive de  $\frac{u'}{u^n}$  sur I est  $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ).
- Une primitive de  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  sur I est  $2\sqrt{u}$  (En supposant  $u > 0$  sur I.)
- Une primitive de  $\frac{u'}{u}$  sur I est  $\ln|u|$ .
- Une primitive de  $u'e^u$  sur I est  $e^u$ .

Plus généralement, si  $u > 0$  sur I et si  $a \in \mathbb{R}$ , une primitive de  $u'u^a$  sur I est :

$$\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1} u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + C & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

**1.1.2 Équations différentielles**

**TRED 1 dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$**

On suppose que :

- (H1) I est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- (H2)  $a$  est une fonction continue définie sur I et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Alors les solutions de l'équation différentielle homogène normalisée :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

sont données par les fonctions :

$$\Phi_\alpha : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \alpha e^{-A(t)} \end{cases}$$

où  $\alpha \in \mathbb{K}$  et où A est une primitive de  $a$  sur I.

$$S_{\mathbb{K}}(E) = \{t \mapsto \alpha e^{-A(t)} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

**Variation de la constante**

Avec les notations précédentes, on cherche une solution particulière de  $y' + ay = b$

sous la forme  $t \mapsto \alpha(t) e^{-\lambda t}$  avec  $\alpha$  qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad \alpha'(t) e^{-\lambda t} = b(t)$$

**TRED 2 dans  $\mathbb{R}$**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$  et (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On note  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $aX^2 + bX + c = 0$  associée à (E).

$\Delta$	Racines de l'équation caractéristique	Solutions de (E)
$\Delta > 0$	Deux racines simples $r_1$ et $r_2$	$\varphi_{\alpha, \beta} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{cases}$
$\Delta = 0$	Une racine double $r_0$	$\varphi_{\alpha, \beta} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\alpha t + \beta) e^{r_0 t} \end{cases}$
$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$	$\varphi_{\alpha, \beta} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] e^{rt} \end{cases}$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**1.1.3 Suites**

**Théorème d'encadrement**

On considère trois suites :  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . On suppose que :

(H1)  $v_n \leq u_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang.

(H2) Les deux suites encadrantes  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite  $l$  alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

De même, si :

(H1)  $v_n \leq u_n$  à partir d'un certain rang.

(H2)  $\lim v_n = +\infty$

alors  $\lim u_n = +\infty$ .

**Théorème de la limite monotone**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On suppose que :

(H1)  $(u_n)$  est croissante.

(H2) Si  $(u_n)$  est majorée par un réel  $A \in \mathbb{R}$

alors  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $l \in \mathbb{R}$  et  $l \leq A$ .

**Suites adjacentes**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles. On dit que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **adjacentes** lorsque :

(H1)  $(u_n)$  est croissante

(H2)  $(v_n)$  est décroissante

(H3)  $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite  $l \in \mathbb{R}$ . De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$$

**Limite d'une suite et continuité**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$ . Soit une suite  $(u_n)$  de points de  $I$ . Soit  $l \in \bar{I}$ . On suppose que :

(H1)  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$

(H2)  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$

alors  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ .

**Convergence d'une suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison  $a \in \mathbb{R}$  et de premier terme 1 :  $\forall n, \quad u_n = a^n$ .

$$a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a \leq -1 \\ 0 \text{ si } a \in ]-1, 1[ \\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

**Suites négligeable devant une autre**

**Définition :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  lorsqu'il existe une suite  $(\epsilon_n)$  **convergent vers 0** et un rang  $N \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq N \quad u_n = \epsilon_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

**Proposition :** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose que  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

**Croissances comparées**

Soient  $a > 1$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  alors :

$$(\ln n)^\beta = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\alpha) \quad n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(a^n) \quad a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!) \quad n! = o_{n \rightarrow +\infty}(n^n)$$

**Suites équivalentes**

**Définition :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On dit que  $(u_n)$  est **équivalente** à  $(v_n)$  lorsqu'il existe une suite  $(\alpha_n)$  **convergent vers 1** et un rang  $N \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq N \quad u_n = \alpha_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

**Proposition :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose que  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

**Opérations sur les équivalents**

- On peut effectuer des :
- produits d'équivalents
  - quotients d'équivalents.
  - puissances d'équivalents.
- Par contre, il ne faut pas :
- Sommer des équivalents.
  - Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas :
    - Prendre des logarithmes d'équivalents.
    - Prendre des exponentielles d'équivalents.

**Équivalents usuels**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

alors :

- $\sin u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- $\tan u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- $\ln(1 + u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- $[1 - \cos u_n] \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{2}$
- $[e^{u_n} - 1] \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- $[(1 + u_n)^\alpha - 1] \sim_{n \rightarrow +\infty} \alpha u_n$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ).
- $\text{sh } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- $1 - \text{ch } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{u_n^2}{2}$
- $\text{th } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Suites définies par récurrence**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $I$  est un intervalle stable par  $f$ . On considère la suite récurrente  $(u_n)$  construite par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $(u_n)$  est monotone et :
  1. Si  $u_0 \leq f(u_0)$  alors  $(u_n)$  est croissante.
  2. Si  $u_0 \geq f(u_0)$  alors  $(u_n)$  est décroissante.
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors  $(u_n)$  a ses deux sous suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  monotones et de sens contraire.

### 1.1.4 Séries numériques

#### Définition d'une série

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles (ou complexes). On lui associe la suite des *sommes partielles*  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

- On appelle *série* de terme général  $u_n$ , la suite  $(S_n)$  de terme général  $S_n$  que l'on note  $\sum u_n$ .
- On dit que la *série*  $\sum u_n$  *converge* si et seulement s'il existe  $S \in \mathbb{R}$  tel que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ . Sinon, on dit que la série  $\sum u_n$  *diverge*.
- Lorsque la série  $\sum u_n$  converge, on dit que  $S$  est la *somme de la série* et l'on note  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

#### Critère de comparaison

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries.

- (H1) Les deux séries sont à *termes positifs* :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$ .
- (H2)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ .

Alors :

- a. Si la série  $\sum v_n$  converge, alors la série  $\sum u_n$  converge également et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- b. Si la série  $\sum u_n$  diverge, alors la série  $\sum v_n$  diverge également.

#### Séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On appelle série de Riemann la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- Si  $\alpha > 1$ , la série de Riemann converge.
- Si  $\alpha \leq 1$ , la série de Riemann diverge.

#### Critère d'équivalence

Soient deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ . On suppose que :

- (H1)  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
- (H2) À partir d'un certain rang,  $v_n \geq 0$ .

Alors à partir d'un certain rang,  $u_n \geq 0$  et les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

#### Règle de d'Alembert

Soit une série  $\sum u_n$ . On suppose que :

- (H1)  $\forall n \geq n_0, u_n > 0$ .
- (H2)  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k \in \overline{\mathbb{R}}_+ (= [0, +\infty])$ .

Alors

- a. Si  $0 \leq k < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge.
- b. Si  $k > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge.
- c. Si  $k = 1$ , on ne peut rien dire en général.

#### Une série absolument convergente est convergente

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite complexe (ou réelle). Si la série  $\sum |u_n|$  converge, alors la série  $\sum u_n$  est convergente.

### 1.1.5 Fonctions d'une variable réelle

#### Théorème de la limite monotone

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $I = ]a, b[$ .

Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction **croissante** alors il y a deux possibilités :

1.  $f$  est majorée et alors  $f$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $b$ . On a alors  $\lim_b f = \sup_I f$ .

2.  $f$  n'est pas majorée et alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$ .

#### Fonction négligeable devant une autre

**Définition** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f(x)$  est **négligeable** devant  $g(x)$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage de  $a$  telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ au voisinage de } a \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

On note alors :  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$

**Proposition** : Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

#### Croissances comparées

Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des **réels strictement positifs**.

• En  $+\infty$  :

$$(\ln x)^\gamma = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\beta x})$$

• En 0 :

$$|\ln x|^\gamma = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad e^{\beta x} = o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

#### Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

**Définition** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f(x)$  est **équivalent** à  $g(x)$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe une fonction  $\alpha$  définie sur un voisinage de  $a$  telle que :

$$f(x) = \alpha(x) g(x) \text{ au voisinage de } a \quad \text{et} \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

On note alors :  $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$

**Proposition** : Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

#### Définition de la continuité

• On dit que  $f$  est **continue en**  $a \in I$  si et seulement si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad l = f(a)$$

• On dit qu'une fonction  $f$  est **continue sur un intervalle**  $I$  si et seulement si la fonction  $f$  est continue en chaque point de  $I$ .

#### Théorème d'opérations sur les fonctions continues

- Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $|f|$  est continue sur  $I$ .
- Une combinaison linéaire de fonctions continues sur  $I$  est continue sur  $I$ .
- Le produit de deux fonctions continues sur  $I$  est continue sur  $I$ .
- Le quotient de deux fonctions continues sur  $I$  est (s'il est défini) continue sur  $I$ .
- La composée de deux fonctions continues est continue.

#### Théorème des valeurs intermédiaires

Soient  $I$  un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a < b$ . On suppose que :

(H1)  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

(H2)  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

#### Continue implique bornée

Une fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

### 1.1.6 Dérivation

#### Définition

Le **taux d'accroissement** de la fonction  $f$  au point  $a$  est la fonction  $\Delta_{a,f}$  donnée par :

$$\Delta : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

$f$  est **dérivable au point**  $a$  si et seulement si son taux d'accroissement  $\Delta$  possède une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$ .

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \Delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R}$$

On note  $f'(a) = l$ .

#### Dérivable implique continue

- Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

#### Théorème de dérivation de la bijection réciproque

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $I$ .
- (H2)  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- (H3)  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

alors  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$  et son application réciproque,  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

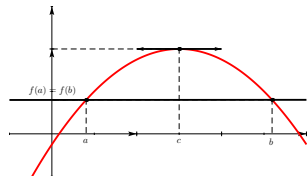
#### Théorème de Rolle

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $f$  est continue sur  $[a, b]$
- (H2)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$
- (H3)  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = 0$$



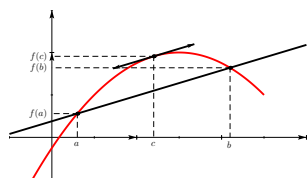
#### Égalité des accroissement finis

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $f$  est continue sur  $[a, b]$
- (H2)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



#### Inégalité des accroissement finis - Version I

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $f$  est continue sur  $[a, b]$
- (H2)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$
- (H3) Il existe  $(m, M) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$$

Alors on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

#### Inégalité des accroissement finis - Version II

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $f$  est continue sur  $[a, b]$

(H2)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

(H3)  $|f'|$  est majorée sur  $]a, b[ : \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in ]a, b[, |f'(x)| \leq \alpha$

Alors on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in ]a, b[} |f'(x)| |b - a|$$

#### Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  :

- 1 si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ .
- 2 et si la dérivée  $n$ ème de  $f : f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .

#### Théorème d'opération sur les fonctions de classes $\mathcal{C}^n$

On suppose que :

(H1)  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$

alors :

- $\alpha f + \beta g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $f \cdot g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .
- $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  (là où ce quotient est défini).
- $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  (là où cette composée est définie).

#### Formule de Leibnitz

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$  alors il en est du même de la fonction  $f \cdot g$  et on a :

$$\forall x \in I \quad (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

### 1.1.7 Intégration

#### Théorème fondamental

Si

(H1)  $f$  est continue le segment  $[a, b]$

alors  $\int_a^b f(x) dx$  existe.

Autrement dit, si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors elle est intégrable sur  $[a, b]$ .

#### Propriétés de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur le segment  $[a, b]$

1  $f \leq g \implies \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$

2 Soit  $c \in ]a, b[$ .

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

3 Comme  $f$  est une fonction réelle continue sur le segment  $[a, b]$ , il existe des réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ . On a alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

5 On a l'**inégalité de la moyenne** :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

#### Primitive

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On appelle **primitive** de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

(H1)  $F$  est dérivable sur  $I$ .

(H2)  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur  $I$  alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que :  $G = F + c$ .

**Une formule essentielle**

$$\int u' u^\alpha = \begin{cases} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

**Théorème fondamental de l'analyse**

- (H1) Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- (H2) Soit f une fonction continue sur I

Soit  $a \in I$  alors la fonction :

$$F: \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I et est la seule primitive de f qui s'annule en a :

$$F' = f \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

**Corollaire du TFA**

Soient :

- (H1) Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- (H2) Soit f une fonction continue sur I

alors f admet une primitive F sur I :

Autrement dit : toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur ce segment.

**Formule d'intégration par parties**

Soit I un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1) u et v des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I. On a :

alors :

$$\int_a^b \overbrace{u'(t)}^{\text{intègre}} \underbrace{v(t)}_{\text{dérive}} dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

**Changement de variable**

Pour calculer  $\int_a^b f(t) dt$  :

1. On vérifie que  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[\alpha, \beta]$  et que  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ .
2. On pose  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{cases}$
3. On écrit :  $\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Attention de bien penser à transformer les bornes

**Formule de Taylor**

Soit f une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$ . Si  $(a, x) \in I^2$ . Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

— Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé **polynôme de Taylor de f de degré n**.

— L'intégrale

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

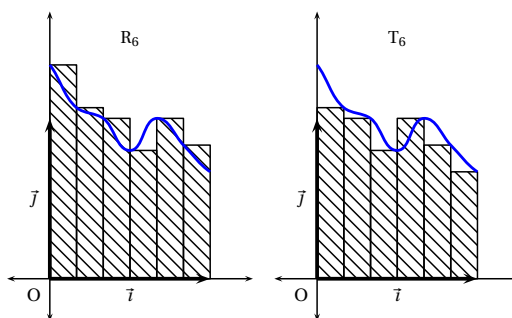
est appelée **reste intégral**.

**Sommes de Riemann**

Soit une fonction f continue sur le segment  $[0, 1]$ . On définit les suites de termes généraux

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$



**1.1.8 Développements limités**

**Les petits o...**

$$o_{x \rightarrow 0}(1) = \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad o_{x \rightarrow 0}(x^n) = x^n \varepsilon(x)$$

où  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

**Définition**

Soient une fonction  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n** au voisinage de  $x_0$  s'il existe :

- un polynôme P de degré  $\leq n$
- une fonction  $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

tels que

$$\forall x \in I, f(x) = P(x) + \underbrace{(x-x_0)^n \varepsilon(x)}_{= o_{x \rightarrow x_0}(x^n)}$$

- P est appelé **partie régulière** ou **partie principale** du développement limité de f en  $x_0$ .
- $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$  est appelé **reste** du développement limité de f en  $x_0$ .

**Propriétés**

Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en 0 alors :

- la partie régulière du DL d'ordre n en 0 de f est unique.
- Si f est paire (resp. impaire) sur un voisinage (symétrique) de 0 alors la partie principale de son DL à l'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

**Formule de Taylor-Young**

Soient f une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Autrement dit, on a :  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$ .

**Opérations sur les DLs**

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I admettant en 0 des DL d'ordre n :

$$\forall x \in I, f(x) = P(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

où P et Q sont des polynômes réels de degré n alors

- f + g admet un DL d'ordre n en 0 donné par, pour tout  $x \in I$  :

$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

- fg admet un DL d'ordre n en 0 donné par, pour tout  $x \in I$  :

$$(fg)(x) = R(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

où R(x) est égal au produit P(x)Q(x) auquel on a retiré tout le terme de degré  $> n$ .

- Si de plus  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  alors  $g \circ f$  admet un DL d'ordre  $n$  en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré  $\leq n$  dans le polynôme  $G \circ F$ .
- Si  $g$  admet une limite non nulle en 0 alors  $\frac{f}{g}$  admet un DL d'ordre  $n$  en 0.

### Comment inverser un DLs

On suppose que  $g(x) = 1 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u} \text{ avec } u = -\left(a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)\right) \\ &= 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(x^n) \\ &= 1 - (a_1x + \dots + a_nx^n) + (a_1x + \dots + a_nx^n)^2 + \dots + (-1)^n (a_1x + \dots + a_nx^n)^n + o(x^n) \end{aligned}$$

qu'on développe et tronque en ne gardant que les termes de degré  $\leq n$ .

### Primitivation

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si :

- (H1)  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- (H2)  $f'$  admet un DL d'ordre  $n$  en 0 :

$$\forall x \in I, f'(x) = \overbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}^{P'(x)} + o(x^n)$$

alors  $f$  admet un DL d'ordre  $n+1$  en 0 obtenu en primitivant la partie régulière du DL de  $f'$  et en ajoutant  $f(0)$ . Pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = f(0) + \underbrace{a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}}_{P(x)} + o(x^{n+1})$$

ATTENTION!!! On ne peut pas, en général, dériver un DL

### Formule de Taylor-Young

Soient  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Autrement dit, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(x-a)^n$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} \heartsuit \quad \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ \rightsquigarrow \quad \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \rightsquigarrow \quad \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

### Fonctions exponentielle et hyperboliques

$$\begin{aligned} \heartsuit \quad e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \heartsuit \quad \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \heartsuit \quad \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \rightsquigarrow \quad \operatorname{tanh} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \end{aligned}$$

### Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \heartsuit \quad \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \heartsuit \quad \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \rightsquigarrow \quad \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \end{aligned}$$

### Fonction logarithme

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \heartsuit \quad \ln(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n) \end{aligned}$$

### Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\heartsuit \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Cette dernière formule appliquée à  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $n=2$  donne :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

### Fonctions réciproques

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\ \rightsquigarrow \quad \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{13}{24} \frac{x^5}{5} + \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + o(x^{2n+2}) \\ \rightsquigarrow \quad \arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} - \dots + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

La dernière s'obtient en remarquant que  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ .

**Légende :**  $\heartsuit$  = à savoir par coeur,  $\rightsquigarrow$  = à savoir retrouver rapidement.

## 1.2 Rappels de probabilités

### 1.2.1 Espaces probabilisés

#### Univers, événement, événement élémentaire

Soit  $\Omega$  un ensemble fini.

- On dit que  $\Omega$  est un *univers*.
- Un élément de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est appelé un *événement*.
- Un singleton  $\{\omega\}$  de  $\Omega$  est appelé un *événement élémentaire*.
- L'événement impossible est  $\emptyset$ .
- L'événement certain est  $\Omega$ .

#### Traduction langage probabiliste-langage ensembliste

Langage probabiliste	Notations	Langage des ensembles
Univers	$\Omega$	Ensemble $\Omega$
Ensemble de tous les événements	$\mathcal{P}(\Omega)$	Ensemble des parties de $\Omega$
Épreuve	$\omega \in \Omega$	Élément de $\Omega$
Événement élémentaire	$\{\omega\}$	Singleton de $\Omega$
Événement	$A \subset \Omega$	Partie de $\Omega$
A implique B	$A \subset B$	A est inclus dans B
A ou B	$A \cup B$	Union de A et B
A et B	$A \cap B$	Intersection de A et B
Événement contraire de A : $\bar{A}$	$A^c$ ou $\Omega \setminus A$	Complémentaire de A dans $\Omega$
A mais pas B	$A \setminus B := A \cap B^c$	Différence symétrique
Événement impossible	$\emptyset$	Partie vide
Événement certain	$\Omega$	
Événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	Parties disjointes

### Règles de calcul

Soient  $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Alors :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,
- $A \cup A^c = \Omega$ ,
- $A \cap A^c = \emptyset$ ,
- $(A^c)^c = A$ ,
- $\Omega^c = \emptyset$ ,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

Les deux dernières égalités sont connues sous le nom de *lois de Morgan*.

### Loi de probabilité

On appelle *probabilité* sur un univers  $\Omega$  une application  $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $P(\Omega) = 1$ ,
- Pour tout couple  $(A, B)$  de parties de  $\Omega$  disjointes, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

**Espace probabilisé, Espace probabilisé fini**

On appelle *espace probabilisé* la donnée d'un couple  $(\Omega, P)$  où  $\Omega$  est un univers et  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $\Omega$ .  
Un univers probabilisé  $(\Omega, P)$  est dit *fini* si  $\Omega$  est un ensemble fini.

**Règles de calcul avec une probabilité**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soient  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  deux événements. Alors :

- 1.  $P(\emptyset) = 0$ ,
- 2. Complémentaire :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- 3. Croissance : si  $A \subset B$  alors  $P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$ . En particulier  $P(A) \leq P(B)$ .
- 4. Union :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- 5. Union disjointe : Si  $(A_k)_{k \in [1, n]}$  est une famille finie d'événements deux à deux incompatibles alors  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ .
- 6. Formule du crible (hors programme) :  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ .

