Chapitre 17

Développements limités

Table des matières

10 Suites de nombres réels 1
10.1 Définitions 2
10.1.1 Vocabulaire 2
10.1.2 Opérations sur les suites 2
10.2 Convergence d'une suite 3
10.2.1 Suites convergentes, divergentes 3
10.3 Opérations sur les limites 5
10.3.1 Opérations algébriques sur les limites 5
10.3.2 Limites et relations d'ordre 7
10.3.3 Limites infinies 8
10.4 Suite extraite d'une suite 10
10.5 Suites monotones 11
10.5.1 Théorème de la limite monotone 11
10.5.2 Suites adjacentes 11
10.5.3 Approximation décimale des réels 12
10.5.4 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass 13
10.6 Suites géométriques 14
10.7 Relations de comparaison 15
10.7.1 Introduction 15
10.7.2 Suite dominée par une autre 15
10.7.3 Suite négligeable devant une autre 16
10.7.4 Suites équivalentes 17
10.8 Comparaison des suites de référence 18

Pour bien aborder ce chapitre

On a mis en évidence dans le chapitre précédent les formules de Taylor. Celle de Taylor-Young, en particulier, permet d'approximer dans un voisinage d'un point donné, à la précision voulue, une fonction par un polynôme. Cette approximation, comme nous l'avons expliqué, sera d'un grand intérêt pour connaître localement le comportement d'une fonction. Le problème est cependant de déterminer le polynôme de Taylor. En effet, à l'exception de quelques fonctions simples, la formule de Taylor-Young, pour être appliquée, demande de connaître les différentes dérivées de la fonction étudiée et celles-ci, en général, sont difficiles à calculer.
Pour répondre à ce problème, nous allons introduire dans ce chapitre différentes techniques qui permettront, à partir des polynômes de Taylor des fonctions usuelles, de calculer le polynôme de Taylor pour une large classe de fonctions.

17.1 Développements limités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (non vide et non réduit à un point).

17.1.1 Définitions

DÉFINITION 17.1 **Développement limité**
Soient une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et un point adhérent $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à*

l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré $\leqslant n$, une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \mathrm{P}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

— Le polynôme P est appelé *partie régulière* ou *partie principale* du développement limité de f en x_0.
— La fonction $x \mapsto (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelée *reste* du développement limité de f en x_0.

Remarque 17.1

— Avec les notations précédentes,

$$(x - x_0)^n \varepsilon(x) = \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

— Par le changement de variable

$$\begin{cases} h = x - x_0 & \text{si } x_0 \in \mathbb{R} \\ h = 1/x & \text{si } x_0 = \pm\infty \end{cases}$$

on peut toujours se ramener à un développement limité en $x_0 = 0$.

On se limitera désormais à l'étude des développements limités en 0

17.1.2 DL fondamental

THÉORÈME 17.1 **DL de $\dfrac{1}{1-x}$**

La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un DL à l'ordre n en 0 et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right)}$$

Démonstration *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a, par application de la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

mais $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \dfrac{x}{1-x}$ *et* $\dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *et donc :* $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right)$.

COROLLAIRE 17.2

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2n} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n}\right)}$$

Démonstration *Il suffit de remplacer, dans la formule précédente, x par $-x$ pour obtenir la première formule ou de remplacer x par x^2 pour obtenir la seconde.*

17.1.3 Propriétés

PROPOSITION 17.3 ♡ **Unicité du DL**

Soit une fonction f admettant un DL d'ordre n en 0. Alors la partie régulière du DL d'ordre n en 0 de f est unique. Autrement dit, s'il existe des polynômes de degré n P_1 et P_2 tels que

$$f(x) = \mathrm{P}_1(x) + \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{P}_2(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

alors $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$.

