Chapitre 15

Calcul matriciel

Table des matières

Pour bien aborder ce chapitre

Tout est dit dans le théorème 13.21 page 13 du chapitre **??**...si on se fixe une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $f = (f_1, \dots, f_q)$ de F alors une application linéaire $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est entièrement déterminée par les composantes des vecteurs $u(e_i)$ dans la base f. Ces pq scalaires définissent complètement u. Il est tentant de les représenter dans un tableau. Si on note, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_j$ alors on peut écrire :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u\left(e_j\right) & \cdots & u\left(e_p\right) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_i \\ \vdots \\ \leftarrow f_q \end{array}
\end{array}$$

Ce tableau est la matrice de u dans les bases e de E et f de G. Se posent alors des questions naturelles :

1. Si on effectue cette manipulation pour deux applications linéaires u et v, comment se calcule la matrice correspondante à $\alpha u + \beta v$? On verra qu'on peut définir une addition entre les matrices et une multiplication par un scalaire. Avec ces deux lois, l'ensemble des matrices (de même taille) possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si u et v sont deux endomorphismes de E, quel est le lien entre la matrice de $u \circ v$ et celles de u et v ? Pour l'expliciter, on définira le produit entre les matrices.
3. Peut-on calculer le rang d'une application linéaire facilement à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est oui et l'outil est le pivot de Gauss.
4. Peut-on par un procédé calculatoire déterminer si un endomorphisme est inversible à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est encore oui et l'outil est le déterminant.
5. Pour un endomorphisme inversible, existe-t-il un procédé permettant de calculer la matrice de son inverse ? Cet outil existe et il est donné par la comatrice.
6. Si on prend d'autres bases e' et f' de E et F, peut-on calculer la matrice de u dans ces nouvelles bases en fonction de sa matrice dans les bases initiales ? La réponse est encore positive et on mettra en place des formules de changement de bases.
7. Enfin, pour un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, existe-il une base de E dans laquelle la matrice de u prend une forme simple et facile à manipuler ? La réponse sera donnée en spé dans le chapitre sur la réduction des endomorphismes.

Au niveau historique, on peut indiquer qu'au 3^{e} siècle, le mathématicien chinois Liu Hui résolvait les systèmes linéaires ayant jusqu'à 6 inconnues. Il représentait ces systèmes grâce à des tableaux et avait découvert la méthode qu'on appelle maintenant pivot de Gauss pour les résoudre. Au 17^{e} siècle, toujours pour résoudre des systèmes linéaires, Leibniz invente le déterminant. Cette notion est approfondie par Cramer qui découvre soixante ans plus tard la méthode qui porte maintenant son nom. Il faut attendre le 19^{e} siècle, pour que la notation matricielle sous forme de « rectangle (ou carré) de nombres » apparaisse. Gauss découvre le produit matriciel en dimension 3 et indique que la formule se généralise dans les autres dimensions mais sans détailler. Sylvester, le premier, dénomme ces rectangles de nombres du mot « matrix ».
Dans tout ce chapitre, m, n, p, q, r sont des entiers positifs, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

15.1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$

15.1.1 Définitions

DÉFINITION 15.1 ♡ **Matrice**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice à q lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application :

$$\mathrm{A} : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$$

que l'on note :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \\ & \downarrow & \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

— Le coefficient de A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$ ou $[\mathrm{A}]_{i,j}$:

1. i représente l'indice de ligne.
2. j représente l'indice de colonne.

— On dit aussi que A est une matrice $q \times p$ ou une matrice (q, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
— On note $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

✎ *Notation 15.1* On notera aussi $[A]_{ij}$ ou encore a_{ij} le coefficient $a_{i,j}$ de A.