**Probabilité conditionnelle**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) > 0$ . On définit une probabilité sur  $\Omega$ , notée  $P_B(A)$  ou  $P(\cdot|B)$ , et appelée *probabilité conditionnelle sachant B*, en posant : pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Système complet d'événements**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. On appelle *système complet d'événements* toute partition de  $\Omega$  c'est-à-dire toute famille de sous-ensembles  $(A_1, \dots, A_n)$  de  $\Omega$  telle que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad \text{et} \quad \forall i, j \in [1, n], \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

**Formule des probabilités totales**

Soit  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  un système complet d'événements. On suppose que :

(H1)  $\forall i \in [1, n], \quad P(A_i) > 0$

alors on a la *formule des probabilités totales* :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_B(B)$$

**Formule des probabilités composées**

Soit  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  des événements dont l'intersection est de probabilité non nulle. On a la *formule des probabilités composées* :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Formules de Bayes**

— Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . On suppose que  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$  alors on a la *formule de Bayes* :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

— Soit  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles et soit  $B$  un événement de probabilité non nulle alors on a la généralisation de la formule de Bayes :

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

**Événements indépendants**

Deux événements  $A$  et  $B$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  sont dits *indépendants* si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Événements mutuellement indépendants**

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  sont dits *mutuellement*

*indépendants* si et seulement si

$$\forall I \subset [1, n], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

**1.2.2 Variables aléatoires et lois de probabilités**

**Variable aléatoire**

Soit  $\Omega$  un univers. On appelle *variable aléatoire sur  $\Omega$*  une application  $X : \Omega \rightarrow E$  où  $E$  est un ensemble. Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , la variable aléatoire  $X$  est dite *réelle*.

**Loi de probabilité d'une variable aléatoire**

Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle définie sur  $\Omega$ . Notons  $\Omega' = X(\Omega)$  l'image de  $\Omega$  par  $X$ . L'application

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega') & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \mapsto P(X^{-1}(A)) \end{cases}$$

est une loi de probabilité sur  $\Omega'$  appelée *loi de probabilité de la variable X*. Par suite,  $(\Omega', P_X)$  est un espace probabilisé.

**Propriétés des fonctions de répartition**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et soit  $F$  sa fonction de répartition d'. Alors :

- 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,
- 2. Pour tout  $a < b, P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ ,
- 3.  $F$  est croissante,

**Espérance d'une variable aléatoire**

On appelle *espérance* de la variable aléatoire réelle  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le réel noté  $E(X)$  donné par

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega).$$

**Une propriété de l'espérance**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

**L'espérance est linéaire sur l'espace vectoriel des variables aléatoires**

Soient  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux variables aléatoires réelles et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

**Variance et écart type d'une variable aléatoire**

On appelle *variance* d'une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le réel noté  $V(X)$  donné par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

L'*écart type* de la variable aléatoire  $X$ , noté  $\sigma(X)$  est alors donné par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Relation de Koenig-Huygens**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. On a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

**Une propriété de la variance**

Soient  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

**Inégalité de Bienaymé-Tchebychef**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. On a l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \left(\frac{\sigma(X)}{\epsilon}\right)^2$$

**Loi uniforme**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la *loi uniforme* si et seulement



si X peut prendre les valeurs 1, 2, ..., n avec la probabilité  $\frac{1}{n}$  :

$$P_X : \begin{cases} [1, n] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si X suit la loi uniforme alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

**Loi de Bernoulli**

Soit  $0 < p < 1$ . On dit que la variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$*  de paramètre  $p \in [0, 1]$  si et seulement si X peut prendre les valeurs 0 ou 1 avec, respectivement, les probabilités  $q = 1 - p$  et  $p$  :

$$P_X : \begin{cases} \{0, 1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \begin{cases} q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Si X suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = pq$$

où  $q = 1 - p$ .

**Loi binomiale ou loi des tirages avec remise**

$k=3$	$k=2$	$k=2$	$k=1$	$k=2$	$k=1$	$k=1$	$k=0$
$p^3$	$p^2q$	$p^2q$	$pq^2$	$p^2q$	$pq^2$	$pq^2$	$q^3$
$p$	$q$	$p$	$q$	$p$	$q$	$p$	$q$
└─┬─┘		└─┬─┘		└─┬─┘		└─┬─┘	
$p$		$q$		$p$		$q$	
└─┬─┘				└─┬─┘			
$p$				$q$			
└─┬─┘							
1							

Soient  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que la variable aléatoire X suit la *loi de binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$*  de paramètres  $p$  si et seulement si X peut prendre les valeurs 0, 1, ..., n avec les probabilités  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  où  $q = 1 - p$ . Sa loi est donc donnée par :

$$P_X : \begin{cases} [0, n] & \rightarrow \mathbb{R} \\ k & \rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{cases}$$

Si X suit la loi de binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq$$

où  $q = 1 - p$ .

### 1.3 Rappels d'algèbre

#### 1.3.1 Nombres complexes

**Groupe U des nombres complexes de module 1**

Nous noterons U, l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 :

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

(U,  $\times$ ) est donc muni d'une structure de groupe commutatif et est appelé **groupe des nombres complexes de module 1**.

En particulier, si  $z, z' \in U$  alors :

- 1  $z, z' \in U$ .
- 2  $1 \in U$ .
- 3  $\frac{1}{z} \in U$  et de plus :  $\frac{1}{z} = \bar{z}$
- 4  $U = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

**Racines n-ième de l'unité**

On appelle **racine n-ième de l'unité** un nombre complexe  $\xi$  tel que :

$$\xi^n = 1$$

On notera  $U_n$  l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Il existe exactement n racines n-ième de l'unité. Elles sont données par :

$$\forall k \in [0, n-1], \quad \xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Autrement dit :

$$U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [0, n-1] \right\}$$

(U\_n,  $\times$ ) est donc muni d'une structure de groupe commutatif.

En particulier, pour tout  $\xi, \xi' \in U_n$  :

- 1  $\xi, \xi' \in U_n$ .
- 2  $1 \in U_n$ .
- 3 Si  $\xi \in U_n$ , alors son **inverse**  $\frac{1}{\xi} \in U_n$ . De plus, on a :  $\frac{1}{\xi} = \bar{\xi}$

**Racines n-ième d'un nombre complexe**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On appelle **racine n-ième du nombre complexe z** tout nombre complexe  $\xi$  vérifiant :

$$\xi^n = z$$

Si z un nombre complexe non nul de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ . Alors z admet n racines n-ième données par :

$$\forall k \in [0, n-1], \quad Z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

**Racine carrée d'un nombre complexe**

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . On appelle **racine carrée de a** une racine deuxième de a, c'est-à-dire un complexe  $\xi$  tel que :  $\xi^2 = a$ . Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

Pour calculer les racines carrées de  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  : Soit  $Z = X + iY$  une des deux racines carrées de  $z$  :  $Z^2 = z$ . On a :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ XY \text{ est du signe de } \text{Im } z \end{cases}$$

### Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Soient  $a, b, c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$ . Considérons l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (*)$$

d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ . Notons  $\Delta = b^2 - 4ac$ .  $\Delta$  est le **discriminant** de l'équation (\*). On a :

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation (\*) admet une racine double  $z_0$  donnée par :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

De plus, on a :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

- Si  $\Delta \neq 0$  et si  $\delta$  désigne une des deux racines carrées de  $\Delta$  alors l'équation (\*) admet deux racines distinctes  $z_1$  et  $z_2$  données par :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

De plus, on a :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

### Angles

Soient A, B, et C trois points du plan tels que C est distinct de A et de B, d'affixe respective  $a, b$  et  $c$ . Une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  est alors donnée par :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) [2\pi].$$

On a :

- A, B, et C sont alignés si et seulement si  $\frac{c-b}{c-a}$  est réel.
- Les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si  $\frac{c-b}{c-a}$  est imaginaire pur.

### Translation

- Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan. La **translation de vecteur**  $\vec{u}$ , notée  $t_{\vec{u}}$ , est la transformation du plan qui à tout point  $M \in \mathcal{P}$  associe le point  $M' \in \mathcal{P}$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .
- La translation de vecteur  $\vec{u}$  peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout  $z \in \mathbb{C}$  associe  $z' \in \mathbb{C}$  tel que  $z' = z + u$  où  $u$  est l'affixe de  $\vec{u}$ .

### Homothétie

- Soit  $\Omega$  un point du plan et  $\lambda$  un réel non nul. L'**homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$** , noté  $h_{\Omega, \lambda}$ , est la transformation du plan qui à tout point  $M \in \mathcal{P}$  associe le point  $M' \in \mathcal{P}$  tel que  $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ .
- Si  $\Omega$  a pour affixe  $\omega$ , l'homothétie de rapport  $\lambda$  et de centre  $\Omega$  peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout  $z \in \mathbb{C}$  associe  $z' \in \mathbb{C}$  tel que  $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$  (soit aussi :  $z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega$ ).

### Rotation

- Soient  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $\theta$  un réel. La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ , notée  $r_{\Omega, \theta}$  est la transformation du plan qui à
  - $\Omega$  associe  $\Omega$
  - tout point M différent de  $\Omega$  associe le point  $M'$  tel que
 
$$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \\ \|\overrightarrow{\Omega M'}\| = \|\overrightarrow{\Omega M}\| \end{cases}$$
- Soit  $\omega$  l'affixe de  $\Omega$ . La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout  $z \in \mathbb{C}$  associe le complexe  $z'$  tel que  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  (soit aussi :  $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$ ).

## 1.3.2 Polynômes

Dans tout la suite  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels  $\mathbb{R}$  ou celui des complexes  $\mathbb{C}$ .  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Dans toute la suite  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$ .

### Degré d'un polynôme

Soit un polynôme  $P = a_0 + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$  avec  $a_p \neq 0$ .

- On appelle **degré de P** et on note  $\deg(P)$  l'entier  $p$ .
- Par convention, le **degré du polynôme nul** est  $-\infty$ .

- On appelle **terme dominant** de P le monôme  $a_p X^p$ .

Soient P, Q  $\in \mathbb{K}[X]$ , on a :

$$\textcircled{1} \quad \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

$$\textcircled{3} \quad \deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

$$\textcircled{2} \quad \deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$\textcircled{4} \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

### Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré  $\leq n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Alors :

- $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .
- La famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  forme une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

### Divisibilité

Soient deux polynômes A, B  $\in \mathbb{K}[X]$ . On dit que A **divise** B si et seulement si il existe Q  $\in \mathbb{K}[X]$  tel que B = QA. On le note A|B.

### Division euclidienne

Soient A, B  $\in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes. On suppose que B  $\neq 0$ . Alors il **existe** un

**unique** couple (Q, R) de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & A = BQ + R \\ \textcircled{2} & \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

### Racine d'un polynôme

Soit P  $\in \mathbb{K}[X]$  un polynôme. Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\alpha$  est une **racine** de P si et seulement si  $P(\alpha) = 0$ .

On a équivalence entre :

- $\alpha$  est une racine de P.
- On peut factoriser P par  $X - \alpha$ , c'est-à-dire :  $(X - \alpha) | P$ .

### Racine d'ordre p

- Soient P  $\in \mathbb{K}[X]$  un polynôme,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .
- On dit que  $\alpha$  est une **racine d'ordre p** (ou de **multiplicité p**) de P si et seulement si  $(X - \alpha)^p$  divise P et  $(X - \alpha)^{p+1}$  ne divise pas P.
  - Si  $\alpha$  est une racine d'ordre 1 de P, on dit que  $\alpha$  est une **racine simple** de P.
  - Si  $\alpha$  est une racine d'ordre  $\geq 2$  de P, on dit que  $\alpha$  est une **racine multiple** de P.

### Caractérisation des racines d'ordre p

Soient un polynôme P  $\in \mathbb{K}[X]$ , un scalaire  $a \in \mathbb{K}$  et un entier  $r > 0$ . On a équivalence entre :

- $a$  est une racine d'ordre r de P.
- $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a) = 0$  et  $P^{(r)}(a) \neq 0$ .

### Formule de Taylor pour les polynômes

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n et  $a \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

### Polynôme scindé

Soit P  $\in \mathbb{K}[X]$  de degré p. On dit que P est **scindé** sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si il s'écrit :

$$P = a_p (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p) = a_p \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$$

où les scalaires  $\alpha_k \in \mathbb{K}$  sont les racines de P comptées avec leur multiplicité et  $a_p$  est le coefficient du terme dominant de P.

### Théorème fondamental de l'algèbre

(Appelé aussi **Théorème de d'Alembert-Gauss**)  
Soit P un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $\geq n$  alors P possède n racines dans  $\mathbb{C}$  (comptées avec leur multiplicité).

### Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est **scindé sur  $\mathbb{C}$** , c'est-à-dire tout polynôme P  $\in \mathbb{C}[X]$  s'écrit sous la forme :

$$P = a_p (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)$$

où les scalaires  $\alpha_k$  sont les racines de P comptées avec leur multiplicité et  $a_p$  est le coefficient du terme dominant de P.

#### Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul. Alors, il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  non nécessairement deux à deux distincts,  $(b_1, c_1), \dots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$  non nécessairement deux à deux distincts tels que  $\Delta_l = b_l^2 - 4c_l < 0$  pour tout  $l \in [1, s]$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tels que :

$$P = a \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \prod_{l=1}^s (X^2 + b_l X + c_l)$$

#### Polynôme irréductible

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme **non constant**. On dit que P est **irréductible** si et seulement si :

$$P = QH \implies Q \in \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad H \in \mathbb{K}$$

Autrement dit : un polynôme P non constant est irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes proportionnels à P.

### 1.3.3 Sous-espaces vectoriels

#### Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit  $F \subset E$ , une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** si et seulement si :

- 1  $F \neq \emptyset$
- 2 F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha x + \beta y \in F$$

**Remarque** : si F est un sous-espace vectoriel de E alors  $0 \in F$ .

#### 2 méthodes pour montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour montrer que  $F = E$ , on peut :

- 1 effectuer un raisonnement par double inclusion : on montre que  $F \subset G$  puis que  $G \subset F$ .
- 2 On peut aussi montrer que
  - 1  $F \subset E$
  - 2  $\dim F = \dim E$

On conclut alors que  $E = F$ .

#### Formule de Grassman

Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

#### Définition d'un Vect de n vecteurs

Soient n vecteurs de E :  $v_1, \dots, v_n$ . On a :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant  $v_1, \dots, v_n$ .

#### 4 méthodes pour montrer que F est un sev de E

On peut :

- 1 Utiliser la définition.
- 2 Mettre F sous forme d'un Vect.
- 3 Trouver une application linéaire u telle que  $F = \text{Ker } u$ .
- 4 Trouver une application linéaire u telle que  $F = \text{Im } u$ .

### 1.3.4 Familles libres, liées, génératrices, base

#### Famille libre

Une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de E est **libre** si et seulement si :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

#### Famille liée

Une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de E est **liée** si et seulement si elle n'est pas libre.

Autrement dit : il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  non tous nuls tels que  $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0$ .

#### Famille génératrice

Une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de E est **génératrice de E** si et seulement si  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$ .

Autrement dit : si la famille est génératrice tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

#### Base

Une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de E est une **base de E** si et seulement si elle est libre et génératrice. De plus, le cardinal d'une base de E est par définition égal à la dimension de E.

#### Coordonnées d'un vecteur dans une base

Si la famille  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$  de E est une base de E alors pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe une **unique** famille de scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que :

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$$

La n-uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est alors appelé famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base  $\mathcal{B}$ .

#### 4 méthodes pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base

Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de E. Pour montrer que cette famille est une base de E on peut :

- 1 utiliser la définition.
- 2 on peut
  - 1 montrer que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre
  - 2 et de cardinal égal à la dimension de E.
- 3 on peut aussi :
  - 1 montrer que  $(x_1, \dots, x_n)$  est génératrice de E
  - 2 et de cardinal égal à la dimension de E.
- 3 enfin, on peut écrire la matrice de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans une base de E et montrer qu'elle est inversible.

### 1.3.5 Supplémentarité

#### Définition de deux sous-espaces supplémentaires

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** si et seulement si ils vérifient :

$$(H1) \quad E = F + G$$

$$(H2) \quad F \cap G = \{0\}$$

#### Caractérisation de la supplémentarité avec les vecteurs

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . On a équivalence entre :

- 1  $E = F \oplus G$  (c'est-à-dire F et G sont supplémentaires).
- 2  $\forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$  (c'est-à-dire, **tout** vecteur de E se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

#### Caractérisation de la supplémentarité avec les bases

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

- 1 F et G sont supplémentaires dans E :  $E = F \oplus G$ .
- 2 Si  $(f_1, \dots, f_p)$  est une base de F et si  $(g_1, \dots, g_q)$  est une base de G alors  $e = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est une base de E.

#### 6 méthodes pour montrer que $E = F \oplus G$

On peut :

- 1 Utiliser la définition.
- 2 Montrer que F et G sont supplémentaires puis, grâce à la formule

de Grassman, que  $\dim(F + G) = \dim E$ .

- Montrer que  $E = F + G$  puis, grâce à la formule de Grassman, que  $\dim F \cap G = 0$ .
- Utiliser la caractérisation avec les vecteurs.
- Utiliser la caractérisation avec les bases.
- Montrer que  $F = \text{Ker } p$  et que  $G = \text{Im } p$  avec  $p$  un projecteur de  $E$ .

### 1.3.6 Applications linéaires

Dans toute la suite  $(E, +, \cdot)$  et  $(F, +, \cdot)$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### Application linéaire

Soit  $f : E \rightarrow F$ .  $f$  est linéaire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

**Remarque :** si  $f$  est linéaire alors  $f(0_E) = 0_F$ .

#### À propos de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle :

- Noyau de  $f$**  et on note  $\text{Ker } f$  le sous-ensemble de  $E$  :  

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$
- Image de  $f$**  et on note  $\text{Im } f$  le sous-ensemble de  $F$  :  

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\}.$$
- $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

#### Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .
- $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

#### Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire

On appelle :

- rang** de la famille de vecteurs  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$  la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{F}$ .  

$$\text{rg } \mathcal{F} = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}).$$
- rang de l'application linéaire**  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Im } u$  :  

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u.$$

#### Formule du rang

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que :

(H1)  $E$  est de dimension finie.

On a la **formule du rang** :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u \\ &= \dim \text{Ker } u + \text{rg } u \end{aligned}$$

#### 6 méthodes pour montrer qu'une application linéaire est bijective

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour montrer que  $u$  est bijective, on peut montrer que

- $u$  est injective et surjective ;
- $u$  est injective puis, grâce à la formule du rang, que  $\dim \text{Im } u = \dim F$ .
- $u$  est surjective puis, grâce à la formule du rang, que  $\dim \text{Ker } u = 0$ .
- L'image d'une base de  $E$  par  $u$  est une base de  $F$ .
- La matrice de  $u$  dans une base  $e$  de  $E$  et  $f$  de  $F$  est inversible.
- il existe  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $u \circ v = \text{id}_F$  et  $v \circ u = \text{id}_E$  (en dimension finie, une seule de ces identités suffit).

### 1.3.7 Projecteurs

#### Projecteurs et symétries

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E : E = E_1 \oplus E_2$ . Tout vecteur  $x \in E$  s'écrit d'une manière unique  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ . Soit

$p$  et  $s$  deux applications de  $E$  dans  $E$ . On dit que :

- $p$  est le projecteur de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  si  $p :$   

$$\begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 \end{cases}$$
- $s$  est une symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  si  $s :$   

$$\begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$$

#### Propriétés des projecteurs et des symétries

Avec les notations de l'encadré précédent :

- $p$  et  $s$  sont linéaires :  $p, s \in \mathcal{L}(E)$ .
- $s = 2p - \text{Id}_E$ .
- $\text{Ker } p = E_2$  et  $\text{Im } p = E_1$ .
- $\text{Ker } s = \{0\}$  et  $\text{Im } s = E$  (autrement dit  $s$  est un automorphisme de  $E$ ).
- $p(x) = x \iff x \in E_1$  ( $E_1$  est l'ensemble des vecteurs invariants par  $p$ ).

#### Caractérisations des projecteurs et des symétries

Soient  $p, s \in \mathcal{L}(E)$ .

- $p$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$ .
- $s$  est une symétrie si et seulement si  $s \circ s = \text{id}$ .

### 1.3.8 Matrices

#### Produit matriciel

Soit  $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ . On définit  $AB$  comme la matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$  définie par :

$$\forall i \in [1, r] \quad \forall j \in [1, p] \quad c_{i,j} = [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$$

#### Rang d'une matrice

On définit le rang de  $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ , et on note  $\text{rg } A$ , le rang de la famille constituée des vecteurs colonnes de  $A$ .

#### Matrice inversible

On dit qu'une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **inversible** lorsqu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si tel est le cas  $B$  est unique et est appelée **matrice inverse** de la matrice  $A$  ; on la note  $A^{-1}$ . On note  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles.

#### 4 méthodes pour prouver qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible

- On montre qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = I_n$ .
- On montre que  $\det(A) \neq 0$ .
- On montre que  $\text{rg } A = n$ .
- On trouve un polynôme annulateur de  $A$  et on tente de se ramener au premier point par une factorisation.

#### Opérations sur les matrices

- Si  $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  
alors :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (\alpha A + \beta B)^T &= \alpha A^T + \beta B^T \end{aligned}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  
alors :

$$\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)$$

- Si  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

#### Matrice d'une famille de vecteurs

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $q$  et  $e = (e_1, \dots, e_q)$  une base de  $E$ ,  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ . On appelle **matrice de la famille**  $(v_1, \dots, v_p)$  **relativement à la base  $e$**  et on note  $\text{Mat}_e(v_1, \dots, v_p)$  la matrice à  $q$  lignes et  $p$  colonnes dont les vecteurs colonnes  $C_j$  sont les coordonnées des vecteurs  $v_j$  relativement à la base  $e$ .

$$\text{Mat}_e(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qj} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_q \end{matrix}$$

où  $(a_{1j}, \dots, a_{qj})$  sont les composantes du vecteur  $v_j$  dans la base  $e$ .