Démonstration Notons $P_1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ et $P_2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$. Il existe donc une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $P_1(x) - P_2(x) = x^n \varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut ainsi écrire

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = x^n \varepsilon(x)$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$ dans cette égalité, on obtient $a_0 - b_0 = 0$ et donc $a_0 = b_0$. On a donc

$$(a_1 - b_1) + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}\varepsilon(x)$$

En appliquant ce procédé $n-1$ fois, on prouve que $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ et donc que $P_1 = P_2$.

PROPOSITION 17.4 **Troncature d'un DL**
Soit une fonction f admettant un DL à l'ordre n en 0. Soit un entier naturel $p \leqslant n$. Alors f admet un DL à l'ordre p en 0 et celui ci est obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur à p dans la partie principale.

Démonstration Comme f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il existe $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \left(a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)\right) \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(x) = a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)$ vérifie bien, par opération sur les limites $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

PROPOSITION 17.5 **Utilisation de la parité**
Soit une fonction f admettant un DL d'ordre n en 0. Si f est paire (impaire) sur un voisinage symétrique de 0, alors la partie principale de son DL à l'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (impaires).

Démonstration Effectuons la démonstration dans le cas où f est paire. Le cas impair se démontre de la même façon. Comme la fonction f est paire, on a $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(-x)$. Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$ alors $f(-x) = a_0 - a_1 x + \ldots + a_n(-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. Par unicité du développement limité de f en 0 à l'ordre n, on a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ impair $a_k = -a_k$ ce qui n'est possible que si $a_k = 0$.

17.1.4 DL et régularité

THÉORÈME 17.6 ♡ **DL et dérivabilité**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur $]0, \alpha]$. On suppose que

H1 La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$

Alors la fonction f se prolonge en une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} [0,\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = a_1$.

Démonstration Puisque pour $x \neq 0$, $\widetilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0 = \widetilde{f}(0)$, la fonction $\widetilde{f}$ est continue en 0. Le taux d'accroissement de $\widetilde{f}$ en 0 s'écrit pour $x \neq 0$,

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{a_1 x + x\varepsilon(x)}{x} = a_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = a_1$.

THÉORÈME 17.7 ♡ **Une fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle avec $0 \in I$. On suppose que

H1 $f \in \mathscr{C}^n(I)$

Alors la fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Démonstration *C'est la formule de Taylor-Young (**??** page **??**)*

Remarque 17.2 Cette formule permet de justifier l'existence d'un développement limité. Elle a donc un intérêt théorique. Pour calculer effectivement les coefficients de ce DL à l'aide de cette formule, il faut pouvoir calculer les dérivées successives de la fonction en 0 ce qui n'est possible que pour des fonctions simples.

Remarque 17.3 La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple fondamental suivant. Soit $n \geqslant 2$. Considérons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{n+1} \sin(1/x^n) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Cette fonction admet un développement limité à l'ordre n en 0 puisque

$$f(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x^n \sin(1/x^n)$ pour $x \neq 0$, avec $|\varepsilon(x)| \leqslant |x|^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. La fonction f est bien continue en 0 puisque $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$. Elle est également dérivable en 0 puisque $|f(x)/x| \leqslant |x|^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Elle est dérivable en $x \neq 0$ avec

$$f'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n\cos(1/x^n)$$

et f' n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$ ce qui montre que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

BIO 1 **William Young, né à Londres le 20 octobre 1863, mort à Lausanne le 7 juillet 1942**

Mathématicien Anglais. William Young, issu de parents épiciers, montre dès le primaire un fort potentiel pour les mathématiques à tel point que le directeur de son école, Edwin A. Abott, auteur d'un célèbre livre de mathématiques, "*Flatland*", l'encourage à poursuivre ses études dans cette direction. Young entre à l'université de Cambridge en 1881. Il est assez probable qu'il ne se serait pas intéressé à la recherche s'il n'avait pas rencontré sa futur femme, Grace Chisholm, elle-même tout juste docteur en mathématiques suite à une thèse avec Félix Klein. Young s'est intéressé à la théorie des fonctions réelles et a découvert, de manière indépendante de Lebesgue et avec un autre formalisme, la théorie d'intégration dite de Lebesgue, qui généralise celle de Riemann. Il s'est intéressé aux séries de Fourier et aux séries orthogonales. Sa contribution majeure est sans doute celle apportée au calcul différentiel pour les fonctions à plusieurs variables qui inspira de nombreux livres d'enseignement consacrés à ce sujet. Young fit de nombreux voyages et visita de nombreuses universités en Europe, Amériques, Asie et Afrique. En 1940, alors que la seconde guerre mondial a éclaté, il se retrouve coincé à Lausanne et ne peut rejoindre sa femme et ses cinq enfants. Il passa ainsi les deux dernières années de sa vie dans la détresse de cette séparation.

17.2 Développement limité des fonctions usuelles

17.2.1 Utilisation de la formule de Taylor-Young

PROPOSITION 17.8 **DL classiques à partir de Taylor-Young**
On obtient les DL classiques suivants en 0 en calculant les dérivées successives en 0 et en appliquant la formule de Taylor-Young.

— *Fonctions exponentielle et hyperboliques* :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

— *Fonctions trigonométriques* :

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

— *Fonction logarithme* :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\ \ln(1-x) &= -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

— *Fonction* $x\mapsto(1+x)^\alpha$ *avec* $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

Remarque 17.4 Cette dernière formule appliquée à $\alpha=\frac{1}{2}$ et $n=2$ donne

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Remarque 17.5 Parmi ces DLs certains s'obtiennent de manière plus rapide qu'en appliquant la formule de Taylor-Young grâce aux théorèmes que nous allons maintenant introduire.

17.3 Opérations sur les développements limités

17.3.1 Combinaison linéaire et produit

PROPOSITION 17.9 **Combinaison linéaire et produit de DLs**
Soient deux fonctions f et g réelles définies sur I admettant en 0 des DL d'ordre n

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad f(x)=\mathrm{P}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\quad \text{et}\quad g(x)=\mathrm{Q}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

où P et Q sont des polynômes réels de degré n. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Les fonctions $\alpha f+\beta g$ et $f\times g$ admettent des Dl d'ordre n en 0 et ces DLs sont donnés par, pour tout $x\in\mathrm{I}$

$$\begin{aligned}\left(\alpha f+\beta g\right)(x) &= \left(\alpha\mathrm{P}+\beta\mathrm{Q}\right)(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\ \left(f\times g\right)(x) &= \mathrm{R}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

où $\mathrm{R}(x)$ est égal au produit $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ auquel on a retiré tous les termes de degré $>n$.

Démonstration *Pour* $i=1,2$, *il existe des fonctions* $\varepsilon_i:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ *telles que* $f(x)=\mathrm{P}(x)+x^n\varepsilon_1(x)$, $g(x)=\mathrm{Q}(x)+x^n\varepsilon_2(x)$ *et* $\varepsilon_i(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$.

- *On a donc :*

$$\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha\mathrm{P}(x)+\beta\mathrm{Q}(x)+x^n\left(\alpha\varepsilon_1(x)+\beta\varepsilon_2(x)\right)=\alpha\mathrm{P}(x)+\beta\mathrm{Q}(x)+x^n\varepsilon(x)$$

  avec $\varepsilon(x)=\alpha\varepsilon_1(x)+\beta\varepsilon_2(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ *par opérations sur les limites. Par conséquent* $\alpha f+\beta g$ *admet un développement limité à l'ordre* n *en* 0 *de partie régulière* $\alpha\mathrm{P}+\beta\mathrm{Q}$.
- *Pour le produit,*