#### Correspondances « Famille de Vecteurs-Matrice »

Avec les notations précédentes :

Famille de Vecteurs		Matrices
$v = (v_1, \dots, v_n)$		$A = \text{Mat}_e(v_1, \dots, v_p)$
$v$ base de E	$\iff$	A inversible
$\text{rg}(v)$	$=$	$\text{rg}(A)$
$v$ libre	$\iff$	$\text{rg}A = \text{nbre colonnes de } A$

#### Matrice d'une application linéaire

Soient :

- 1 E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et  $e = (e_1, \dots, e_p)$  une base de E.
- 2 F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $q$  et  $f = (f_1, \dots, f_q)$  une base de F.
- 3  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle **matrice de  $u$  relativement aux bases  $f$  et  $e$**  et on note  $\text{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$  (ou  $\text{Mat}_{e,f}(u)$ ) la matrice à  $q$  lignes et  $p$  colonnes de la famille de vecteurs  $(u(e_1), \dots, u(e_p))$  relativement à la base  $f : \text{Mat}_f(u(e_1), \dots, u(e_p))$

$$\text{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qj} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_i \\ \vdots \\ \leftarrow f_q \end{matrix}$$

où  $(a_{1j}, \dots, a_{qj})$  sont les composantes du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $f$ .

#### Matrice de la composée de deux applications linéaires

Soient :

- 1 E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et  $e = (e_1, \dots, e_p)$  une base de E.
- 2 F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $q$  et  $f = (f_1, \dots, f_q)$  une base de F.
- 3 G un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $r$  et  $g = (g_1, \dots, g_r)$  une base de G.
- 4  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .

alors :

$$\text{Mat}_{g \leftarrow e}(v \circ u) = \text{Mat}_{g \leftarrow f}(v) \times \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$$

#### Correspondances « Application linéaire-Matrice »

Avec les notations précédentes :

Application linéaire		Matrice
$u \in \mathcal{L}(E, F)$		$A = \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$
$u$ isomorphisme	$\iff$	A inversible
$\text{rg}(u)$	$=$	$\text{rg}(A)$
$u$ injective	$\iff$	$\text{rg}A = \text{nbre colonnes de } A$
$y = u(x)$	$\iff$	$Y = AX$

où  $x \in E, y \in F$  et où  $X = \text{Mat}_e(x), Y = \text{Mat}_f(y)$

#### Matrice de changement de base

Soient  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et  $f = (f_1, \dots, f_n)$  deux bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension  $n$ . On appelle **matrice de passage de  $e$  à  $f$**  (ou **matrice de changement de base**) et on note  $P_{e \leftarrow f}$  la matrice de la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  relativement à la base  $e$  :

$$P_{e \leftarrow f} = \text{Mat}_e(f_1, \dots, f_n)$$

#### Propriétés des matrices de changement de base

Soient  $e, f$  et  $g$  trois bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension  $n$ . On a :

1

$$P_{e \leftarrow f} = \text{Mat}_{e \leftarrow f}(i d_E)$$

2

$$P_{e \leftarrow g} = P_{e \leftarrow f} \times P_{f \leftarrow g}$$

3  $P_{e \leftarrow f}$  est inversible et :

$$[P_{e \leftarrow f}]^{-1} = P_{f \leftarrow e}$$

#### Formule de changement de base pour un vecteur

Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $e$  et  $f$  deux bases de E et  $x \in E$ . Alors :

$$\text{Mat}_f(x) = P_{f \leftarrow e} \times \text{Mat}_e(x)$$

#### Formules de changement de base pour une application linéaire

Soient  $e$  et  $e'$  deux bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et  $f$  et  $f'$  deux bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F. Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a :

$$\text{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = P_{f' \leftarrow f} \times \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u) \times P_{e \leftarrow e'} = [P_{f' \leftarrow f}]^{-1} \times \text{Mat}_{f \leftarrow e}(u) \times P_{e \leftarrow e'}$$

#### Formules de changement de base pour un endomorphisme

Soient  $e$  et  $e'$  deux bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a :

$$\text{Mat}_{e'}(u) = P_{e' \leftarrow e} \times \text{Mat}_e(u) \times P_{e \leftarrow e'} = [P_{e \leftarrow e'}]^{-1} \times \text{Mat}_e(u) \times P_{e \leftarrow e'}$$

### 1.3.9 Déterminant

#### Déterminant d'une matrice de taille $n$

Il existe une unique application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  appelée **déterminant** vérifiant :

- 1  $f$  est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
- 2  $f$  est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
- 3  $f(I_n) = 1$

- Si  $n = 2$  et si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Si  $n = 3$  et si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

qui se calcule avec la **règle de Sarrus**.

#### Propriétés du déterminant d'une matrice

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- 1  $\det(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = 0$ .
- 2  $\det(I_n) = 1$ .
- 3  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- 4  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- 5 Caractérisation des matrices inversibles :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Autrement dit : le déterminant d'une matrice inversible est inversible

- 6 Si A est inversible alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

- 7  $\det(A^T) = \det(A)$

#### Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

On appelle **déterminant dans la base  $e$  de la famille  $v = (v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de E** et on note  $\det_e(v)$ , le déterminant de la matrice de la famille  $v$  dans la base  $e$ . On le note  $\det_e(v)$  :

$$\det_e(v) = \det \text{Mat}_e(v)$$

### Déterminant d'un endomorphisme

Soient :

- E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
- $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de E.
- $u$  un endomorphisme de E.

Le scalaire  $\det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est indépendant de  $e$  et est appelé **déterminant de l'endomorphisme  $u$** . On le note  $\det(u)$ .

### Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u, v$  des endomorphismes de E. On a :

- 1  $\det(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_{\mathbb{K}}$ .
- 2  $\det(1d_E) = 1_{\mathbb{K}}$ .
- 3  $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$  est un scalaire.
- 4  $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$ .
- 5 Caractérisation des automorphismes de E :

$$u \in \text{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$$

- 6 Si  $u \in \text{GL}(E)$  alors  $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$ .

### Opération sur les lignes et les colonnes

- 1 Un déterminant qui a deux **colonnes** identiques est nul.
- 2 Un déterminant qui a une **colonne** combinaison linéaire des autres colonnes est nul.
- 3 Un déterminant dont une **colonne** est formée de 0 est nul.
- 4 On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une **colonne** une combinaison linéaire des autres colonnes.
- 5 Si on multiplie par  $\lambda$  une **colonne** d'un déterminant, on multiplie par  $\lambda$  la valeur de ce déterminant.
- 6 Quand on permute deux **colonnes** d'un déterminant, on change son signe.
- 7 Comme le déterminant d'une matrice est égale à celui de sa transposée, les 6 phrases précédentes restent vraies si on remplace le mot "**colonne**" par le mot "**ligne**".

### Mineur, cofacteur

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On appelle **mineur d'indice  $(i, j)$**  le déterminant  $\Delta_{i,j}$  de la matrice obtenue en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de la matrice A.
- On appelle **cofacteur d'indice  $(i, j)$**  et on note  $A_{i,j}$  le scalaire  $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ .

### Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Soit  $j_0 \in [1, n]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0} \end{aligned}$$

- Soit  $i_0 \in [1, n]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j} \end{aligned}$$

### 1.3.10 Systèmes linéaires

#### Système linéaire à $n$ équations et $p$ inconnues

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On considère le système linéaire à  $n$  lignes et  $p$  inconnues ( $\mathcal{S}$ ) donné par :

$$(\mathcal{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- 1 **Résoudre ce système** consiste à déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  de tous les  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  vérifiant ( $\mathcal{S}$ ).
- 2 Le vecteur  $b = (b_1, \dots, b_n)$  est le **second membre du système** ( $\mathcal{S}$ ).
- 3 On appelle **système homogène associé** au système ( $\mathcal{S}$ ), le système obtenu lorsque  $b = 0$ . On le note ( $\mathcal{S}_0$ ) et on note  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble de ses solutions.
- 4 A est la **matrice du système** ( $\mathcal{S}$ ).
- 5  $\text{rg} A$  est le **rang du système** et est noté  $\text{rg}(\mathcal{S})$ .
- 6 On dit que le système est **compatible** si l'ensemble de ses solutions est non vide.

### Interprétation en terme d'application linéaire

Considérons  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$  munis de leurs bases canoniques respectives  $e$  et  $f$ . Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  l'unique application linéaire de E dans F telle que  $\text{Mat}_{f-e}(u) = A$  et

$$x \text{ le vecteur de E tel que } \text{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

On a :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \iff u(x) = b$$

Donc :

- Le système ( $\mathcal{S}$ ) est compatible si et seulement si  $b \in \text{Im}(u)$ .
- Si  $u$  est injective et si le système ( $\mathcal{S}$ ) est compatible alors l'ensemble des solutions de ( $\mathcal{S}$ ) ne possède qu'un et un seul élément.
- Si  $u$  est surjective, le système ( $\mathcal{S}$ ) est compatible.
- Si  $u$  est à la fois surjective et injective alors l'ensemble des solutions de ( $\mathcal{S}$ ) ne possède qu'une et une seule solution.

### Structure de l'ensemble des solutions

- **Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène**

Soit ( $\mathcal{S}$ ) un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues. L'ensemble des solutions du système homogène ( $\mathcal{S}_0$ ) associé à ( $\mathcal{S}$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p - \text{rg}(\mathcal{S})$ .

- **Structure de l'ensemble des solutions de ( $\mathcal{S}$ )**

Soit S l'ensemble des solutions du système linéaire ( $\mathcal{S}$ ).

- 1 Si le système ( $\mathcal{S}$ ) n'est pas compatible alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ .
- 2 Sinon, alors il existe une solution particulière  $x_0$  de ( $\mathcal{S}$ ) et on a alors :

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{x_0 + x \in \mathbb{K}^p \mid x \in \mathcal{S}_0\}$$

### 1.3.11 Espaces euclidiens

#### Produit scalaire

Soit E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E, une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- 1  $\varphi$  est une **forme bilinéaire** :  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ 

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y, z) &= \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z), \\ \varphi(x, \lambda y + \mu z) &= \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z). \end{aligned}$$
- 2  $\varphi$  est **symétrique** :
 
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$
- 3  $\varphi$  est **définie** :
 
$$\forall x \in E, \quad (\varphi(x, x) = 0) \iff (x = 0).$$
- 4  $\varphi$  est **positive** :
 
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

On note  $(x | y) = \varphi(x, y)$  le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation  $\overline{x \cdot y}$ .

#### Espace préhilbertien, Espace euclidien

Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un **espace euclidien**.

#### Norme euclidienne associée à un produit scalaire

On définit la **norme euclidienne** associée à un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x | x)}.$$

### Règles de calcul

Pour tous vecteurs  $x, y \in E$ , et tout réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

- 1  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$  ;  $\|y\|^2$  (égalité du parallélogramme) :
- 2  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$  ;
- 3  $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$  ;
- 4  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  ;
- 5  $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$  (identité de polarisation).

Pour des vecteurs  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i \mid y_j),$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j (x_i \mid x_j).$$

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous vecteurs  $x, y \in E$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

et on a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires :  $|(x|y)| = \|x\| \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : (y = \lambda x \text{ ou } x = \lambda y)$ .

### Exemples de produits scalaires et normes associées

Quelques exemples de produits scalaires et leur norme associée (à retenir) :

- Produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$  : Si  $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(X|Y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- Sur l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f, g \in E$  :

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}.$$

- Sur l'espace des fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues et  $2\pi$ -périodiques,  $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ,  $f, g \in E$  :

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt}.$$

- Sur l'espace des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T),$$

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{Tr}(AA^T)}.$$

On se place dans toute la suite dans un espace préhilbertien réel  $(E, (\cdot|\cdot))$ .

### Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits *orthogonaux* lorsque  $(x|y) = 0$ .

### Identité de Pythagore

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . Alors

$$(x|y) = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

### Des vecteurs orthogonaux 2 à 2 forment un système libre

Soit  $S = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies (x_i | x_j) = 0.$$

Alors la famille  $S$  est libre.

### Orthogonal d'une partie

Soit  $A \subset E$  une partie de  $E$ . On définit l'orthogonal de  $A$  comme étant le sous-ensemble de  $E$  noté  $A^\perp$  et donné par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x|a) = 0\}$$

On considère dans toute la suite de ce chapitre un espace euclidien  $E$  muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot|\cdot)$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée. On note  $n$  la dimension de  $E$ .

### Bases orthogonales, orthonormales

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On dit que  $e$  est une base

1. *orthogonale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies (e_i | e_j) = 0.$$

2. *orthonormale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (e_i | e_j) = \delta_{ij}.$$

### Calculs dans une base orthonormale

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ .

1. Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont données par les produits scalaires :

$$x = \sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i.$$

2. Si  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  et  $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ , alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

3. Si  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

### Théorème de Schmidt

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque de  $E$ . Alors il existe une *base orthonormale*  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  vérifiant :

- 1  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varepsilon_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$  ;
- 2  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (e_i | \varepsilon_i) > 0$ .

### Méthode pour orthonormaliser une famille de vecteurs

On souhaite appliquer l'algorithme de Schmidt à la base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Pour ce faire :

- 1 On pose  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .
- 2 On suppose  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  construits. On calcule le vecteur : 
$$\tilde{\varepsilon}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k (e_{k+1} | \varepsilon_i) \varepsilon_i$$
 et on pose : 
$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k+1}}{\|\tilde{\varepsilon}_{k+1}\|}$$
.
- 3 Si  $(e_{k+1} | \varepsilon_{k+1}) < 0$  alors on remplace  $\varepsilon_{k+1}$  par  $-\varepsilon_{k+1}$ .

### Existence d'une base orthonormale

Tout espace euclidien  $E \neq \{0_E\}$  possède une base orthonormale.

### Projecteur orthogonal

Soit  $p \in L(E)$  un projecteur (c'est-à-dire une endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant  $p \circ p = p$ ). On dit que  $p$  est un *projecteur orthogonal* si et seulement si  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont deux sous-espaces orthogonaux de  $E$  :

$$\forall x \in \text{Ker } p, \forall y \in \text{Im } p, \quad (x|y) = 0$$

Le projeté  $p(x)$  réalise la meilleure approximation de  $x$  par des vecteurs de  $F$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose :

$$d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

Alors :

- 1  $d(x, F)$  est bien défini ;
- 2  $d(x, F) = \|x - p(x)\|$  où  $p(x)$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  ;
- 3 Si  $f \in F$ ,  $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$  avec égalité si et seulement si  $f = p(x)$ .

## 2 Questions de cours

### 2.1 Fondements

#### 2.1.1 Applications

Soient E et F deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$ . Que signifie que :

1.  $f$  est injective ?
2.  $f$  est surjective ?
3.  $f$  est bijective ?
4. Soit G un troisième ensemble et soit  $g : F \rightarrow G$ . Prouver l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
  - (a)  $f$  est injective et  $g$  est surjective ;
  - (b)  $g \circ f$  est bijective.

#### 2.1.2 Récurrence

1. Rappeler le théorème de récurrence.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Rappeler la valeur de la somme :  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$
3. Démontrer ce résultat.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Rappeler la valeur de la somme :  $T_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ .
5. Démontrer ce résultat.
6. Que vaut cette somme si  $q = 1$  ?

#### 2.1.3 Trigonométrie

1. Rappeler les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.
2. Rappeler et prouver les formules d'addition pour la tangente.
3. Donner deux expressions pour la dérivée de la fonction tangente.
4. Tracer les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente.
5. Calculer  $\cos 2a$  en fonction de  $\cos^2 a$  puis en fonction de  $\sin^2 a$  où  $a \in \mathbb{R}$ .
6. Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , exprimer  $\cos a \cos b$  en fonction de  $\cos(a+b)$  et  $\cos(a-b)$ .
7. Pour  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ , exprimer  $\cos p + \cos q$  comme un produit de cosinus.
8. Soit  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation, d'inconnue  $\alpha \in \mathbb{R} : \sin \alpha = \sin \alpha_0$ . (Faire un dessin)
9. Soit  $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Résoudre l'équation d'inconnue  $\alpha \in \mathbb{R} : \tan \alpha = \tan \alpha_0$ .

### 2.2 Nombres complexes

#### 2.2.1 Forme algébrique - Forme trigonométrique

1. Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Rappeler la définition du module de  $z$ .
  - (b) Qu'est-ce qu'un argument de  $z$  ?
  - (c) Qu'est-ce que la forme trigonométrique de  $z$  ?
2. Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
  - (a) En effectuant un minimum de calcul, prouver que  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .
  - (b) On suppose que  $z_2 \neq 0$ . Rappeler la formule donnant :  $\arg \frac{z_1}{z_2}$  et redémontrer là.
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Donner la définition du nombre complexe :  $e^{i\theta}$  ?
4. Prouver que si  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ , alors :  $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ .
5. Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ .
6. Rappeler les formules d'Euler.
7. Donner la formule de Moivre.

#### 2.2.2 Racines de l'unité - Résolution du trinôme du second degré

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) Qu'est-ce qu'une racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité ?
  - (b) Décrire l'ensemble  $\cup_n$  des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.
  - (c) Soit  $\omega \in \cup_n$ . Prouver que  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$
2. Expliquer comment trouver les racines  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre complexe  $z = \rho e^{i\theta}$  où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . (Ou pourra expliciter la méthode sur un exemple en calculant les racines sixièmes de  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ ).
  - (a) Comment calculer les racines carrées d'un nombre complexe  $\Delta = a + ib \in \mathbb{C}$  ?
  - (b) Soit  $a, b, c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$ . Quelles sont les solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .
  - (c) Comment peut-on alors factoriser le polynôme  $az^2 + bz + c$  ?

### 2.3 Fonctions usuelles

#### 2.3.1 Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

1. Donner la définition de la fonction  $\ln$  et énoncer ses principales propriétés (domaine de définition, domaine de dérivabilité, dérivée, limites, graphe, propriétés algébriques).
2. Donner la définition de la fonction  $\exp$  et énoncer ses principales propriétés (domaine de définition, domaine de dérivabilité, dérivée, limites, graphe, propriétés algébriques).
3. Prouver que  $\forall (a, x) \in \mathbb{R}^2, \ln(ax) = \ln a + \ln x$ .
4. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Rappeler la définition de la fonction  $x \mapsto x^a$  ainsi que son domaine de définition.

#### 2.3.2 Fonctions trigonométriques

1. Donner la définition et énoncer les principales propriétés des fonctions (domaine de définition, parité, domaine de dérivabilité, dérivée, limites, graphe) :
  - (a) arccos.
  - (b) arcsin
  - (c) arctan
2. Re-construire, en appliquant le théorème de la bijection, la fonction arcsin.
3. Re-construire, en appliquant le théorème de la bijection, la fonction arctan.

#### 2.3.3 Fonctions hyperboliques

1. Donner la définition et énoncer les principales propriétés des fonctions (domaine de définition, parité, domaine de dérivabilité, dérivée, limites, graphe, propriétés algébriques) :
  - (a) sinus hyperbolique sh ;
  - (b) cosinus hyperbolique ch ;
  - (c) tangente hyperbolique th.
2. Prouver la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique :  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ .
3. Rappeler les formules d'additions pour le cosinus et le sinus hyperbolique et en redémontrer une.
4. Rappeler les formules d'additions pour la tangente hyperbolique et les redémontrer.

### 2.4 Limites usuelles

1. Préciser les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & \text{(c)} \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} & \text{(e)} \frac{\exp x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & \text{(g)} \frac{\exp x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \\
 \text{(b)} x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} & \text{(d)} \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} & \text{(f)} x \exp x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} & \text{(h)} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0}
 \end{array}$$

2. Soient  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Préciser les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} & \text{(c)} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \\
 \text{(b)} x^\beta |\ln x|^\gamma \xrightarrow{x \rightarrow 0} & \text{(d)} |x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty}
 \end{array}$$

### 2.5 Dérivées des fonctions usuelles

1. Compléter chaque ligne du tableau :  $f$  est définie sur I,  $f'$  est la dérivée de  $f$  sur l'intervalle J.  $x$  est un élément de I.

I	$f(x)$	J	$f'(x)$
	$\ln(x)$		
	$\ln( x )$		
	$e^x$		
	$x$		
	$x^n \ (n \in \mathbb{N})$		
	$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$		
	$\sqrt{x}$		
	$x^a \ (a \in \mathbb{R})$		
	$\cos(x)$		
	$\sin(x)$		
	$\tan(x)$		
	$\cotan(x)$		
	$\arcsin(x)$		
	$\arccos(x)$		
	$\arctan(x)$		
	$\text{ch}(x)$		
	$\text{sh}(x)$		
	$\text{th}(x)$		
	$\text{coth}(x)$		

2. Soient  $u, v$  des fonction dérivables sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$ . Quelle est la dérivée de (là où ces fonctions sont définies) :



- (a)  $uv$                       (c)  $\ln u$                       (e)  $\frac{1}{u}$                       (g)  $\frac{u}{v}$   
 (b)  $e^u$                       (d)  $u \circ v$                       (f)  $u^n$  où  $n \in \mathbb{N}$                       (h)  $\sqrt{u}$

## 2.6 Équations différentielles

### 2.6.1 Équations différentielles du premier degré

- Réciter le théorème de résolution des équations différentielles homogènes et normalisées du premier ordre.
- On considère l'équation différentielle homogène : (E) :  $ay' + by = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Prouver que toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
- Expliquer la méthode de variation de la constante.
- On considère l'équation différentielle : (E) :  $y' + \alpha y = d$  où  $d : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Sous quelle forme cherche-t-on une solution particulière de (E) si.
  - $d$  est un polynôme de degré  $n$ .
  - $d(t) = e^{mt}$  avec  $P$  un polynôme de degré  $n$  et  $m \in \mathbb{K}$ .

### 2.6.2 Équations différentielles du second degré

- Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $a \neq 0$ . Réciter le théorème de résolution des équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants dans  $\mathbb{C}$  :  $ay'' + by' + cy = 0$ .
- Redémontrer ce théorème.
- Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $a \neq 0$ . Réciter le théorème de résolution des équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants dans  $\mathbb{R}$  :  $ay'' + by' + cy = 0$
- On considère l'équation différentielle : (E) :  $ay'' + by' + cy = d$  avec  $a, b, c \in \mathbb{K}$ . Sous quelle forme cherche-t-on une solution particulière de (E) si.
  - $d$  est un polynôme de degré  $n$ .
  - $d(t) = e^{mt}$  avec  $P$  un polynôme de degré  $n$  et  $m \in \mathbb{K}$ .
  - $d(t) = \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ .

## 2.7 Systèmes linéaires

- Systèmes linéaires : on considère le système linéaire à  $n$  lignes et  $p$  inconnues  $\mathcal{S}$  donné par :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- Qu'est-ce qui différencie un système linéaire d'un système non linéaire ?
  - Donner la matrice du système linéaire  $\mathcal{S}$ .
  - Donner la matrice augmentée du système linéaire  $\mathcal{S}$ .
  - Quelles sont les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ?
  - Que signifie l'équivalence de deux systèmes linéaires ?
  - Que dire de deux systèmes déduits l'un de l'autre par une opération élémentaire sur les lignes.
  - Donner la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
- Matrices échelonnées :
    - Qu'est qu'une matrice échelonnée en ligne ?
    - Qu'est qu'une matrice échelonnée réduite en ligne ?
    - Qu'est-ce qu'un pivot d'une matrice échelonnée en ligne ?
    - Qu'est-ce que le rang d'un système linéaire ?
    - Qu'est-ce qu'une inconnue principale, une inconnue secondaire d'un système linéaire ? Quel est leur rôle dans la résolution d'un système linéaire ?

## 2.8 Ensemble des entiers - Combinatoire - Formule du binôme de Newton

### 2.8.1 Combinatoire

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $p \in [0, n]$ .

- Qu'est qu'une  $p$ -liste de  $E$  ? Donner un exemple de 3-liste de  $E = \{a, b, c, d\}$ .
  - Combien  $E$  compte-t'il de  $p$ -listes ?
- Qu'est-ce qu'un  $p$ -arrangement de  $E$  ? Donner un exemple de 3-arrangement de  $E = \{a, b, c, d\}$ .
  - Combien  $E$  compte-t'il de  $p$ -arrangements ?
- Qu'est-ce qu'une  $p$ -combinaison de  $E$  ? Donner un exemple de 3-combinaison de  $E = \{a, b, c, d\}$ .
  - Combien  $E$  compte-t'il de  $p$ -combinaisons ?

### 2.8.2 Formule du binôme

Soit  $(p, n) \in \mathbb{N}$ .

- Que vaut le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  ?
- Réciter et redémontrer la relation de Pascal.
- Réciter la formule du binôme de Newton.
- Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ . Combien  $E$  compte-t'il de parties ? Prouver cette formule.

### 2.8.3 L'ensemble des réels

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- Qu'est-ce qu'un majorant de  $A$  ?
- Qu'est-ce que la borne supérieure de  $A$  (si celle-ci existe) ?
- Réciter l'axiome de la borne supérieure.
- Réciter le théorème de caractérisation de la borne supérieure. Re-démontrer ce théorème.

## 2.9 Suites réelles

- Donner la définition d'une suite convergente, d'une suite divergente.
- Démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- Donner trois méthodes pour vérifier qu'une suite est croissante.
- Réciter le théorème d'opérations sur les limites.
- Réciter le théorème des gendarmes.
- Réciter le théorème de passage à la limite dans une inégalité.
- Réciter le théorème de la limite monotone.
- Redémontrer ce théorème.
- Qu'est-ce que deux suites adjacentes ? Que peut-on dire de telles suites ?
- Réciter le théorème de convergence (ou divergence) d'une suite géométrique.
- Réciter le théorème de comparaison des suites de références.
- Soit  $(a^n)$  une suite géométrique de raison  $a \in \mathbb{R}$ . Indiquer la nature de  $(a^n)$  suivant les valeurs de  $a$ .
- Donner la définition de  $u_n = \frac{a}{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ .
  - Donner la définition de deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  équivalentes.
  - Prouver que deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes si et seulement si  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang,  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
  - Quelles sont les opérations autorisées avec les équivalents ?
  - Quelles sont les opérations interdites avec les équivalents ?
  - Donner les différents équivalents usuels. Re-démontrer ces formules.

## 2.10 Espaces vectoriels

On suppose que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Donner la définition d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Que signifie que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  ?
- Décrire tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . Décrire  $\text{Vect}(u, v)$ .
- Plus généralement, si  $\mathcal{F}$  est une partie de  $E$ , qu'est ce que  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  ?
- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Rappeler la définition du fait que :
  - $F$  et  $G$  sont en somme directe.
  - $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
  - Quel est le sens de la notation  $E = F + G$  ?
  - Supposant que  $E = F \oplus G$ , que peut-on dire d'un vecteur  $x$  de  $E$  ?
  - Démontrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe dans  $E$  si et seulement si tout vecteur de  $E$  se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .
- Soient  $(E, +, \cdot)$  et  $(F, +, \cdot)$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$ .
  - Rappeler ce que signifie que  $f$  est linéaire.
  - On suppose dans la suite que  $f$  est linéaire.
    - Qu'est-ce que le noyau de  $f : \text{Ker } f$  ?
    - Prouver que  $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
    - Qu'est-ce que  $\text{Im } f$  ?
    - Prouver que  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
    - Le fait que  $\text{Ker } f = \{0\}$  est équivalent à quelle propriété pour  $f$  ? Démontrer cette propriété.
  - Donner la définition d'un projecteur de  $E$ .
  - À quelle condition un endomorphisme de  $E$  est-il un projecteur de  $E$  ?
  - Donner la définition d'une symétrie de  $E$ .
  - À quelle condition un endomorphisme de  $E$  est-il une symétrie de  $E$  ?

## 2.11 Fonctions d'une variable réelle

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Qu'est-ce qu'un voisinage de  $a$  ?
2. Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$  (c'est-à-dire  $a$  est un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ ). Que signifie que  $f$  admet une limite  $l$  quand  $x \rightarrow a$  ?
3. Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . A quelles conditions  $f$  est continue en  $a$ .
4. Supposons que  $I = ]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} l \in \mathbb{R}$ . Comment prolonge-t-on  $f$  par continuité en  $b$  ?
5. Réciter le théorème d'opérations sur les limites.
6. Réciter le théorème des gendarmes.
7. Réciter le théorème de la limite monotone.
8. Réciter le théorème de composition des limites.
9. Réciter le théorème de comparaison des fonctions de référence.
10. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage de  $a$  :
  - (a) Donner la définition de  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ .
  - (b) Donner la définition de deux fonctions  $f$  et  $g$  équivalentes en  $a$ .
  - (c) En pratique, par quelles méthodes peut-on prouver que deux fonctions sont équivalentes ?
  - (d) Quels sont les opérations autorisées avec les équivalents ?
  - (e) Quels sont les opérations interdites avec les équivalents ?
  - (f) Réciter les équivalents usuels que vous connaissez.
  - (g) Prouver que  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
  - (h) Prouver que  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
  - (i) Prouver que  $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
  - (j) Prouver que  $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ .
  - (k) Prouver que  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ .
11. Réciter le théorème d'opérations sur les fonctions continues.
12. Réciter le théorème des valeurs intermédiaires.
13. Réciter le théorème de la bijection.
14. Que dire de l'image d'un segment  $[a, b]$   $a, b \in \mathbb{R}$  par une application continue ?

## 2.12 Dimension d'un espace vectoriel

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $n$  est un entier naturel.

1. **Familles libres, liées, génératrices :**
  - (a) Qu'est-ce qu'une famille libre de vecteurs de  $E$  ?
  - (b) Qu'est-ce qu'une famille liée de vecteurs de  $E$  ?
  - (c) Démontrer que dans une famille liée de vecteurs de  $E$ , un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
  - (d) Qu'est-ce qu'une famille génératrice de vecteurs de  $E$  ?
2. **Bases, dimension :**
  - (a) Qu'est-ce qu'une base de  $E$  ?
  - (b) Qu'est-ce que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  ? Redémontrer cette propriété.
  - (c) Qu'est-ce que la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  ?
  - (d) Réciter le théorème de la base incomplète.
  - (e) Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ . Que peut-on dire des cardinaux respectifs de ces deux familles ?
  - (f) Qu'est-ce que la dimension d'un espace vectoriel ?
  - (g) Avec les notations de la question précédente, si  $\dim E = n$ , quelles inégalités peut-on écrire entre  $\text{Card}(\mathcal{G})$ ,  $\text{Card}(\mathcal{L})$  et  $n$ .
3. **Sous-espaces vectoriels, somme directe :**
  - (a) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Quelle relation existe-t-il entre  $\dim E$  et  $\dim F$  ?
  - (b) Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Écrire la relation entre  $\dim(F+G)$ ,  $\dim F$  et  $\dim G$  (Formule de Grassman).
  - (c) Que devient cette relation si  $F$  et  $G$  sont en somme directe ? Expliquer.
  - (d) Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$ , comment construit-on une base de  $E$  à partir d'une base de  $F$  et d'une de  $G$  ?
4. **Applications linéaires en dimension finie :**
  - (a) Soient  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Posons :  $\forall i \in [1, n], u(e_i) = f_i$ . Prouver que :
    - 1  $u$  est injective si et seulement si  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.
    - 2  $u$  est surjective si et seulement si  $(f_1, \dots, f_n)$  est génératrice.
  - (b) Qu'est-ce que deux espaces vectoriels isomorphes ?
  - (c) Qu'est-ce que le rang d'une famille de vecteurs ?
  - (d) Qu'est-ce que le rang d'une application linéaire.
  - (e) Réciter la formule du rang.

## 2.13 Dérivabilité

On considère une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

### 2.14 Dérivée en un point

1. Qu'est-ce que le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  ?
2. Que signifie que  $f$  est dérivable en  $a$  ? Quelle est l'interprétation géométrique ?
3. Que signifie que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  ?
4. Prouver en utilisant la définition que  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  mais n'est pas dérivable en 0.

#### 2.14.1 Dérivée sur un intervalle

1. Que signifie que  $f$  est dérivable sur  $I$  ?
2. Une seule des deux implications suivantes est vraie, laquelle ?
  - 1 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .
  - 2 Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f$  est dérivable sur  $I$ .
3. Réciter le théorème de dérivation de la bijection réciproque.

#### 2.14.2 Applications de la dérivation

1. Réciter le théorème de Rolle. Quelle est son interprétation géométrique ?
2. Réciter le théorème des accroissements finis. Quelle est son interprétation géométrique ?
3. Réciter l'inégalité des accroissements finis. Quelle est son interprétation géométrique ?
4. Prouver la divergence de la série harmonique.
5. Redémontrer la totalité du théorème ??.

#### 2.14.3 Dérivées d'ordre $n$

1. Qu'est-ce qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^0$  ?
2. Qu'est-ce qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  ?
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , qu'est-ce qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  ?
4. Réciter la formule de Leibnitz.
5. Réciter le théorème de la bijection de classe  $\mathcal{C}^n$ .

#### 2.14.4 Calcul de dérivées

Le formulaire de dérivation doit être parfaitement connu.

## 2.15 Matrices - Systèmes linéaires - Déterminants

### 2.15.1 Calcul Matriciel

1. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement de bases  $e$  et  $f$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Comment s'écrit la matrice de  $u$  relativement aux bases  $e$  et  $f$  ? Comment s'écrit la matrice d'un vecteur  $x$  de  $E$  relativement à la base  $e$  ?
2. Qu'est qu'une matrice élémentaire de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$  ?
3. Donner la base canonique de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ . Démontrer que c'est bien une base et en déduire la dimension de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$  (on pourra faire la démonstration en petite dimension).
4. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  ?
5. Comment est défini le produit matriciel ?
6. Donner l'écriture matricielle de la composition de deux applications linéaires. Redémontrer cette formule.
7. Donner l'écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Redémontrer cette formule.
8. Qu'est-ce que la transposée d'une matrice ?
9. Qu'est-ce qu'une matrice inversible.
10. Donner la définition de  $GL_n(\mathbb{K})$ . Quelles propriétés possèdent cet ensemble ?
11. Si  $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ , prouver que  $AB \in GL_n(\mathbb{K})$  et donner l'inverse de  $AB$ .
12. Si  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ , prouver que  $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$  et donner l'inverse de  $A^T$ .
13. Qu'est-ce que la trace d'une matrice carrée. Donner les propriétés de l'application « trace ».
14. Qu'est-ce qu'une matrice diagonale, triangulaire supérieure, scalaire ?
15. Prouver que l'ensemble des matrices scalaires de taille  $n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , en donner une base et déterminer sa dimension.
16. Prouver que l'ensemble des matrices diagonales de taille  $n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , en donner une base et déterminer sa dimension.
17. Prouver que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille  $n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , en donner une base et déterminer sa dimension.
18. Qu'est-ce qu'une matrice symétrique, qu'est-ce qu'une matrice antisymétrique ?

- Donner une base du sous-espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $n$  et du sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille  $n$ , en déduire leur dimension respective et que ce sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . (on pourra faire les démonstrations pour  $n = 3$  par exemple)
- Qu'est-ce qu'une matrice de changement de base.
- Donner les trois propriétés des matrices de changement de base.
- Réciter et re-démontrer la formule de changement de base pour la matrice d'un vecteur.
- Réciter et re-démontrer la formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire.
- Qu'est-ce que le rang d'une matrice. Quel lien y a-t'il avec l'application linéaire qu'elle représente dans des bases données ?
- A quelle condition nécessaire et suffisante sur son rang, une matrice carrée est inversible ?

### 2.15.2 Systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice ?
- Comment calculer le rang d'une matrice en utilisant des oel ou des oec ?
- Soit  $\mathcal{S}$  un système linéaire. Qu'est-ce que le rang de  $\mathcal{S}$  ?
- Que signifie que  $\mathcal{S}$  est compatible ?
- Comment interpréter en terme vectoriel un système linéaire. A quelle condition « vectorielle » est-il compatible ?
- Comment interpréter matriciellement un système linéaire. Que signifie « matriciellement » qu'un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  est solution de ce système.
- Comment interpréter en terme d'application linéaire un système linéaire. Que signifie « en terme d'application » :
  - qu'un  $n$ -uplet  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est solution de ce système.
  - que ce système est compatible, c'est-à-dire qu'il possède au moins une solution.
  - que ce système possède au plus une solution.
  - que ce système est de Cramer, c'est-à-dire possède une et une seule solution.
- Décrire l'ensemble des solutions d'un systèmes linéaires. Re-démontrer cette proposition.

### 2.15.3 Déterminant

- Rappeler la définition du déterminant d'une matrice carrée de taille  $n$ .
- Expliciter le déterminant d'une matrice de taille 2 et celui d'une matrice de taille 3.
- Donner les différentes propriétés du déterminant d'une matrice.
- Si le déterminant d'une matrice est non nul, que peut-on dire de cette matrice ?
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Qu'est-ce que le déterminant d'une famille de vecteurs de  $E$  dans une base  $e$  de  $E$ .
- Si le déterminant d'une famille de vecteurs est nul, que peut-on dire de cette famille ? Même question si il est non nul.
- Donner la définition du déterminant d'un endomorphisme. Prouver qu'il ne dépend pas de la base choisie pour le définir.
- Donner les différentes propriétés du déterminant d'un endomorphisme.
- Réciter le théorème de calcul d'un déterminant par des oel et des oec.
- Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire ?
- Donner la définition du mineur et du cofacteur d'indice  $(i, j)$  d'une matrice carrée.
- Comment développe-t-on un déterminant suivant les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

### 2.16 Intégration

- À quelle condition une fonction admet-elle une intégrale sur un segment donné ?
- Que dire de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment  $[a, b]$ .
- Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  telles que  $f \leq g$ . Que dire des intégrales respectives de ces deux fonctions ?
- Donner la relation de Chasles.
- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $m \leq f \leq M$  où  $m, M \in \mathbb{R}$ . Que dire de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  ? Que dire de  $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$  ?
- Si  $\int_a^b f(t) dt = 0$  que peut-on dire de  $f$  ?
- Donner la définition d'une primitive.
- Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux primitives d'un même fonction  $f$ . Que peut-on dire de  $F_1$  et  $F_2$  ? Re-démontrer ce résultat.
- Réciter le théorème fondamental de l'analyse.
- Quel est le lien entre intégrales et primitives ?
- Réciter le théorème d'intégration par parties.
- Que dire de l'intégrale d'une fonction paire sur le segment  $[-a, a]$  ? Et d'une fonction impaire ?
- Réciter la formule de Taylor avec reste intégrale.

### 2.17 Développements limités

- A quoi servent les développements limités ?
- Que signifie que  $f$  possède un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 ?
- Qu'est-ce que la partie principale et le reste d'un développement limité.
- Re-démontrer que la partie principale du développement limité à l'ordre  $n$  en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes pairs.
- Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre  $n$  en 0 : Comment calculer le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de
  - $f + g$  ?
  - $fg$  ?
  - $\frac{1}{g}$  (à quelle condition ce DL existe-t'il ?).
- Réciter le théorème de composition des développements limités.
- Réciter le théorème de primitivation des développements limités.
- Soit  $a > 0$  et  $f : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui admet un DL en 0 de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + \frac{o}{x - x_0} \left( (x - x_0)^k \right)$$

avec  $a_k \neq 0$ . Prouver que  $f$  est prolongeable par continuité en 0, qu'elle est dérivable en 0. Donner une équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0 et déterminer la position du graphe de  $f$  relativement à cette tangente.

- Réciter le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de :
 

(a) $x \mapsto \frac{1}{1-x}$	(e) $x \mapsto \operatorname{sh} x$
(b) $x \mapsto e^x$	(f) $x \mapsto \operatorname{ch} x$
(c) $x \mapsto \sin x$	(g) $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
(d) $x \mapsto \cos x$	(h) $x \mapsto \ln(1-x)$
- Retrouver le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de :
 

(a) $x \mapsto \frac{1}{1+x}$	(e) $x \mapsto \tan x$
(b) $x \mapsto \frac{1}{1-x}$	(f) $x \mapsto \arctan x$
(c) $x \mapsto \ln(1+x)$	(g) $x \mapsto \arcsin x$
(d) $x \mapsto \sin x$	(h) $x \mapsto \sqrt{1+x}$ avec $n = 2$

### 2.18 Polynômes

- Qu'est-ce que le degré d'un polynôme.
- Que peut-on dire du degré d'un produit PQ de deux polynômes ? du degré de leur somme  $P + Q$  ?
- Donner la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Redémontrer que c'est bien une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Réciter le théorème de la division Euclidienne.
- Qu'est-ce qu'une racine d'un polynôme P ?
- Soit P un polynôme et  $\alpha$  une racine de P. Que peut-on dire du polynôme  $X - \alpha$  ? Redémontrer cette propriété.
- Que peut-on dire du nombre de racines d'un polynôme relativement à son degré ?
- Réciter la formule de Taylor pour les polynômes.
- Qu'est-ce qu'une racine  $\alpha$  d'ordre  $r$  d'un polynôme P ?
- Comment caractériser le fait que  $\alpha$  est une racine d'ordre  $r$  d'un polynôme P ? Redémontrer ce théorème.
- Réciter le théorème fondamental de l'algèbre.
- Comment se factorise un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  ?
- Comment se factorise un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  ?
- Qu'est-ce qu'un polynôme irréductible.
- Décrire les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  ?
- Décrire les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  ?

### 2.19 Séries numériques

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe.

- Qu'est-ce que la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n$  ?
- Qu'est-ce qu'une série convergente ?
- Qu'est-ce qu'une série grossièrement divergente.
- Qu'est-ce que la somme d'une série convergente ? Comment est-elle notée ?
- Qu'est-ce que le reste d'une série convergente ?
- Donner le critère de Riemann et redémontrer le.
- Donner les critères de comparaison de deux séries réelles positives  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  dans les cas :
  - $u_n \leq v_n$
  - $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
  - $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
 et redémontrer les.
- Qu'est-ce qu'une série absolument convergente.
- Quel est le lien entre l'absolue convergence d'une série et sa convergence ?