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+x^n\mathrm{Q}(x)\varepsilon_1(x)+x^n\mathrm{P}(x)\varepsilon_2(x)+x^{2n}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\\ &= \mathrm{R}(x)+x^n\left(x\mathrm{S}(x)+\mathrm{Q}(x)\varepsilon_1(x)+\mathrm{P}(x)\varepsilon_2(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \mathrm{R}(x)+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

où

- ▲ R *est un polynôme de degré* n *et* S *un polynôme de degré* $n-1$ *tels que* $P(x)Q(x) = R(x) + x^{n+1}S(x)$
- ▲ $\varepsilon(x) = xS(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + P(x)\varepsilon_2(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *par opération sur les limites.*

17.3.2 Composée

PROPOSITION 17.10 **Composée de DLs**
Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de 0. On suppose que

- H1 La fonction f admet un DL d'ordre n en 0, $f(x) = F(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où F est un polynôme de degré n.
- H2 La fonction g admet un DL d'ordre n en 0, $g(x) = G(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où G est un polynôme de degré n.
- H3 $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$.

Alors la fonction composée $g\circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$ dans le polynôme $G\circ F$.

Démonstration *Admise*

17.3.3 Quotient

PROPOSITION 17.11
Soit une fonction u définie au voisinage de 0. On suppose que

- H1 $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$
- H2 u admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière un polynôme P.

Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $1 + P + P^2 + \cdots + P^n$.

Démonstration *Appliquer le théorème de composition de DL à la fonction définie par* $g(y) = 1/(1-y)$ *(qui admet un DL à tout ordre) et à la fonction* $f = u$.

PROPOSITION 17.12 **Quotient de DLs**
Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de 0. On suppose que

- H1 Les fonctions f et g admettent des DL d'ordre n en 0.
- H2 $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell \neq 0$.

alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en 0.

Démonstration *Puisque* $\ell \neq 0$, *nous pouvons écrire pour* $x \in I$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\ell\frac{g(x)}{\ell}} = \frac{1}{\ell}\frac{f(x)}{1-u(x)}$$

où $u(x) = 1 - g(x)/\ell$. *La fonction* u *admet un développement limité à l'ordre* n *(combinaison linéaire de DL) et* $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *Il suffit d'appliquer la proposition précédente.*

Ce théorème permet de déterminer les DLs suivants :

PLAN 17.1 : Pour calculer le DL à l'or de n de $\dfrac{1}{g}$

On suppose que $g(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u} \text{ avec } u = -\left(a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right) \\
&= 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \underset{x\to 0}{o}\left(u^n\right) \\
&= 1 - \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) + \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 + \ldots + (-1)^n \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

qu'on développe et tronque en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$.

COROLLAIRE 17.13
On a :

$$\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

17.3.4 Développement limité d'une primitive

THÉORÈME 17.14 **Primitivation d'un DL**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \overline{\mathrm{I}}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On suppose que

- H1 la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.
- H2 la fonction f' admet un DL d'ordre n en 0, $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = \overbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}^{\mathrm{P}'(x)} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- H3 $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \mathbb{R}$.

alors la fonction f admet un DL d'ordre $n+1$ en 0 obtenu en primitivant la partie régulière du DL de f' et en ajoutant la limite de f en 0 :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \boxed{f(x) = \underbrace{l + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{\mathrm{P}(x)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)}$$

Démonstration *Pour fixer les idées, supposons que* $\mathrm{I} =]0,\alpha[$. *Posons, pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}(x) = f(x) - \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ *et* $\mathrm{F}(0) = l$. *La fonction* F *ainsi définie est continue sur* $[0,\alpha[$ *et dérivable sur* $]0,\alpha[$ *avec*

$$\forall x \in]0,\alpha[, \quad \mathrm{F}'(x) = f'(x) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = x^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

où $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *Soit* $x \in]0,\alpha[$. *La fonction* F *est continue sur* $[0,x]$, *dérivable sur* $]0,x[$. *D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $\theta(x) \in]0,1[$ *tel que* $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = x\mathrm{F}'(\theta(x)x)$. *On a alors*

$$f(x) - l - \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^{n+1} \underbrace{(\theta(x))^n \tilde{\varepsilon}(\theta(x)x)}_{=\varepsilon(x)} = \mathrm{o}(x^{n+1})$$