## 2.20 Probabilités

### 2.20.1 Espaces probabilisés

Soit  $\Omega$  un ensemble fini. Soient  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

1. Qu'est-ce qu'une probabilité sur  $\Omega$  ?
2. Qu'est-ce que deux événements incompatibles ?
3. Qu'est-ce qu'un système complet d'événements de  $\Omega$  ?
4. Compléter
  - (a)  $P(A \cup B) = ?$
  - (b)  $P(A^c) = ?$
  - (c)  $P(\emptyset) = ?$
  - (d)  $P(\Omega) = ?$
5. Redémontrer les deux premières formules.
6. Donner la définition de la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ .
7. Donner la formule des probabilités composées.
8. Redémontrer cette formule.
9. Donner la formule des probabilités totales.
10. Redémontrer cette formule.
11. Donner la formule de Bayes.
12. Redémontrer cette formule.
13. Que signifie que  $A$  et  $B$  sont indépendants ?

### 2.20.2 Variables aléatoires et lois de probabilité

Soit  $\Omega$  un ensemble fini.

1. Donner la définition d'une variable aléatoire sur  $\Omega$ .
2. Qu'est-ce que la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
3. Qu'est-ce que l'espérance d'une variable aléatoire ?
4. Qu'est-ce que la variance et l'écart type d'une variable aléatoire ?
5. Réciter la formule de Bienaymé-Tchebychev. Comment interprétez-vous cette formule ?
6. Qu'est-ce que la loi de Bernoulli. Donner son espérance et sa variance.
7. Qu'est-ce que la loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
8. Qu'est-ce que la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires ?
9. Qu'est-ce qu'un couple de variables aléatoires indépendantes ?
10. Que signifie que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes ?
11. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent chacune une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  alors que dire de  $X_1 + \dots + X_n$  ?

## 2.21 Produits scalaires et espaces euclidiens

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire sur  $E$  ?
2. Donner au moins 2 exemples de produits scalaires.
3. Qu'est-ce qu'un espace préhilbertien ?
4. Qu'est-ce qu'un espace euclidien ?
5. Qu'est-ce que la norme associée à un produit scalaire ?
6. Réciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
7. Qu'est-ce que des vecteurs orthogonaux.
8. Qu'est-ce que l'orthogonal d'un sev ?
9. Qu'est-ce qu'une famille orthogonale de vecteurs ? orthonormale ?
10. Prouver qu'une famille orthogonale de vecteurs est libre.
11. Réciter et redémontrer le théorème de Pythagore.
12. Expliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
13. Donner l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée.
14. Qu'est-ce que le projeté orthogonal d'un vecteur  $x$  sur un sev  $V$  ?
15. Qu'est-ce qu'un projecteur orthogonal ?
16. Donner l'inégalité de Bessel.

## 3 Exercices

### 3.1 Nombres complexes

#### Exercice 3.1

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

2. En déduire :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

3. En déduire :

$$\sum_{k=0}^n k \sin k\theta.$$

#### Solution :

1. Comme  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $e^{i\theta} \neq 1$  et en reconnaissant la somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $e^{i\theta}$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

2. Par ailleurs :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

3. Pour la dernière somme, il suffit de dériver l'égalité  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) =$

$$\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} \text{ par rapport à } \theta. \text{ On trouve alors}$$

$$\sum_{k=0}^n k \sin k\theta = \frac{1}{4} \frac{(2n+1) \cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2} - \sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

#### Exercice 3.2

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (*) \quad (1)$$

2. En déduire les valeurs de  $\tan\frac{\pi}{5}$  et  $\tan\frac{2\pi}{5}$ , que l'on exprimera sous la forme :

$$\sqrt{p + q\sqrt{n}}, \quad (n, p, q) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$$

3. En déduire la valeur de  $\tan\frac{\pi}{10}$ .

#### Solution :

1. Soit  $z$  une solution de  $(*)$ .  $z \neq -i$  donc  $1 - iz \neq 0$ . Posons  $U = \frac{1 + iz}{1 - iz}$ . Le nombre complexe  $U$  doit vérifier  $U^5 = 1$ . En posant  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ , il existe  $k \in [0, 4]$  tel que :

$$U = \omega^k$$

Alors :

$$z = -i \frac{\omega^k - 1}{\omega^k + 1} = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

On vérifie réciproquement, que  $z = \tan\frac{k\pi}{5}$  est solution pour  $k \in ]0, 4]$ .

2. Résolvons de façon différente l'équation  $(*)$  en développant les deux membres à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} & 1 + 5(iz) + 10(iz)^2 + 10(iz)^3 + 5(iz)^4 + (iz)^5 \\ &= 1 - 5(iz) + 10(iz)^2 - 10(iz)^3 + 5(iz)^4 - (iz)^5 \\ \Leftrightarrow & 5iz + 10(iz)^3 + (iz)^5 = 0 \\ \Leftrightarrow & z[z^4 - 10z^2 + 5] = 0 \end{aligned}$$

Et si  $z$  est une solution non-nulle,  $Z = z^2$  est racine du trinôme

$$Z^2 - 10Z + 5 = 0$$

qui possède deux racines réelles :

$$Z_1 = 5 - 2\sqrt{5} \quad Z_2 = 5 + 2\sqrt{5}$$

et donc, les racines de (\*) sont :

$$0, \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Comme  $\tan \frac{k\pi}{5}$  est strictement positif pour  $k = 1, 2$ , et comme  $\tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{2\pi}{5}$ , on trouve que

$$\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

3. En utilisant la formule de trigonométrie :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

avec  $\theta = \frac{\pi}{10}$ , et en posant  $\Lambda = \tan \frac{\pi}{10}$ , A doit vérifier :

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}}\Lambda^2 + 2\Lambda - \sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0$$

et A est alors la seule racine positive de ce trinôme :

$$\Lambda = \frac{\sqrt{5-2}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

### Exercice 3.3

Soit  $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ . Montrer que :

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

On pourra prouver cette propriété par trois méthodes différentes :

1. Une méthode algébrique utilisant les propriétés du groupe  $\mathbb{U}$ .
2. Une méthode utilisant la factorisation par l'angle moitié.
3. Une méthode géométrique.

**Solution :**

**Méthode algébrique :** Comme  $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ , on a :  $z^{-1} = \bar{z}$  et

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)\overline{(z-1)}}{|z-1|^2} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2} = -2i \frac{\text{Im}(z)}{|z-1|^2} \in i\mathbb{R}.$$

**Avec les angles moitiés :** Comme  $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ , il existe  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tel que :  $z = e^{i\theta}$ . Par factorisation par l'angle moitié :

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = i \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = i \cotan \frac{\theta}{2} \in i\mathbb{R}.$$

**Méthode géométrique :** si A est le point du plan complexe d'affixe  $z$ , B celui d'affixe 1 et C celui d'affixe  $-1$ , ABC est un triangle inscrit dans le cercle unité et BC est un diamètre de ce cercle. Par application du théorème de la médiane, ABC est donc rectangle en A et  $\arg \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ . On en déduit que  $\frac{z+1}{z-1}$  est un imaginaire pur.

## 3.2 Fonctions usuelles

### Exercice 3.4

Résoudre l'équation  $\arcsin x = 2 \arctan x$ .

**Solution :** Pour tout  $X \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , comme  $1 + \tan^2 X = 1/\cos^2 X$ , il vient  $\cos X = 1/\sqrt{1+\tan^2 X}$ . Donc  $\cos \arctan x = 1/\sqrt{1+x^2}$  car  $\arctan x \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et comme  $\sin X = \pm\sqrt{1-\cos^2 X}$ , on a aussi  $\sin \arctan x = x/\sqrt{1+x^2}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \arcsin x &= 2 \arctan x \\ \Rightarrow x &= \sin(2 \arctan x) \\ \Rightarrow x &= 2 \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) \\ \Rightarrow x &= \frac{2x}{1+x^2} \\ \Rightarrow x^3 - x &= 0 \\ \Rightarrow x &= -1, \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que ces 3 nombres sont solutions de l'équation.

### Exercice 3.5

Étudier

$$f(x) = \arccos \left( \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right)$$

**Solution :** Considérons la fonction  $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ . Elle est définie sur  $]0, +\infty[$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

En traçant le tableau de variations de  $\varphi$ , on voit que  $\varphi$  est à valeurs dans  $[0, \frac{1}{2}]$ . Comme arccos est définie et dérivable sur  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $f$  est définie continue sur  $D_f = ]0, +\infty[$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{(1+x)^2}}} \times \varphi'(x) \\ &= \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+x+1}(x+1)} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f$  est décroissante sur  $[0, 1]$ , croissante sur  $[1, +\infty[$  et  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(1) = \frac{\pi}{3}$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ . Comme  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ ,  $f$  n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

### Exercice 3.6

Montrez que

$$\forall x \geq 0, \quad \arctan(\text{sh } x) = \arccos \left( \frac{1}{\text{ch } x} \right)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie.

**Solution :** Considérons la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \arctan(\text{sh } x) - \arccos \left( \frac{1}{\text{ch } x} \right)$$

Elle est dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{\text{ch } x}{1 + \text{sh}^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{ch}^2 x}}} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} = 0$$

Comme  $f(0) = 0$ , on trouve que  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = 0$  ce qui prouve l'égalité. Par la trigonométrie : on sait que pour tout  $X \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $1 + \tan^2 X = \frac{1}{\cos^2 X}$  donc

$$\tan X = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 X} - 1}$$

car  $\tan X \geq 0$  (on ne garde pas la détermination positive de la racine). Soit un réel  $x \geq 0$ .

Comme  $\frac{1}{\text{ch } x} \in ]0, 1[$ ,  $\arccos \left( \frac{1}{\text{ch } x} \right) \in ]0, \pi/2[$ . Alors

$$\tan \left( \arccos \left( \frac{1}{\text{ch } x} \right) \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \left( \arccos \left( \frac{1}{\text{ch } x} \right) \right)} - 1} = \sqrt{\text{ch}^2 x - 1} = \text{sh } x$$

car  $\text{sh } x > 0$ . On prouve ainsi l'égalité.

## 3.3 Équations différentielles

### Exercice 3.7

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad y' - \frac{\text{sh } x}{1 + \text{ch } x} y = \text{sh } x.$$

$$2. \quad y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$$

**Solution :**

1.  $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1 + \text{ch } x)(\alpha + \ln(1 + \text{ch } x)); \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2. L'équation caractéristique associée à (E) admet deux racines complexes conjuguées  $-1 \pm 2i$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions  $t \mapsto (A \cos 2t + B \sin 2t) e^{-t}$ . Linéarisons le second membre, on obtient :  $\cos^2 t = 1/2(1 + \cos 2t)$ . Une solution particulière de  $y'' + 2y' + 5y = 1/2 \cos(2t)$  est  $t \mapsto 1/34 \cos 2t + 2/17 \sin 2t$ . Une solution particulière de  $y'' + 2y' + 5y = 1/2$  est la fonction constante :  $t \mapsto 1/10$ . On applique alors le principe de superposition et les solutions de (E) sont les fonctions  $t \mapsto (A \cos 2t + B \sin 2t) e^{-t} + 1/34 \cos 2t + 2/17 \sin 2t + 1/10$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

### Exercice 3.8

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$$

en introduisant la fonction  $z(t) = e^{t^2} y(t)$ .

**Solution :** Supposons qu'il existe une solution  $y$  de (E). Considérons, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $z$  donnée par :  $z(t) = e^{t^2} y(t)$ , soit  $y(t) = e^{-t^2} z(t)$ . D'où  $y'(t) = (z' - 2tz)e^{-t^2}$  et  $y''(t) = (z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$ . Donc  $0 = y''(t) + 4ty'(t) + (11 + 4t^2)y(t) = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2 + 11 + 4t^2)e^{-t^2} = (z'' + 9z)e^{-t^2}$ . Donc  $z$  vérifie l'équation du second degré à coefficients constants :  $z'' + 9z = 0$ . Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :  $\varphi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha \cos 3t + \beta \sin 3t \end{cases}$  où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Par conséquent  $y$  est de la forme :

$$\Psi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\alpha \cos 3t + \beta \sin 3t) e^{-t^2} \end{cases}$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On vérifie réciproquement que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation.

**Exercice 3.11** ♥

Soit  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \in [0, n]$ .

1. Montrer que :  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ .
2. En déduire que :  $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n 2^{n-1}$

**Solution :**

1. 
$$p \binom{n}{p} = \frac{p \cdot n!}{(n-p)! p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-(p-1))! (p-1)!} = n \binom{n-1}{p-1}$$
2. 
$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} = n 2^{n-1}$$

**3.4 L'ensemble des réels**

**Exercice 3.9** ♥

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right)$$

**Solution :**

1. On a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On montre de même que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i+1} - \sqrt{i} < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right) < \sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$$

Mais les deux sommes extrêmes sont télescopiques et on trouve :

$$\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right) < \sqrt{10000}$$

Soit aussi :

$$99 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right) < 100.$$

On en déduit que  $\mathbb{E} \left( \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right) \right) = 99$

**3.5 Ensemble des entiers - Combinatoire - Formule du binôme de Newton**

**Exercice 3.10** ♥♥

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :  $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, 1 + nx \leq (1+x)^n$ .
2. Re-démontrer cette inégalité en utilisant la formule du binôme de Newton.

**Solution :**

1. Soit  $x \geq 0$ . Si  $n = 0$  l'inégalité est clairement vérifiée. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'inégalité est vraie au rang  $n$  et prouvons la au rang  $n+1$ . Par application de l'hypothèse de récurrence :

$$1 + (n+1)x = 1 + nx + x \leq (1+x)^n + x \leq (1+x)^n + x(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$$

car  $1+x > 0$ . La formule est alors prouvée par application du théorème de récurrence. Remarquons que cette démonstration est encore valable si  $x > -1$ .

2. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geq 0$ . En appliquant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n}_{\geq 0} \\ &\geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x \\ &\geq 1 + nx \end{aligned}$$

**3.6 Suites réelles**

**Exercice 3.12** ♥♥

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9 + k}}$$

**Solution :** Pour tout  $n \geq 1$  :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9 + k}} \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2\sqrt{n^9}} = \frac{n^4}{2n^{\frac{9}{2}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc par application du théorème des gendarmes,  $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$ .

**Exercice 3.13** ♥

On considère la suite  $(u_n)$  donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{np}$$

où  $p$  est un entier strictement positif fixé.

1. Montrer que :  $\forall x \in ]0, 1[, 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .
2. En déduire que :  $\forall x > 1, \ln \frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \ln \frac{x}{x-1}$ .
3. En déduire la limite de  $(u_n)$  puis qu'elle est convergente et donner sa limite.

**Solution :**

1. Il suffit d'étudier les fonctions  $f : \begin{cases} ]0, 1[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - (1+x) \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} ]0, 1[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x)e^x - 1 \end{cases}$
2. Soit  $x > 1$ . On a donc  $\frac{1}{x} \in ]0, 1[$  et, par application de l'inégalité précédente, il vient que :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} &\leq e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} &\leq e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{x}{x-1} \\ \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} &\leq \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \leq \ln \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

3. Pour tout  $k \in [0, np - n]$ , en appliquant l'inégalité précédente à  $x = n+k \geq 1$ , on obtient :

$$\ln \frac{n+k+1}{n+k} \leq \frac{1}{n+k} \leq \ln \frac{n+k}{n+k-1}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq \frac{1}{n+k} \leq \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$$

Sommons maintenant ces inégalités pour  $k$  variant de 0 à  $np - n$ . On reconnaît des sommes télescopiques et on obtient :

$$\ln(np+1) - \ln n \leq u_n \leq \ln np - \ln(n-1)$$

Mais  $\ln(np+1) - \ln n = \ln \left( p + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p$  et  $\ln np - \ln(n-1) = \ln \frac{np}{n-1} = \ln \frac{n}{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p$ . Enfin, par application du théorème des gendarmes, on

obtient :  $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p}$

**Exercice 3.14**

Donner des équivalents simples lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  pour les suites de terme général :

1.  $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
2.  $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n} + 1}{\tan \frac{1}{n^2}}$
3.  $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$
4.  $u_n = (n + 3 \ln n) e^{-(n+1)}$
5.  $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
6.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

**Solution :**

1.  $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$  par application des formules usuelles sur les équivalents et car  $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
2.  $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n} + 1}{\tan \frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin \frac{1}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}} = n^2 (\sin \frac{1}{n} + 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$  car  $\sin \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
3.  $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) = \ln n + \ln(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})$  mais  $\frac{\ln(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\ln(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$  et donc d'après l'exercice ??,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .
4.  $u_n = (n + 3 \ln n) e^{-(n+1)} = n e^{-(n+1)} (1 + 3 \frac{\ln n}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{-(n+1)}$  car  $1 + 3 \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
5.  $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} = \frac{n!}{3^n} \frac{1 + \frac{e^n}{n!}}{1 + (\frac{2}{3})^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$  car  $\frac{1 + \frac{e^n}{n!}}{1 + (\frac{2}{3})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
6.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2-1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}$   
 $= \frac{1}{n\sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  car  $\frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**Exercice 3.15**

1. Montrez que les deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

sont convergentes de même limite.

2. En déduire un équivalent simple de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

**Solution :**

1. On calcule pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

et puisque  $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$ , il vient que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . Donc  $(u_n)$  est croissante. On montre de même que  $(v_n)$  est décroissante. On calcule

$$0 \leq d_n = v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et donc  $(d_n)$  converge vers 0. Les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite  $l \in \mathbb{R}$ .

2. Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = v_n + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$ , il vient que  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .  
 En effet, comme  $(v_n)$  est convergente, on sait que  $\frac{v_n}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$ .

1.  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geq 0\}$
2.  $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
3.  $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
4.  $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}$

**Solution :** Rappelons qu'une partie de  $\mathbb{R}^2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si c'est le singleton  $\{0\}$ , une droite vectorielle ou  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

1. Le couple  $(0, 1)$  est élément de  $F_1$  mais ce n'est pas le cas du couple  $(0, -1)$  qui lui est pourtant colinéaire.  $F_1$  n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ce ne peut être un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Le couple nul  $(0, 0)$  n'est pas élément de  $F_2$  et donc  $F_2$  ne peut être un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
3. On vérifie facilement que  $F_3$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $(x, y), (x', y') \in F_3$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors on vérifie facilement que  $\alpha x + \beta x' = \alpha y + \beta y'$  et donc que  $\alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F_3$ .  $F_3$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
4. Le couple nul  $(0, 0)$  n'est pas élément de  $F_4$  et donc  $F_4$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3.17**

On note  $E = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

1.  $F_1 = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f'(0) = f'(1)\}$
2.  $F_2 = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0, 1], f \geq 0\}$
3.  $F_3 = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 1\}$
4.  $F_4 = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$

**Solution :**

1. L'ensemble  $F_1$  est clairement un sous-ensemble de  $E$ .  $F_1$  est non vide car il contient la fonction nulle. Soient  $f, g \in F_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On combine linéairement de fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  est encore  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et  $(\alpha f + \beta g)'(0) = (\alpha f + \beta g)'(1)$ .  $F_1$  est donc bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Une combinaison linéaire de fonctions positives n'est pas forcément positive. Il s'ensuit que  $F_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. L'intégrale entre 0 et 1 de la fonction nulle est nulle. Cette fonction n'est donc pas élément de  $F_3$  et  $F_3$  ne peut être un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. L'ensemble  $F_4$  est clairement une partie non vide de  $E$ . De plus, une combinaison linéaire de fonctions d'intégrales nulles est d'intégrale nulle et si  $f, g \in F_4, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors, par linéarité de l'intégrale :  $\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_0^1 f(t) dt + \beta \int_0^1 g(t) dt = 0$ .  $F_4$  est donc bien stable par combinaison linéaire et c'est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 3.18**

Soit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & f'' - 2f' + f \end{cases}$$

1. Prouver que  $\Phi$  est un endomorphisme.
2. Calculer  $\text{Ker } \Phi$ .
3.  $\Phi$  est-elle injective ?

**Solution :**

1. Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Utilisant la linéarité de la dérivation :  $\Phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)'' - 2(\alpha f + \beta g)' + (\alpha f + \beta g) = \alpha(f'' - 2f' + f) + \beta(g'' - 2g' + g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$ .  $\Phi$  est bien linéaire.
2. Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \in \text{Ker } \Phi$  si et seulement si  $f'' - 2f' + f = 0$ . En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants, on obtient :  $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(t \mapsto te^t, t \mapsto e^t)$ .
3. Il est alors clair que  $\Phi$  n'est pas injective.

**Exercice 3.19**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g \iff g \circ f = 0$ .
2. Montrer que  $f \circ g = g \circ f \implies \text{Ker } g$  est stable par  $f$ .
3. Montrer que  $g \circ f = \text{id} \implies f$  injective.

**Solution :**

1. Si  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$  alors pour tout  $x \in E, f(x) \in \text{Im } f \subset \text{Ker } g$  donc  $g(f(x)) = 0$ . Donc  $g \circ f = 0$ . Réciproquement, si  $g \circ f = 0$  et si  $y \in \text{Im } f$  alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et  $g(y) = g(f(x)) = 0$  donc  $y \in \text{Ker } g$ . On a alors bien  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .
2. Soit  $x \in \text{Ker } g$ . Alors  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$  donc  $f(x) \in \text{Ker } g$  et  $\text{Ker } g$  est stable par  $f$ .
3. Si  $g \circ f = \text{id}$  et si  $x \in \text{Ker } f$  alors  $0 = g(0) = g \circ f(x) = \text{id}(x) = x$ . Donc  $x = 0$  et  $\text{Ker } f = \{0\}$ . On en déduit que  $f$  est injective.

**3.7 Espaces vectoriels**

**Exercice 3.16**

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

### 3.8 Fonctions d'une variable réelle

#### Exercice 3.20

Déterminer lorsqu'elles existent les limites en le nombre indiqué des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin x \ln x}$  en  $x=0^+$ .
- $f(x) = (1+\frac{a}{x})^x$  en  $x \rightarrow +\infty$  et pour  $a \in \mathbb{R}$ .
- $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}$  en  $x \rightarrow +\infty$
- $f(x) = \frac{\arctan(x-1)}{x^2-1} - \frac{\sin(e^{(x-1)}-1)}{\ln x}$  en  $x=1$
- $f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{arcsin}^2 x$  en  $x=0$
- $f(x) = \frac{x^x - x}{\ln(1+x^2)}$  en  $x \rightarrow +\infty$

**Solution :**

- $f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin x \ln x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} \frac{x \ln x}{\sin x \ln x} \operatorname{car} x \ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2}$ .  
Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}}$ .
- $f(x) = (1+\frac{a}{x})^x = e^{x(1+\frac{a}{x})}$  mais  $x(1+\frac{a}{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a$  donc par opérations sur les limites :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{e^a}$ .
- $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}} = e^{\frac{x \ln \left(1 + \sin \frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}}$  mais  $\sin \frac{\ln x}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  donc  $\frac{x \ln \left(1 + \sin \frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \sin \frac{\ln x}{x}}{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{e}$ .
- D'une part :  $\frac{\arctan(x-1)}{x^2-1} = \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)(x+1)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\arctan X}{X(X+2)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{X}{2X} = \frac{1}{2}$ .  
D'autre part :  $\frac{\sin(e^{(x-1)}-1)}{\ln x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\sin(e^{(x-1)}-1)}{\ln(1+X)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\sin(e^{(x-1)}-1)}{X} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{X}{X} = 1$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}}$ .
- $f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{arcsin}^2 x = e^{\operatorname{arcsin}^2 x} = e^{\frac{\ln(1+\operatorname{ch} x - 1)}{\operatorname{arcsin}^2 x}}$  et  $\ln(1+\operatorname{ch} x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  donc  $\frac{\ln(1+\operatorname{ch} x - 1)}{\operatorname{arcsin}^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \boxed{\sqrt{e}}$ .
- $\frac{x^x - x}{\ln(1+x^2)} = x \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln(1+x^2)} = x \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\ln(1+x^2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \frac{\frac{\ln x}{x}}{\ln(1+x^2)} = \frac{\ln x}{\ln(1+x^2)} = \frac{\ln x}{2 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}}$ .

#### Exercice 3.21

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Déterminer où elle est définie.
- Déterminer là où elle est continue.
- La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.

- $f(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2}-1)\sin x}{\arctan x}$
- $f(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$
- $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{\sin x}$
- $f(x) = \frac{1}{(1-x)\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$

**Solution :**

- $f$  est définie sur  $I = [-1, 1] \setminus \{0\}$ .  $f$  est continue sur  $I$  comme produit et quotient de fonctions continues sur  $I$ . De plus, si  $x \in I$  :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x \frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{x^2}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ . On peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .
- $f$  est définie sur  $I = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .  $f$  est continue sur  $I$  comme produit, somme et composée de fonctions continues. En appliquant le théorème des gendarmes, on montre que  $\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$  et donc que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} -1$ . On prolonge  $f$  par continuité à droite de 0 en posant  $f(0) = 0$ . Comme  $|f(x)| \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} +\infty$ ,  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en 1.
- $f$  est définie sur  $I = \mathbb{R}_+ \setminus \pi\mathbb{N}$ . Par opérations sur les fonctions continues,  $f$  est continue sur  $I$ . De plus  $\frac{x^2 \ln x}{\sin x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$  donc  $f$  est prolongeable par continuité à droite de 0.  $f$  est par contre divergente en tout  $x \in \pi\mathbb{N}^*$ .

4.  $f$  est définie sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Par opérations sur les fonctions continues,  $f$  est continue sur  $I$ . Pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \frac{x}{(1-x)\operatorname{sh} x}$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ . On peut alors prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant :  $f(0) = 1$ . On a aussi :  $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)\operatorname{sh} 1}$  qui est divergente en 1.  $f$  n'est donc pas prolongeable par continuité en 1.

#### Exercice 3.22

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$ . Prouver que  $f$  s'annule

**Solution :** Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) < 0$ . De même, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$ , il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $f(b) > 0$ .  $f$  étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur le segment  $[a, b]$ , on en déduit qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

### 3.9 Dimension d'un espace vectoriel

#### Exercice 3.23

Dans  $E = \mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x = y \text{ et } x - y + t = 0\}$$

- Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et déterminer une base de  $F$ .
- Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .
- Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

**Solution :**

- On a  $F = \{(x, y, z, t) \in E; x = y \text{ et } x - y + t = 0\} = \{(x, x, z, 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(u, v)$  avec  $u = (1, 1, 0, 0)$  et  $v = (0, 0, 1, 0)$ . Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. En conclusion,  $(u, v)$  est une base de  $F$  et  $\dim F = 2$ .
- Introduisons les vecteurs  $w = (1, 0, 0, 0)$  et  $W = (0, 0, 0, 1)$ . On montre facilement que la famille  $(u, v, w, W)$  est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^4$ , c'est une base de  $\mathbb{R}^4$  et si  $G = \operatorname{Vect}(w, W)$  alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
- Ce supplémentaire n'est bien entendu pas unique. On montre de la même façon que précédemment que, par exemple,  $G' = \operatorname{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$  est un autre supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

#### Exercice 3.24

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels tels que  $\dim E = n$  et  $\dim F = p$ . Dire, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de  $f$  :

- L'image de toute famille libre de  $E$  par  $f$  est libre
- $\operatorname{Im} f = F$
- L'image d'une base de  $E$  par  $f$  est génératrice de  $F$ .
- $\operatorname{rg} f = n$ .
- L'image d'une base de  $E$  par  $f$  est libre.
- $\operatorname{rg} f = p$ .
- L'image d'une base de  $E$  par  $f$  est une base de  $F$ .
- L'image de toute famille génératrice de  $E$  par  $f$  est génératrice de  $F$ .
- $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), \quad g \circ f = \operatorname{id}_E$
- $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), \quad f \circ g = \operatorname{id}_F$

**Solution :**

- Supposons que l'image de toute famille libre est libre. Montrons que  $f$  est injective. Considérons une base  $e$  de  $E$  et un vecteur  $x \in E$  tel que  $f(x) = 0$ . Notons  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $e$ . On a donc :  $0 = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ . Mais la famille  $e = (e_1, \dots, e_n)$  étant libre, il en est de même de la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . L'égalité précédente n'est donc vraie que si  $x_1 = \dots = x_n = 0$  et alors  $x = 0$ . On a ainsi montré que  $\operatorname{Ker} f = \{0\}$  et que  $f$  est injective.
- Si  $\operatorname{Im} f = F$  alors  $f$  est surjective.
- Si l'image d'une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  par  $f$  est génératrice de  $F$  alors montrons que  $f$  est surjective. Soit  $y \in F$ . La famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est donc génératrice de  $F$  et il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tels que  $y = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$ . Par conséquent,  $y = f(x)$  avec  $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$  et  $f$  est bien surjective.
- Si  $\operatorname{rg} f = n$  alors  $f$  est injective. En effet, d'après la formule du rang, on a :  $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$  et il vient que  $\dim \operatorname{Ker} f = 0$  c'est-à-dire que  $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ .
- Si l'image d'une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  par  $f$  est libre dans  $F$  alors montrons que  $f$  est injective. Soit  $x \in E$  tel que  $f(x) = 0$  et soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $E$ . Alors  $0 = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ . On termine alors comme dans la première question et on montre que  $x = 0$  c'est-à-dire que  $f$  est injective.



- Si  $\text{rg } f = p$  alors par définition du rang d'une application linéaire,  $\dim \text{Im } f = p = \dim F$  et donc  $\text{Im } f = F$ . On prouve ainsi que  $f$  est surjective.
- Si l'image d'une base de  $E$  par  $f$  est une base de  $F$  alors en appliquant les résultats des questions 3) et 5), il vient que  $f$  est bijective.
- Si l'image de toute famille de  $E$  par  $f$  est génératrice de  $F$  alors en particulier l'image d'une base de  $E$  est génératrice de  $F$  et appliquant la question 3,  $f$  est surjective.
- Si il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $g \circ f = \text{id}_E$  alors  $g$  est surjective et  $f$  injective. Pour que  $f$  soit surjective, il faudrait supposer de plus que  $\dim F = \dim E$ .
- Si il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $f \circ g = \text{id}_F$  alors  $f$  est surjective et  $g$  injective. Pour que  $f$  soit injective, il faudrait supposer de plus que  $\dim F = \dim E$ .

### Exercice 3.25

Soit l'espace vectoriel  $E$  des polynômes à coefficients réels de degré  $\leq 4$ . On considère l'ensemble

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$$

- Montrer que  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, déterminer une base de  $F$  et préciser sa dimension.
- Montrer que le sous-espace vectoriel  $G = \text{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

### Solution :

- Déterminons  $F$ . Soit  $P \in F$ . Puisque  $P(0) = P'(0) = 0$ , 0 est racine double (au moins) de  $P$ . Donc  $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = X^2 Q$ . En examinant les degrés, on obtient que  $\deg Q \leq 2$ . Donc  $Q = aX^2 + bX + c$ . Alors  $Q' = 2aX + b$ . Comme  $P' = 2XQ + X^2 Q'$ , et  $P'(1) = 0$ , on trouve que  $4a + 3b + 2c = 0$ . Donc  $P = X^2(aX^2 + bX - 2a - \frac{3}{2}b)$ . On vérifie réciproquement qu'un polynôme de cette forme est dans  $F$ . Donc

$$F = \{aX^4 + bX^3 - (2a + \frac{3}{2}b)X^2; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^4 - 2X^2) + b(X^3 - \frac{3}{2}X^2); (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(P_1, P_2)$$

où  $P_1 = X^4 - 2X^2$  et  $P_2 = X^3 - \frac{3}{2}X^2$ . On vérifie que  $(P_1, P_2)$  est une famille libre (degrés distincts). C'est donc une base de  $F$  et alors  $\dim F = 2$ .

- On vérifie que  $(1, X, 1 + X + X^2)$  est une famille libre (degrés étagés). C'est donc une base de  $G$  et alors  $\dim G = 3$ . On montre ensuite que  $F \cap G = \{0\}$ . Soit  $P \in F \cap G$ . Alors comme  $P \in G$ , il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $P = a + bX + c(1 + X + X^2)$ . Mais comme  $P \in F$ , on a aussi  $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$  et on aboutit au système
 
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases}$$
 donc l'unique solution est le triplet nul. Donc  $P = 0$  et  $F$  et  $G$  sont bien en somme directe. Puisque  $\dim E = 5 = \dim F + \dim G$ , d'après les cours,  $E = F \oplus G$ .

### Exercice 3.26

On considère l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longrightarrow & P + P' + P'' \end{cases}$$

- Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est injectif.
- Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est surjectif.

**Indication :** Pour montrer la surjectivité, étudier la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  qui est un espace de dimension finie.

### Solution :

- Soit un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P + P' + P'' = 0$ , soit  $P = -(P' + P'')$ . Si l'on suppose que  $P \neq 0$ , on a  $\deg P \leq \deg P - 1$ , une absurdité. Donc  $\varphi$  est injective.
- Soit un entier  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $\varphi_n$  la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Alors, si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\varphi_n(P) = P + P' + P'' \in \mathbb{R}_n[X]$  car  $\deg(\varphi_n(P)) \leq \max(\deg P, \deg P', \deg P'') \leq n$ . Donc  $\varphi_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  injectif, donc surjectif, car  $\mathbb{R}_n[X]$  est un espace de dimension finie  $n + 1$ . Soit alors  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . Notons  $n = \deg P$ . Alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et donc  $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\varphi_n(Q) = P$ . Mais alors  $\varphi(Q) = P$  et on a donc montré que  $\varphi$  est surjective !

### Solution :

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = e^{x^2 \ln x}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  par opérations sur les fonctions dérivables.  $f$  est par ailleurs clairement dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0. Si  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $\Delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x} \underset{\sim}{\sim} x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  car  $x^2 \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Donc  $f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$ . Il est clair que  $f$  est dérivable à gauche en 0 et que  $f'_g(0) = 0$ .  $f$  est donc dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ . En résumé,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  par opérations sur les fonctions continues. De plus, si  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $f'(x) = (2x \ln x + x) e^{x^2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  par opérations sur les limites. Il est par ailleurs clair que si  $x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ .  $f'$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .
- $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  par opérations sur les fonctions dérivables. En  $0^+$  :

$$\Delta(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{(2x \ln x + x) e^{x^2 \ln x}}{x} = (2 \ln x + 1) e^{x^2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

par opérations sur les limites et car  $x^2 \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .  $f'$  n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

### Exercice 3.28

Soit

$$f : \begin{cases} [\frac{\pi}{2}, \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

- Vérifier que  $f$  réalise une bijection de  $[\frac{\pi}{2}, \pi[$  sur  $]1, +\infty[$ .
- Sans calculer  $f^{-1}$ , déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

### Solution :

- La fonction  $\sin : [\frac{\pi}{2}, \pi[ \rightarrow ]0, 1]$  est strictement décroissante et la fonction  $x \mapsto 1/x$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$ . Donc par utilisation de la règle des signes pour la composition des fonctions,  $f$  est strictement croissante sur  $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ . On en déduit que  $f$  réalise une bijection de  $I = ]0, 1]$  sur  $J = f(I)$ . Par opération sur les fonctions continues,  $f$  est continue sur  $I$  et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} +\infty$  et que  $f(\pi/2) = 1$ , on en déduit que  $J = ]1, +\infty[$ .
- $f$  est dérivable sur  $I$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $I$ . De plus si  $x \in I$ ,  $f'(x) = -\cos x / \sin^2 x$ . On remarque que  $f'$  ne s'annule qu'en  $\pi/2$ . Donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ . De plus, pour tout  $y \in ]1, +\infty[$  :

$$f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{\sin^2 f^{-1}(y)}{\cos f^{-1}(y)}$$

Mais comme  $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1^+} \pi/2^+$ , on en déduit que  $f^{-1}'(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1^+} -\infty$  et donc  $f^{-1}$  est, d'après le théorème du prolongement dérivable, non dérivable en 1. En conclusion  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ .

### Exercice 3.29

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et telle que  $f'$  ne s'annule pas. Prouver que  $f$  ne peut être périodique.

**Solution :** Raisonnons par l'absurde. Supposons que  $f$  est périodique et notons  $T > 0$  sa période. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b = a + T$ . La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $[a, b]$ . De plus  $f(b) = f(a + T) = f(a)$ . On peut alors appliquer le théorème de Rolle à  $f$  sur le segment  $[a, b]$ . On en déduit que  $f'$  s'annule en un point de  $[a, b]$  ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

### Exercice 3.30

L'objet de cet exercice est de prouver la divergence vers  $+\infty$  de la série harmonique. Cette dernière est la suite de terme général :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

- En déduire que la suite  $(H_n)$  diverge vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Solution :

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On va appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $\ln$  sur le segment  $[n, n+1]$ . On a :

- $\ln$  est continue sur  $[n, n+1]$ .
- $\ln$  est dérivable sur  $]n, n+1[$ .

## 3.10 Dérivabilité

### Exercice 3.27

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} (x^x)^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Vérifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'$ .
- La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?
- La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

3. Pour tout  $x \in ]n, n+1[$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq f'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$  car  $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$  est décroissante.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Appliquant l'inégalité précédente, on obtient, pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$  et donc :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

car cette dernière somme est télescopique. On applique alors le théorème des gendarmes, comme  $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , on en déduit que la suite  $(H_n)$  est divergente.

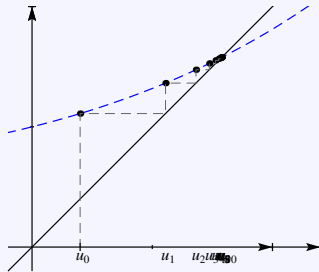
### Exercice 3.31

On considère l'application  $f$  et la suite  $(u_n)$  définies par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x}{x+2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Montrer que l'intervalle  $]0, 1[$  est stable par  $f$ .
- En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0, 1[$  (et donc que  $(u_n)$  est bien définie).
- Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ .
- Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$ .
- Conclure.
- Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

#### Solution :



- La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme quotient de telles fonctions. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(1+x)}{(2+x)^2}$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f(0) = 1/2$  et que  $f(1) = e/3 < 1$  on en déduit que  $f(]0, 1[) \subset ]0, 1[$ .
- Par définition,  $u_0 \in ]0, 1[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $u_n \in ]0, 1[$ . Comme  $]0, 1[$  est stable par  $f$ , il vient que  $u_{n+1} = f(u_n) \in ]0, 1[$ . On prouve ainsi la propriété par récurrence. On a de plus clairement pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$  donc  $(u_n)$  est bien définie.
- Introduisons la fonction

$$\theta : \begin{cases} ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - x(x+2) \end{cases}$$

Par opérations sur les fonctions continues,  $\theta$  est continue sur  $]0, 1[$ . De plus,  $f(0) = 1 > 0$  et  $f(1) = e - 3 < 0$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\theta$  admet un zéro sur  $]0, 1[$ . On montre facilement que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $\theta'(x) = e^x - 2 - 2x$  et  $\theta''(x) = e^x - 2$ . Donc sur  $]0, 1[$ ,  $\theta''$  est strictement négative et  $\theta'$  est strictement décroissante. Comme  $\theta'(0) = -1$ , sur  $]0, 1[$ ,  $\theta'$  est strictement négative et  $\theta$  est strictement décroissante. On peut alors affirmer que le zéro de  $f$  sur  $]0, 1[$  est unique. On le note  $\alpha$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[u_{n-1}, \alpha]$  et dérivable sur  $]u_{n-1}, \alpha[$ . D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|u_n - \alpha| \leq \sup_{x \in ]0, 1[} |f'(x)| |u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{2e}{9} |u_{n-1} - \alpha|$$

car  $f'$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ . Par une récurrence facile, on en déduit que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Mais comme  $u_0, \alpha \in ]0, 1[$ , on a :  $|u_0 - \alpha| \leq 1$  et on obtient l'inégalité proposée.

5. On déduit facilement de cette dernière inégalité et du théorème des gendarmes que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

6. On utilise l'inégalité précédente. On cherche pour quels valeurs de  $n$ ,  $(2e/9)^n \leq 10^{-3}$ . On passe au logarithme et on trouve  $n \geq \frac{3 \ln 10}{2 \ln 3 - \ln 2 - 1} \approx 13,7$ . Donc il suffit de calculer  $u_{14}$  pour connaître  $\alpha$  à la précision requise. On trouve  $\alpha \approx 0,789$  à  $10^{-3}$  près. Ceci est valable quelque soit la valeur prise au départ pour  $u_0$  !

### 3.11 Matrices - Systèmes linéaires - Déterminants

#### Exercice 3.32

Calculer, sous forme factorisée :

$$1. \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(appelé déterminant de Vandermonde).

$$2. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad 6. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

où  $a, b, c$  sont trois réels.

#### Solution :

$$1. \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc \text{ par application de la règle de Sarrus.}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c)$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2)$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2 - a^2 \\ 0 & c-a & c^2 - a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$6. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3} \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \quad -2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$-2abc(b-a)(c-a)(c-b)$  car on reconnaît un déterminant de Vandermonde.

$$7. \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & 2 \cos \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2} & -2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2} \\ 0 & 2 \cos \frac{c+a}{2} \sin \frac{c-a}{2} & -2 \sin \frac{c+a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \end{vmatrix} =$$

$$-4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \cos \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2} & \sin \frac{b+a}{2} \\ 0 & \cos \frac{c+a}{2} \sin \frac{c-a}{2} & \sin \frac{c+a}{2} \end{vmatrix} =$$

$$-4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \left( \sin \frac{c+a}{2} \cos \frac{b+a}{2} - \sin \frac{b+a}{2} \cos \frac{c+a}{2} \right) =$$

$$-4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \left( \frac{c+a}{2} - \frac{b+a}{2} \right) = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{c-b}{2}$$

**Exercice 3.33** Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix}$$

**Solution :** Ajouter toutes les colonnes à la première :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$$

On trouve alors un déterminant triangulaire :  $\Delta = (-1)^{n-1}(n-1)$ .

**Exercice 3.34** Calculer le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x+1) & 1 & \dots & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & \dots & \dots & \dots & (x+n) \end{vmatrix}$$

**Solution :** Retrancher la première colonne à toutes les autres :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$$

On remarque ensuite que dans les  $n-1$  dernières colonnes, la somme de tous les éléments vaut 0. Ajouter donc toutes les lignes à la première. On se ramène à un déterminant triangulaire :  $\Delta = x^{n-1} \left( x + \frac{n(n+1)}{2} \right)$ .

**Exercice 3.35** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout  $1 \leq k \leq n$  on a

$$S_k = \sum_{i=1}^k i$$

**Solution :** Faire  $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ . On trouve

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \dots & \dots & S_1 \\ 2 & \dots & \dots & \dots & 2 \\ & 3 & \dots & \dots & 3 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & (0) & \ddots & \vdots \\ & & & & & n \end{vmatrix} = n!$$

**Exercice 3.36**

On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A^2 - 2A - I_2 = 0$ . On dit que  $X^2 - 2X - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.
3. Retrouver ce résultat par un calcul direct.