En effet, par composée de limites, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ce théorème permet de déterminer les DLs suivants :

COROLLAIRE 17.15

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+x) & = & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\
\arctan x & = & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\operatorname{argth} x & = & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin x & = & x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\operatorname{argsh} x & = & x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arccos x & = & \dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7}-\cdots+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{array}$$

Remarque 17.6 Le dernier s'obtient en remarquant que $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Remarque 17.7 *Attention :* On peut primitiver les DL mais pas les dériver. L'existence d'un DL à l'ordre n pour une fonction f dérivable n'implique pas toujours l'existence d'un DL à l'ordre $n-1$ pour la fonction f'. Pour s'en convaincre, reprendre l'exemple **??** page **??** où la fonction f possède un DL à l'ordre $n \geqslant 2$, alors que f' n'était pas continue en 0 donc ne possédait même pas un DL à l'ordre 0 !

On peut tout de même dériver des DL dans certains cas, mais il faut le justifier en utilisant les propriétés du cours.

Exemple 17.1 On suppose que

H1 la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Alors la fonction f' admet un DL à l'ordre $(n-1)$ sur I de partie principale le polynôme P′ où P est la partie principale du DL de f. C'est une conséquence de la formule de Taylor-Young.

Exemple 17.2 Considérons la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}\right.$. Elle est dérivable sur I et vérifie une équation différentielle.

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = 1 + f^2(x)$$

Utilisons cette équation différentielle pour déterminer le DL à l'ordre 5 de f en 0.

— Puisque f est de classe $\mathscr{C}^5$ sur I, d'après Taylor-Young, elle possède un DL à l'ordre 5 en 0. De plus, comme f est impaire, on peut écrire
$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

— Par opérations algébriques sur les développements limités et en utilisant l'équation différentielle, la fonction f' admet donc un DL en zéro à l'ordre 4 donné par
$$f'(x) = 1 + x^2\left[a_1 + a_3x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right]^2 = 1 + x^2\left[a_1^2 + 2a_1a_3x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right] = 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