**Solution :**

1. On montre par un calcul direct que  $A^2 - 2A - I_2 = 0$ .
2. L'égalité précédente amène :  $A(A - 2I_2) = I_2$ .  $A$  est donc inversible et sa matrice inverse est :  $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$
3. On retrouve ce résultat en utilisant la comatrice ou en passant par un système.

**Exercice 3.37**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $A - I_3$  est nilpotente d'ordre 3 (c'est-à-dire que  $(A - I_3)^2 \neq 0$  et que  $(A - I_3)^3 = 0$ )
2. En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solution :**

1. Par un calcul direct, on montre que  $B = A - I_3$  vérifie  $B^3 = 0$  et  $B^2 \neq 0$ .
2. Utilisant la formule du binôme, ce qui est valide car  $I_3 \times B = B \times I_3$ , on obtient, pour  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-2) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable si  $n = 0, 1, 2$ .

**Exercice 3.38**

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $e$ , on considère la famille de vecteurs  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  donnés par  $\epsilon_1 = (1, 0, 2)$ ,  $\epsilon_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\epsilon_3 = (1, 0, 1)$ . Posons  $F = \text{Vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  et  $G = \text{Vect}(\epsilon_3)$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ . Donner une base de  $E$  adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.
2. Écrire, dans la base  $e$ , la matrice de la projection  $p$  de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
3. En déduire les matrices, dans la base  $e$  de :
  - (a) la projection  $p'$  de  $E$  sur  $G$  parallèlement à  $F$ .
  - (b) la symétrie  $s$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Solution :**

1. On a  $\text{Mat}_e(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\det A = -1$ . La famille  $\epsilon$  est donc une base de  $E$ .

On en déduit que  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  forme une base de  $F$  et que  $(\epsilon_3)$  forme une base de  $G$ . Ces deux sous-espaces sont de plus clairement supplémentaires et la base  $\epsilon$  est adaptée à cette supplémentarité.

2. On a :  $\text{Mat}_\epsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et, en utilisant les formules de changement de base  $\text{Mat}_e(p) = P_{\epsilon \rightarrow e} \text{Mat}_\epsilon(p) P_{e \rightarrow \epsilon}$  avec  $P_{e \rightarrow \epsilon} = \text{Mat}_e(\epsilon)$  et  $P_{\epsilon \rightarrow e} = (P_{e \rightarrow \epsilon})^{-1}$ .

Après calculs, on trouve  $\text{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) On sait que  $p + p' = \text{id}_E$ . Donc  $\text{Mat}_e(p') = I_3 - \text{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) On sait aussi que  $s = 2p - \text{id}_E$ . Donc  $\text{Mat}_e(s) = 2\text{Mat}_e(p) - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.39**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $e = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$

représenté dans la base  $e$  par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que la famille  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  avec  $\epsilon_1 = (-1, 1, -1)$ ,  $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$  et  $\epsilon_3 = (0, 1, 1)$  est une base de  $E$ . Écrire la matrice de passage de la base  $e$  à la base  $\epsilon$ .
- Calculer la matrice de  $u$  dans la base  $e$ .
- En déduire la matrice de  $u^n$  dans la base  $e$ .

**Solution :**

1. Comme  $\text{Mat}_e(\epsilon) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $\det(\text{Mat}_e(\epsilon)) = 1$ , la famille  $f$  est de rang 3 et forme donc une base de  $E$ . De plus  $P_{e \rightarrow \epsilon} = \text{Mat}_e(\epsilon)$ .

2. Appliquant les formules de changement de bases :  $\text{Mat}_\epsilon(u) = P_{\epsilon \rightarrow e} \text{Mat}_e(u) P_{e \rightarrow \epsilon}$

avec  $P_{\epsilon \rightarrow e} = (P_{e \rightarrow \epsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{Mat}_e(u) = A$ . On en déduit que

$$\text{Mat}_\epsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Notons  $P = P_{e \rightarrow \epsilon}$  et  $A_0 = \text{Mat}_e(u)$ . On a donc :  $\text{Mat}_e(u^n) = A^n = (PA_0P^{-1})^n =$

$$PA_0^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 + 2^n & 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.40** ♥ **Extrait des petites Mines 2006**

I-Étude de deux ensembles de matrices

Soit  $(x, y)$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $M_{x,y}$  la matrice

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$$

Soit  $\Sigma$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tel que  $\Sigma = \{M_{x,y} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- Quelle relation doivent vérifier  $x$  et  $y$  pour que la matrice  $M_{x,y}$  ne soit pas inversible ? Calculer le produit  $M_{x,y} \times M_{-x,-y}$ . En déduire l'inverse de  $M_{x,y}$  lorsqu'il existe.
- $\Sigma$  est-il un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  ? On justifiera sa réponse.  
Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $J = \{A + M_{x,y} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- Montrer que  $J$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .
- Quelle est la dimension de  $J$  ? Déterminer une base de  $J$ .
- Montrer que la loi  $\times$  est interne dans  $J$ .

II - Étude d'une application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit  $B$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Soit  $\varphi_B$  l'application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui à la matrice  $X$  associe la matrice  $\varphi_B(X) = B \times X$ .

- Montrer que  $\varphi_B$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .
- On suppose dans cette question que  $B = M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

(a)  $\varphi_B$  est-elle surjective ? Bijective ?

(b) Déterminer la matrice de  $\varphi_B$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On rappelle que la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est constituée des matrices  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On prend dans cette question  $B = M_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .  $\varphi_B$  est-elle surjective ? Bijective ?

**Solution :** I.

1.  $M_{x,y}$  n'est pas inversible lorsque  $x^2 - y^2 - 2y = 0$ . Dans les autres cas,  $M_{x,y}$  est inversible dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , mais peut-être pas dans  $\Sigma$ .

$M_{x,y} \times M_{-x,-y} = (y^2 - x^2 + 2y)I_2$ . Donc, lorsque  $x^2 - y^2 - 2y \neq 0$ ,  $M_{x,y}^{-1} = M\left(-\frac{x}{y^2 - x^2 + 2y}, \frac{y}{y^2 - x^2 + 2y}\right)$  qui appartient bien à  $\Sigma$ .

2. La matrice nulle n'appartient pas à  $\Sigma$ . Donc  $\Sigma$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

3. L'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow E \\ (x, y) & \rightarrow A + M_{x,y} \end{cases}$  est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul.  $\varphi$  est donc bijective.

4. Une base de  $E$  est donc, par exemple,  $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$ .  $J$  est de dimension 2.

5.  $\varphi(x, y) \cdot \varphi(x', y') = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - xy' - yx' + yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' + xy' + yx' + yy' \end{pmatrix} = \varphi(xx' + yy', xy' + yx')$ . C'est bien dire que la loi  $\times$  est interne dans  $J$ .

II.

1. On a  $B(\lambda X + \mu Y) = \lambda BX + \mu BY$ . De plus  $BX \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  $\varphi_B$  est donc un endomorphisme de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

2. (a) On a  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\varphi_{B^{-1}}(\varphi_B(X)) = B^{-1} \cdot \varphi_B(X) = B^{-1}BX = X$ . On a donc  $\varphi_{B^{-1}} = (\varphi_B)^{-1}$ .

(b) On a  $BE_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{2,1}$ . On obtient ainsi la pre-

mière colonne de la matrice de  $\varphi_B$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On trouve de la même façon les autres colonnes :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Cette fois  $B$  n'est pas inversible. Puisqu'il n'est pas question d'obtenir une solution à  $\varphi_B(X) = I_2$ ,  $\varphi_B$  n'est pas surjective et donc pas bijective.

**3.12 Intégration**

**Exercice 3.41** ♥♥

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\text{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$  On considère la fonction  $f$  donnée

par  $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est impaire.
- Déterminer la dérivée de  $f$  et en déduire ses variations.
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Tracer la tangente à l'origine, puis la courbe représentative de  $f$ .

**Solution :**

1.  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus,  $\frac{\text{sh} x}{x} \rightarrow 1$  donc  $\varphi$  est aussi continue en 0. Par application du théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que  $\varphi$  admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = F(2x) - F(x)$ .  $f$  est donc définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f$  est impaire : soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\text{sh} t}{t} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x -\frac{\text{sh} u}{u} du = -f(x)$  par imparité de  $\text{sh}$ .

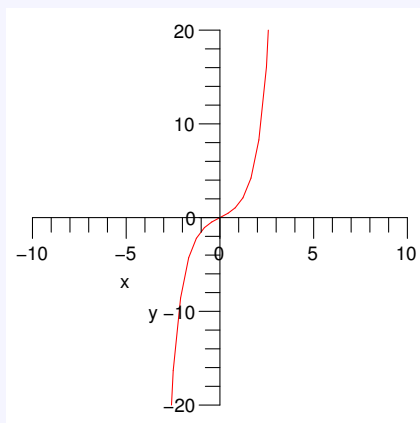
3.  $f$  est strictement croissante. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2\varphi(2x) -$

$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\text{sh} 2x - \text{sh} x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Comme  $\text{sh}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4. Soit  $x > 0$  et soit  $t \in [x, 2x]$ . On a :  $\frac{\text{sh} t}{t} \geq \frac{\text{sh} x}{x}$  car  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc :  $f(x) = \int_0^x \frac{\text{sh} t}{t} dt \geq \text{sh} x \frac{x}{x+\infty} \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Par symétrie, on a aussi :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ .

5. On montre de plus facilement que  $f$  admet la bissectrice principale comme tangente en 0.



**Exercice 3.42** ♥

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$$

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  ;

- Trouver une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$  ;
- En déduire la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

**Solution :**

- Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\frac{t^n}{n!} e^{1-t} \leq \frac{e}{n!}$ . Donc :

$$0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 \frac{e}{n!} dt = \frac{e}{n!}.$$

Par le théorème des gendarmes,  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- On effectue une intégration par parties :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-t} dt = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

donc  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ .

- Par télescopage, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = I_0 - I_{n+1} + 1$$

et donc que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_0 + 1$ . Comme  $I_0 = e - 1$ ,  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ .

### Exercice 3.43

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

**Solution :** La fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$ . On montre facilement que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$ . On applique alors la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{(-1)^n (n)!}{(1+t)^{n+1}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} dt \right| = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^n dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}} dt = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et on conclut comme dans l'exercice précédent.

### Exercice 3.44

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

- Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

- En déduire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , une expression de  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$  à l'aide de factorielles.

- Montrer que  $(I_n)$  est décroissante et positive. En déduire que  $(I_n)$  est convergente.

- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}}.$$

- Montrer que  $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}$ .

- Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ .

- En déduire que  $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

**Solution :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \\ &\stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left( x + \frac{\pi}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \end{aligned}$$

- On vérifie facilement que  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = 1$ .

- En effectuant une intégration par parties, on montre que :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin^{n+1} t dt \\ &= \left[ -\cos t \cdot \sin^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cdot \sin^n t dt \end{aligned}$$

donc  $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$  d'où  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$

- D'après les deux questions précédentes et grâce à un raisonnement par récurrence, on montre que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- Pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin^n t \geq \sin^{n+1} t$  donc  $I_n \geq I_{n+1}$  et  $(I_n)$  est décroissante. Par ailleurs :  $\sin^n t \geq 0$  donc  $I_n \geq 0$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante et minorée. Par application du théorème de la limite monotone,  $(I_n)$  est convergente.

- $(I_n)$  étant décroissante, il vient que  $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$  ce qui s'écrit aussi :  $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}}$ .

- D'après les questions 3 et 5, on obtient :

$$1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$$

mais  $\frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc, par application du théorème des gendarmes,

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et donc} \quad I_{n+2} \sim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} \quad \text{ou encore} \quad I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}.$$

- En utilisant les expressions trouvées dans la question 4, on montre que :  $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ .

- Par application des deux questions précédentes et par opérations sur les équivalents :

$$I_n = \sqrt{I_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{I_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

## 3.13 Développements limités

### Exercice 3.45

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

**Solution :** La fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$ . On montre facilement que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$ . On applique alors la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{(-1)^n (n)!}{(1+t)^{n+1}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} dt \right| = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^n dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}} dt = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et on conclut comme dans l'exercice précédent.

### Exercice 3.46

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$

**Solution :**

1.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} &\stackrel{X=x-1}{=} \frac{\ln(1 + 4X + 2X^2)}{\tan X} \\ &= \frac{4X + o(X)}{X + o(X)} \\ &= \frac{4 + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\xrightarrow{X \rightarrow 0} \boxed{4} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\stackrel{X=\frac{1}{x}}{=} \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} \ln(1 + X) \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} \left( X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} + o(X) \\ &\xrightarrow{X \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x - \arctan x}{x^3} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} + o(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} &= \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin^3 x - x^3}{x^6} \\ &= \frac{-\frac{x^5}{2} + o(x^6)}{x^6} \\ &= -\frac{1}{2x} + o(1) \end{aligned}$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = -\infty$  tandis que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty$

5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \left( \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} &= \left( \frac{(1+x \ln 1) + (1+x \ln 2) + \dots + (1+x \ln n) + o(x)}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \left( \frac{n + (\ln 1 + \dots + \ln n)x + o(x)}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \left( 1 + \ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x + o(x) \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln\left(1 + \ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x + o(x)\right)}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x + o(x)}{x}} \\ &= e^{\left(\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right) + o(1)\right)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)} = \boxed{n!^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

**Exercice 3.47**

On considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ .

- Montrer que la fonction  $f$  peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer une équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0 puis étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport cette tangente.

**Solution :**

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  par opération sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrons que  $f$  est prolongeable en 0 en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0. Pour ce faire, calculons le développement limité de  $f$  en 0. Dans l'objectif d'étudier la position du graphe de  $f$  relativement à sa tangente en 0, poussons ce développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) \right] \end{aligned}$$

On peut donc prolonger  $f$  par continuité et dérivabilité en 0 en posant  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

Il peut être utile de le vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}{x} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + o(x) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

Reste à montrer que  $f'$  est continue en 0. On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x-1)e^x + 1}{(e^x - 1)^2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En résumé,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Une équation de la tangente en 0 au graphe de  $f$  est  $y = -\frac{x}{2} + 1$ . De plus :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right) &= \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{12} \left(1 + o(1)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{12} \end{aligned}$$

La quantité  $f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right)$  est donc positive dans un voisinage de 0. On en déduit que le graphe de  $f$  est situé au dessus de sa tangente en 0 dans un voisinage de 0.

**Exercice 3.48** ♥

Considérons la fonction définie par l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

1. Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer le DL(0, 10) de la fonction  $f$ .
3. Déterminer un développement asymptotique de la fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$  à la précision  $1/x^{10}$ .

**Solution :**

1. La fonction  $g : t \mapsto 1/\sqrt{1+t^4}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème fondamental, elle admet une primitive  $G$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = G(x^2) - G(x).$$

On en déduit que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Il vient alors que fonction  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^9$  sur  $\mathbb{R}$  et en primitivant le DL(0, 9) de  $f'$ , on obtient le DL(0, 10) de  $f$  :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10}).$$

3. Posons ensuite  $X = \frac{1}{x}$ . On a

$$f(X) = \int_{1/x}^{1/x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_x^{x^2} \frac{-1}{u^2} \frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}} du = -f(x)$$

en effectuant le changement de variables  $u = \frac{1}{t}$ . On trouve qu'au voisinage de  $+\infty$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{24x^9} + \frac{1}{10x^{10}} + o(x^{-10})$$

**3.14 Polynômes**

**Exercice 3.49** ♥

Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant :

1.  $P - XP' = X$
2.  $P^2 = 9P$
3.  $(X^2 + 4)P' = 6P$ .

**Solution :**

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Supposons que  $P - XP' = X$ . Alors  $P \neq 0$ . Notons  $n = \deg P$ . Comme  $\deg(P - XP') \leq n$ , il faut que  $n \geq 1$ . Mais si l'on cherche le coefficient de  $X^n$  dans  $P - XP'$ , on trouve  $(n-1)a_n$ . Par conséquent, si  $n = 1$ ,  $\deg(P - XP') \leq 0$  et ce n'est pas possible, et si  $n \geq 2$ ,  $\deg(P - XP') = n$ , ce qui n'est pas possible non plus. Il n'existe donc aucun polynôme vérifiant la propriété.
2. Le polynôme nul est solution de l'équation. Supposons que  $P \in \mathbb{R}[X]$  soit solution de l'équation. Alors :  $2(\deg P - 1) = \deg P$  et donc  $\deg P = 1$ . On a alors  $P = aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mais  $a$  et  $b$  doivent vérifier :  $a^2 = 9^p aX + b$  ce qui n'est possible que si  $a = b = 0$ . La seule solution de l'équation est donc le polynôme nul.
3. Le polynôme nul est solution de l'équation, c'est même le seul polynôme de degré  $\leq 1$  solution de l'équation. Supposons que  $P \in \mathbb{R}[X]$  soit solution et de degré  $n \geq 2$ . Raisonnant sur le monôme de degré  $n$  dans  $P$ , on obtient :  $n(n-1) = 6$  ce qui donne  $n = 3$ . On vérifie par ailleurs que les seuls polynômes de la forme  $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$  solutions de l'équation sont ceux de la forme :  $aX^3 + 4aX$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.50** ♥

Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  vérifiant :

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 2$$

**Solution :** 0 est une racine simple de  $P$  et 1 est une racine au moins double de  $P$ . Donc  $P$  est de la forme  $P = X(X-1)^2(aX+b)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Comme  $P'(0) = 2$ , on obtient  $b = 2$  et comme  $P$  est unitaire, on a :  $a = 1$ . Donc  $P = X(X-1)^2(X+2)$ .

**Exercice 3.51** ♥

On considère le polynôme

$$P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple.

**Solution :** Supposons que  $P_n$  admette une racine  $\alpha \in \mathbb{C}$  d'ordre au moins deux. Alors  $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$ . Mais

$$P_n(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \text{ et } P_n'(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc par soustraction de ces deux égalités, on a  $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$  et forcément  $\alpha = 0$ . Mais  $P_n(0) = 1$  et on aboutit à une contradiction.

**Exercice 3.52** ♥♥

On définit par récurrence la suite de polynômes  $(P_n)$  :

$$\begin{cases} P_0 = 2, & P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, & P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Déterminer le degré et le coefficient du terme dominant de  $P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

4. En déduire une expression simple de  $P_n(2 \cos \theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .
5. Déterminer les racines de  $P_n$  et en déduire une factorisation de  $P_n$ .

**Solution :**

1.  $P_2 = X^2 - 2$ ,  $P_3 = X^3 - 3X$ .
2. Par récurrence, montrons que pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient du terme dominant de  $P_n$  est 1 et  $\deg P_n = n$ . La propriété est clairement vraie aux rangs 1 et 2. Soit  $n \geq 2$ . Supposons que le coefficient du terme dominant de  $P_n$  et de  $P_{n-1}$  est 1 et que  $\deg P_n = n$ ,  $\deg P_{n-1} = n-1$ . Comme  $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$ , il est clair que  $\deg P_{n+1} = \deg P_n + 1 = n+1$  et que le coefficient du terme dominant de  $P_n$  est 1. La propriété est prouvée par récurrence.
3. Démontrons à nouveau cette propriété par récurrence : Celle-ci est vraie au rang 0. Soit  $n \in \mathbb{N}$  Supposons que la propriété est vraie au rang  $n$  et au rang  $n+1$  et prouvons-la au rang  $n+2$  :

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

La propriété est alors prouvée par récurrence.

4. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Par application de la question précédente et utilisation des relations d'Euler :

$$\begin{aligned} P_n(2 \cos \theta) &= P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) \\ &= e^{in\theta} + \frac{1}{e^{in\theta}} \\ &= \boxed{2 \cos(n\theta)} \end{aligned}$$

5. La question précédente nous invite à chercher les racines de  $P_n$  sous la forme  $z = 2 \cos \theta$ . Remarquons que si  $z \in [-2, 2]$ , il existe un unique  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $z = 2 \cos \theta$ . Considérons donc  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $P_n(2 \cos \theta) = 0$  c'est-à-dire  $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  avec  $k \in [0, n-1]$ . Les  $n$  nombres  $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  pour  $k \in [0, n-1]$  sont tous distincts et comme  $\deg = n$ , ce sont les  $n$  racines de  $P_n$ . Le coefficient du terme dominant de  $P$  étant 1 on obtient :

$$P = \prod_{k=1}^n \left(X - 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

**Exercice 3.53** ♥♥♥

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

**Solution :** Il est clair que les racines cubiques de l'unité 1,  $j$  et  $j^2$  sont un triplet de solutions.

Soient trois complexes  $(z_1, z_2, z_3)$  vérifiant les conditions. Ils sont racines du polynôme

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - z_1z_2z_3 = 0$$

Mais puisque  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , et que  $z_1z_2z_3 = 1$ ,

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0.$$

Par conséquent, les complexes  $z_1, z_2, z_3$  sont racines du polynôme  $P(X) = X^3 - 1$ . Ce sont donc les racines cubiques de l'unité :  $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, j, j^2\}$ .