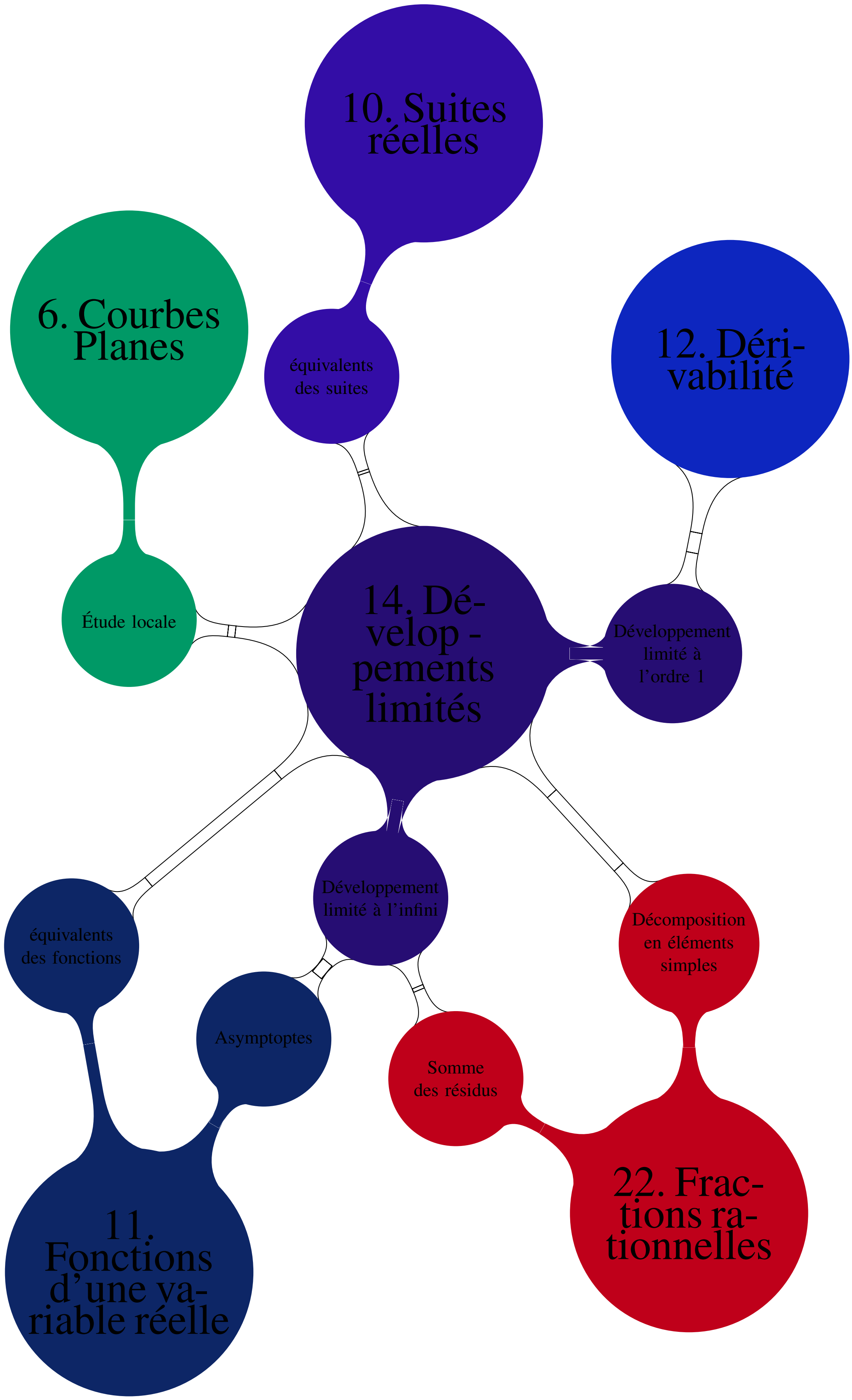
— Par primitivation de DL et puisque $f(0) = 0$, on obtient que
$$f(x) = x + \frac{a_1^2}{3}x^3 + \frac{2a_1a_3}{5}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

— Par unicité du DL de f, on en tire que $a_1 = 1$, $a_1^2/3 = a_3$ et $2a_1a_3/5 = a_5$ d'où par résolution de ce système, $a_1 = 1$, $a_3 = 1/3$ et $a_5 = 2/15$.

L'intérêt des développements limités est essentiellement pratique. Il faut savoir calculer rapidement des développements limités simples. Vous pouvez consulter maintenant l'appendice **??** page ?? pour apprendre à calculer efficacement les DL et étudier leurs applications en analyse.

En résumé

1. Les calculs de développements limités sont avant tout des calculs sur les polynômes. Afin d'être efficace dans ces derniers, une lecture du paragraphe **??** page **??** s'impose.
2. Pour apprendre à prévoir l'ordre d'un développement limité et savoir les utiliser pour déterminer des équivalents ou des limites on pourra consulter le paragraphe **??** page **??**.
3. Vous devrez prendre de l'aisance dans les calculs de développements limités, il serviront souvent aussi il conviendra de les manipuler avec efficacité et sûreté, ce qui demande au départ de pratiquer un assez grand nombre d'exercices calculatoires.


10. Suites réelles
6. Courbes Planes
équivalents des suites
12. Dérivabilité
14. Développements limités
Étude locale
Développement limité à l'ordre 1
équivalents des fonctions
Développement limité à l'infini
Décomposition en éléments simples
Asymptoptes
Somme des résidus
11. Fonctions d'une variable réelle
22. Fractions rationnelles