Si on considère les points  $M_k$  d'affixes respectives  $z_k$ , l'égalité  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  se traduit par  $O$  est le centre de gravité de  $M_1M_2M_3$ . Comme on a  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ,  $O$  est aussi le centre du cercle circonscrit. Les médianes sont donc aussi médiatrices, donc  $M_1M_2M_3$  est équilatéral. Quitte à changer la numérotation, il existe  $\alpha$  tel que  $z_k = \exp\left(i\alpha + \frac{2ik\pi}{3}\right)$ . La troisième égalité  $z_1z_2z_3 = 1$  dit alors que  $\alpha^3 = 1$  ce qu'il fallait vérifier.

**Exercice 3.54**

Soit  $A = X^3 + X^2 + X + 1$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Considérons l'application

$$r: \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto r(P) \end{cases}$$

où  $r(P)$  désigne le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $A$ .

1. Montrer que  $r$  est bien définie et que  $r \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Prouver que  $r^2 = r$ . Qu'en déduisez vous ?
3. Déterminer l'image et le noyau de  $r$ .

**Solution :**

1. Soit  $P \in E$ . Par application du théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$  tel que  $P = AQ + R$  et  $\deg R < 3$ . On a donc  $r(P) = R$  et  $r$  est bien définie. Si on considère un autre polynôme  $\tilde{P} \in E$ , il existe un couple  $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in (\mathbb{R}[X])^2$  tel que  $\tilde{P} = A\tilde{Q} + \tilde{R}$  et  $\deg \tilde{R} < 3$ . De plus, pour tout  $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$  :

$$\alpha P + \tilde{\alpha} \tilde{P} = A(\alpha Q + \tilde{\alpha} \tilde{Q}) + (\alpha R + \tilde{\alpha} \tilde{R})$$

et  $\deg(\alpha R + \tilde{\alpha} \tilde{R}) < 3$ . Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de  $\alpha P + \tilde{\alpha} \tilde{P}$  par  $A$  est  $\alpha R + \tilde{\alpha} \tilde{R}$ . On prouve ainsi que  $r(\alpha P + \tilde{\alpha} \tilde{P}) = \alpha r(P) + \tilde{\alpha} r(\tilde{P})$  et donc  $r \in \mathcal{L}(E)$ .

2. Avec les notations de la question précédente,  $r(P) = R$  avec  $\deg R < 3$ . Donc  $R = 0A + R$  et par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne,  $r(R) = R$ . On prouve ainsi que  $r^2 = r$ .  $r$  est donc un projecteur.
3. Il est clair que le noyau de  $r$  est l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui sont divisibles par  $A$ . Il est aussi clair que  $\text{Im } r \subset \mathbb{R}_2[X]$ . Mais si  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  alors  $r(P) = P$  donc on a aussi :  $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Im } r$  et donc  $\text{Im } r = \mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 3.55**

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$\Delta: \begin{cases} \mathbb{C}_{n+1}[X] & \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $\Delta$  est bien définie puis que c'est une application linéaire.
- (b) Déterminer le noyau de  $\Delta$ .
- (c) En déduire que  $\Delta$  est surjective.

2. On considère maintenant  $E = \mathbb{C}[X]$  et

$$\Delta: \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer  $\text{Im } \Delta$ .
- (c) Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

- (d) En déduire que si  $\deg P < n$  alors on a :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$ .

**Solution :**

1. (a) Soit  $P = a_{n+1}X^{n+1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ . Montrons que  $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ . On a :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= (a_{n+1}(X+1)^{n+1} + a_n(X+1)^n + \dots + a_1(X+1) + a_0) - (a_{n+1}X^{n+1} + \dots + a_1X + a_0) \\ &= \left( \begin{matrix} a_{n+1}X^{n+1} + & \dots & \\ \text{termes de degré} \leq n & & \end{matrix} \right) - \left( \begin{matrix} a_{n+1}X^{n+1} + & \dots & \\ \text{termes de degré} \leq n & & \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

donc  $\deg \Delta(P) \leq n$  et  $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ . Par ailleurs, si  $P, Q \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  alors :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha(P(X+1) - P(X)) + \beta(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \alpha \Delta(P) + \beta \Delta(Q) \end{aligned}$$

donc  $\Delta$  est linéaire.

- (b) Soit  $m \geq 1$  et soit  $P = a_m X^m + \dots + a_0$  un polynôme de degré  $m \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$  avec  $m \leq n+1$ . On a donc :  $a_m \neq 0$ . Supposons que  $P \in \text{Ker } \Delta$ . Alors  $P$  vérifie  $P(X+1) = P(X)$  ce qui amène :

$$a_m(X+1)^m + \dots + a_0 = a_m X^m + \dots + a_0.$$

Le coefficient de terme de degré  $m-1$  de  $P(X+1)$  est  $ma_m + a_{m-1}$  et celui de  $P$  est  $a_{m-1}$ . Les deux polynômes étant égaux, il en est de même de leurs coefficients, ce qui amène  $m=0$  car  $a_m \neq 0$ . On en déduit que  $P$  est un polynôme constant. Réciproquement, on vérifie que tout polynôme constant est élément du noyau de  $\Delta$  et donc  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ .

- (c) D'après la formule du rang,  $\dim \text{Im } \Delta = n+1$  et comme  $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$ , il vient  $\text{Im } \Delta = \mathbb{C}_n[X]$ .  $\Delta$  est donc surjective.

2. (a) On montre de la même façon que précédemment que  $\Delta$  est un endomorphisme.

- (b) Montrons que  $\Delta$  est surjective. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $n = \deg P$ . Par application de la partie précédente,  $\Delta|_{\mathbb{C}_{n+1}[X]} : \mathbb{C}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$  est surjective. Comme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  il existe  $Q \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$  tel que  $\Delta(Q) = P$ . On en déduit que  $\Delta$  est surjective et que  $\text{Im } \Delta = \mathbb{C}[X]$ .

- (c) Introduisons l'application  $\delta: \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto P(X+1) \end{cases}$ . On vérifie facilement que  $\delta$  est un endomorphisme de  $E$  et que  $\Delta = \delta - \text{id}$ . De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\delta^k(P(X)) = P(X+k)$ . Comme les endomorphismes  $\delta$  et  $\text{id}$  commutent, la formule du binôme donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Delta^n = (\delta - \text{id})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \delta^k$$

donc pour tout  $P \in E$  :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P(X+k).$$

3. Remarquons que pour tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ . On en déduit que si  $\deg P < n$  alors  $\Delta^n(P) = 0$  et en utilisant la

relation établie dans la question précédente, on obtient :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$

**3.15 Probabilités**

**Exercice 3.56**

Dans une loterie sont vendus  $n$  tickets dont  $g$  sont gagnants. Georges achète  $k$  tickets. Quelle est la probabilité pour que Georges ait au moins un ticket gagnant ?

**Solution :** L'univers  $\Omega$  consiste en l'ensemble des  $K$ -combinaisons d'un ensemble à  $n$  éléments. Notons  $A$  l'événement « au moins un ticket acheté par Georges est gagnant » et calculons la probabilité de l'événement contraire  $\bar{A}$  : « Tous les tickets achetés sont perdants. ».

On a  $\text{Card}(\bar{A}) = \binom{n-g}{k}$  et  $\text{Card}(\Omega) = \binom{n}{k}$  donc

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{n-g}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-g}{n} \frac{n-g-1}{n-1} \dots \frac{n-g-k+1}{n-k+1}$$

**Exercice 3.57**

On range 20 livres au hasard sur une étagère. Quelle est la probabilité que les 7 tomes d'Harry Potter :

1. se retrouvent côte à côte ?
2. se retrouvent côte à côte et dans l'ordre ?

**Solution :** L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des rangement possibles, c'est-à-dire l'ensemble des permutations d'un ensemble à 20 éléments. On a donc  $\text{Card}(\Omega) = 20!$ .

1. Un événement favorable est un rangement de l'étagère dans lequel les 7 tomes d'Harry Potter se retrouvent côte à côte. Il faut choisir la position du premier livre, soit 13 possibilités, puis il faut choisir un rangement des 7 tomes, soit 7! possibilités et enfin il faut choisir la position des 13 livres restants, soit 13! possibilités. Donc si  $F$  est l'événement « les 7 livres de la série se retrouvent côte à côte » alors

$$P(F) = \frac{13 \times 7! \times 13!}{20!}$$



2. On note G l'évènement « les 7 livres de la série se retrouvent côte à côte et dans l'ordre ». Le raisonnement est le même que le précédent si ce n'est qu'on n'a pas à choisir l'ordre des 7 livres. Donc  $P(G) = \frac{13 \times 13!}{20!}$ .

**Exercice 3.58**

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

**Solution :** Notons les différents évènements : Fe : «être femme», Lu : «porter des lunettes», H : «être homme»

Alors on a  $P(Fe) = 0.6$ ,  $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$ ; il s'agit de la probabilité conditionnelle de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a  $P(Lu/H) = 0.5$ . On cherche la probabilité conditionnelle  $P(Fe/Lu)$ . D'après la formule des probabilités totales on a :  $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$  avec  $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$ .

Application numérique :  $P(Lu) = 0.4$ , donc  $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$ . Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

**Exercice 3.59**

Dans une loterie sont vendus n tickets dont g sont gagnants. Georges achète k tickets. Quelle est la probabilité pour que Georges ait au moins un ticket gagnant ?

**Solution :** Notons A l'évènement « au moins un ticket acheté par Georges est gagnant » et calculons la probabilité de l'évènements contraire  $\bar{A}$ . Notons  $T_i$  l'évènement « le ième ticket acheté est perdant ». Il s'agit de calculer  $P(T_1 \cap \dots \cap T_k)$ . On utilise pour ce faire la formule des probabilités composées :

$$P(T_1 \cap \dots \cap T_k) = P(T_1)P_{T_1}(T_2)P_{T_1 \cap T_2}(T_3)P_{T_1 \cap T_2 \cap T_3}(\dots)P_{T_1 \cap \dots \cap T_{k-1}}(T_k) = \frac{n-g}{n} \frac{n-g-1}{n-1} \dots \frac{n-g-k+1}{n-k+1}$$

**Exercice 3.60** Les canards aux hormones

Un éleveur de canard élève trois races différentes : le canard de Barbarie (30%), le canard Nantais (20%) et le canard Mulard (50%). Suite à divers traitements hormonaux accélérateurs de croissance (utilisés sur plusieurs générations de volailles), certains animaux n'ont qu'une seule patte : 10% des canards de Barbarie, 2% des canards Nantais et 25% des canards Mulard. On choisit un canard au hasard.

- Quelle est la probabilité qu'il n'ait qu'une seule patte ?
- Sachant qu'il n'a qu'une seule patte, quelle est la probabilité que ce soit un canard Mulard ? un canard Nantais ?

**Solution :** On note :

- B l'évènement : « l'animal est un canard de Barbarie »,
- N l'évènement : « l'animal est un canard Nantais »,
- M l'évènement : « l'animal est un canard Mulard »,
- D l'évènement : « l'animal a une seule patte ».

1. (B, N, M) est un système complet d'évènements. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(B \cap D) + P(N \cap D) + P(M \cap D) = P(B) \times P_B(D) + P(N) \times P_N(D) + P(M) \times P_M(D)$$

donc

$$P(D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{159}{1000}$$

2. Sachant qu'il n'a qu'une seule patte, la probabilité que ce soit :

- un canard Mulard est  $P_D(M)$  ;
- un canard Nantais est  $P_D(N)$ .

D'après la formule de Bayes, appliquée au système complet d'évènements (M, N, B), on a :

$$P_D(M) = \frac{P_M(D)P(M)}{P_M(D)P(M) + P_N(D)P(N) + P_B(D)P(B)}$$

donc

$$P_D(M) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{50} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{10}} = \frac{125}{159}$$

De même :

$$P_D(N) = \frac{P_N(D)P(N)}{P_M(D)P(M) + P_N(D)P(N) + P_B(D)P(B)}$$

donc

$$P_D(N) = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{50} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{10}} = \frac{4}{159}$$

**Exercice 3.61** Paradoxe du chevalier de Méré

Comparer les probabilités des deux évènements « obtenir au moins un as avec 6 dés » et « obtenir au moins deux as avec 12 dés ».

**Solution :** Soit X le nombre d'as obtenus au terme de 6 jetés successifs d'un dé. La loi de X est la binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  avec  $n = 6$  et  $p = 1/6$ . On a

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^6 = 1 - (1 - \frac{5}{6})^6 \approx 0.67$$

Soit Y le nombre d'as obtenus au terme de 12 jetés successifs d'un même dé. La loi de Y suit cette fois une binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  avec  $n = 12$  et  $p = 1/6$ . Par ailleurs

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1-q)^{12} - 12p(1-q)^{11} \approx 0.62$$

**Exercice 3.62**

Un laboratoire se propose d'analyser le sang d'une population de n individus afin de détecter la présence d'un virus. La probabilité d'être infecté par ce dernier est de p. La probabilité d'être infecté est indépendante de la probabilité qu'une autre personne soit infectée.

Le laboratoire dispose pour cela de deux protocoles :

Protocole 1 : On analyse le sang des n individus.

Protocole 2 : On regroupe les individus par groupe de k (avec k qui divise n).

On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

- Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupe positifs.
- Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le second protocole. Calculer l'espérance de Y en fonction de n, k et p.
- Comparer les deux protocoles pour  $n = 1000$ ,  $k = 10$  et  $p = 0.01$ .

**Solution :**

- Dans un groupe de k individus, le nombre Z d'individus infectés suit une loi binomiale. La variable aléatoire X suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(k, p)$ . Un tel échantillon sera positif dès que  $Z \geq 1$ . La probabilité qu'un groupe soit positif est donc  $1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{k}{0} q^k = 1 - q^k$  avec  $q = 1 - p$ . La probabilité qu'un groupe soit infecté suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - q^k$ . Le nombre X de groupes infectés suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(n/k, 1 - q^k)$ .
- On a  $Y = \frac{n}{k} + kX$  donc  $E(Y) = \frac{n}{k} + kE(X) = \frac{n}{k} + k \times \frac{n}{k} \times (1 - q^k) = \frac{n}{k} (1 + k(1 - q^k))$ .
- 

**3.16 Séries numériques**

**Exercice 3.63**

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

- $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ,  $5. u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ ,
- $u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$ ,
- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ ,  $4. u_n = e - (1 + \frac{1}{n})^n$ ,  $6. u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$ .

**Solution :** Les séries considérées sont toutes à termes positifs

- Comme  $u_n \sim \frac{1}{n}$ , la série diverge par comparaison avec une série de Riemann.
- On a  $u_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} = \frac{1}{e^n} \frac{1 + e^{-2n}}{1 + e^{-4n}}$   $\sim \frac{1}{e^n}$  donc la série converge par comparaison avec une série géométrique.
- On a avec un développement limité  $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{n} (\frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \sim \frac{1}{4n^2}$  donc la série converge.
- On écrit  $u_n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e - e(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{e}{2n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{e}{2n}$  donc la série diverge.
- $u_n = e^{n^2 \ln \frac{n}{n+1}} = e^{-n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{-n^2 (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n}} e^{o(\frac{1}{n})} \sim e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n}}$ . La série converge alors d'après sa comparaison à une série géométrique.
- $u_n \geq 1/n$  donc la série diverge.

**Exercice 3.64**

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

- $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$ ,  $3. u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$ ,  $5. u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$ ,
- $u_n = (\frac{1}{n})^{1+\frac{1}{n}}$ ,  $4. u_n = \frac{1}{n \ln(1 + \frac{1}{n^2})}$ ,  $6. u_n = e^{-\sqrt{n}}$ .

**Solution :** Les séries considérées sont toutes à termes positifs

1. On a  $n^2 u_n = e^{2 \ln n - \ln n \ln n}$  et  $2 \ln n - \ln n \ln n = \ln n (2 - \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  donc  $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et la série converge.
2. On écrit  $nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$  et la série diverge par comparaison à la série de Riemann.
3.  $u_n = e^{-\frac{\ln^2 n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc la série diverge grossièrement.
4.  $u_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$  donc la série converge d'après le critère de Riemann.
5. On a  $nu_n = \frac{n}{(\ln n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Donc à partir d'un certain rang  $nu_n > 1$  et donc  $u_n > 1/n$ . La série est donc divergente.
6. On a  $n^2 u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} \underset{N=\sqrt{n}}{=} N e^{-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par limite usuelle. Donc  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$  et la série converge.

**Solution :** Utilisons l'algorithme de Schmidt pour redresser la base canonique de  $F$ .  $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2$ . On trouve  $\|e_0\| = 1/\sqrt{2}$  donc  $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$ . Ensuite on trouve  $\varepsilon_1 = 6(X - 2/3)$  puis  $\varepsilon_2 = 10\sqrt{6}(X^2 - 6/5X + 9/30)$ . On détermine alors  $p(P) = a_2 \varepsilon_2 + a_1 \varepsilon_1 + a_0 \varepsilon_0$  et les conditions d'orthogonalité donnent :  $a_0 = (P | \varepsilon_0) = (\sqrt{2}/5), a_1 = (P | \varepsilon_1) = 1/5, a_2 = (P | \varepsilon_2) = \sqrt{6}/35$  et alors le projeté orthogonal vaut

$$p(P) = \frac{4}{35} - \frac{6}{7}t + \frac{12}{7}t^2$$

### 3.17 Produit scalaire et espaces euclidiens

**Exercice 3.65**  $\heartsuit$

Soit l'espace  $E = \mathbb{R}_1[X]$  muni du produit scalaire

$$(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Montrer que  $(\cdot | \cdot)$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Trouver une base orthonormale  $\varepsilon$  de  $E$ .
3. Trouver les coordonnées du vecteur  $P = X + 1$  dans  $\varepsilon$ .

**Solution :**

1. On vérifie facilement les axiomes définissant un produit scalaire. De plus, si  $P = aX + b$  et si  $Q = a'X + b'$  alors  $(P | Q) = aa' + ab' + a'b$ .
2. On note  $e_0 = 1$  et  $e_1 = X$  les deux vecteurs de la base canonique. On redresse cette base à l'aide du procédé de Schmidt. Il vient tout d'abord  $\varepsilon_0 = e_0$  puis on calcule  $\tilde{\varepsilon}_1 = e_1 - (e_0 | e_1)e_0 = X - 1/2$  et  $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1 / \|\tilde{\varepsilon}_1\| = 2/5(2X - 1)$ .
3. Comme la base  $\varepsilon$  est orthonormale, on calcule  $(P | \varepsilon_0) = 1$  et  $(P | \varepsilon_1) = 1/15$  donc les coordonnées de  $P$  dans  $\varepsilon$  sont  $(1, 1/15)$ .

**Exercice 3.66**  $\heartsuit$

Soit  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace préhilbertien réel, et  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux. Montrer les équivalences :

- (i)  $p + q$  est un projecteur orthogonal
- (ii)  $\forall x \in E, (p(x) | q(x)) = 0$
- (iii)  $poq = qop = 0$
- (iv)  $\text{Im } p \perp \text{Im } q$

**Solution :**  $(p+q)^2 = (p+q) \implies poq + qop = 0$ . On compose par  $p$  à gauche, et  $poq = qop = 0$ , d'où (i)  $\implies$  (iii). (iii)  $\implies$  (ii) :  $p(x) \in \text{Im } p \subset \text{Ker } q$ , et  $q(x) \in \text{Im } q$ . Comme  $\text{Ker } q \perp \text{Im } q$ ,  $(p(x) | q(x)) = 0$ . (ii)  $\implies$  (iv) : évident. (iv)  $\implies$  (i) :  $(pq(x) | pq(x)) = (q(x) | ppq(x)) = 0$ , de même pour  $qop(x)$ . Donc  $poq = qop = 0$ , et  $p + q$  est un projecteur. Comme  $((p+q)(x) | y) = (x | (p+q)(y))$ , c'est un proj. orthogonal.

**Exercice 3.67**  $\heartsuit$

Soit  $(E, n, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien et un vecteur  $x \in E$ . Soit un vecteur non-nul  $a \in E$ . On définit la droite vectorielle  $D = \text{Vect}(a)$  et son orthogonal  $H = D^\perp$ . Exprimer les distances  $d(x, H)$  et  $d(x, D)$  en fonction de la norme du vecteur  $x$  et du produit scalaire  $(x | a)$ .

**Solution :** Notons  $p(x)$  le projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur le sous-espace  $H$ . Alors  $d(x, H) = \|x - p(x)\|$  et  $d(x, D) = \|p(x)\|$ . Écrivons que  $x = \lambda \cdot a + p(x)$ . Alors  $(x | a) = \lambda \|a\|^2 + (p(x) | a) = \lambda \|a\|^2$ . On tire donc  $\lambda = \frac{(x | a)}{\|a\|^2}$  puis successivement

$$p(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} \cdot a, \quad d(x, D) = \frac{|(x | a)|}{\|a\|}, \quad d(x, H) = \frac{\sqrt{\|x\|^2 \|a\|^2 - (x | a)^2}}{\|a\|}$$

(la quantité sous la racine est positive d'après Cauchy-Schwarz).

**Exercice 3.68**  $\heartsuit$

Sur l'espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , on définit pour deux polynômes  $(P, Q) \in E^2$ ,

$$(P | Q) = \int_0^1 tP(t)Q(t) dt$$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale du sous-espace  $F = \mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.
3. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme  $P = X^3$  sur le sous-espace  $F$ .