DÉFINITION 15.2 **Vecteur ligne, vecteur colonne d'une matrice**
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{q,1} & \dots & a_{q,p} \end{pmatrix}$$

on appelle, pour $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$:
— i-ème *vecteur ligne* de A le p−uplet $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.
— j-ème *vecteur colonne* de A le q−uplet $C_j\,(a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

DÉFINITION 15.3 **Matrice ligne, matrice colonne**
— Une *matrice colonne* est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.
— Une *matrice ligne* est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

DÉFINITION 15.4 ♡ **Matrice nulle**
On dit que $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On la note : $0_{\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})}$ ou 0 lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

DÉFINITION 15.5 ♡ **Matrice carrée**
Une matrice possédant autant de lignes que de colonnes est dite *carrée*. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

DÉFINITION 15.6 ♡ **Matrice identité**
On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale et qui valent 1.

Exemple 15.2 $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15.1.2 L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

On munit $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Le triplet $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

PROPOSITION 15.1 ♡ **Somme de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire**
— Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

— Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme étant la matrice $D = (d_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Muni de ces deux lois $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Démonstration : Laissée au lecteur. On vérifie aisément les différents axiomes définissant un espace vectoriel.

Exemple 15.3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 15.7 ♡ **Matrices élémentaires**
Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit la *matrice élémentaire* $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \\ E_{ij} = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \boxed{1} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

Tous les coefficients de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

Exemple 15.4 Les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

À titre d'exercice, et pour préparer le théorème suivant, montrer que cette famille de 6 matrices constitue une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 15.2 ♡ **Base canonique de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$**
La famille formée par les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que :

$$\boxed{\dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration

- *Prouvons que cette famille est libre. Soient* $(\alpha_{i,j})_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$. *Alors on a l'égalité :*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{q,1} & \dots & \alpha_{q,p} \end{pmatrix} = 0.$$

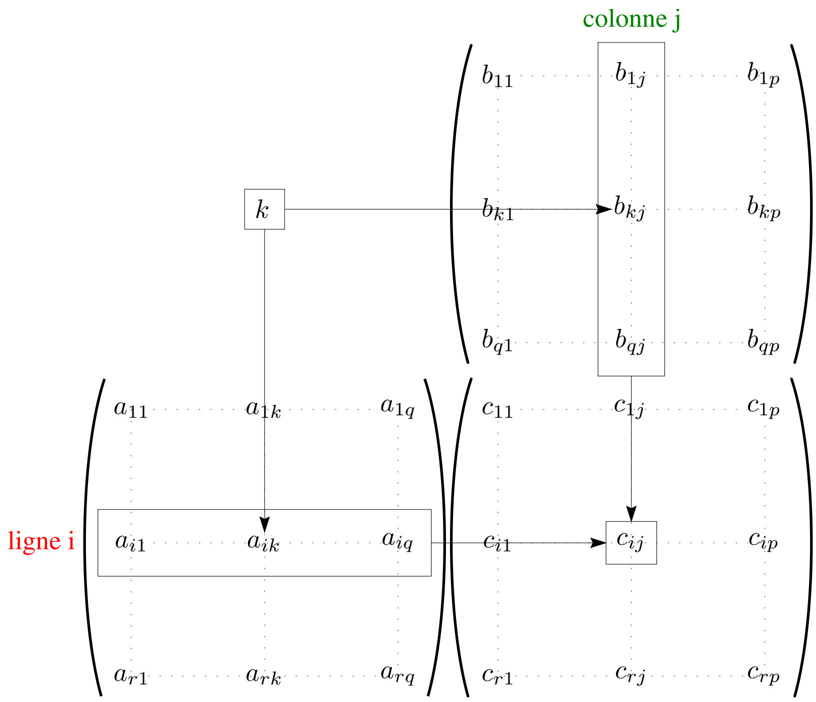
  Par identification des coefficients de ces deux matrices, on a : $\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad \alpha_{i,j} = 0$ *ce qui prouve la liberté de la famille* $(E_{i,j})$.
- *Montrons que cette famille est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Soit* $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *On a clairement :* $A = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$. *Ce qui prouve que la famille* $(E_{i,j})$ *est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

15.1.3 Produit matriciel

On définit maintenant, quand c'est possible, le produit de deux matrices. Le théorème **??** page **??** explicite le sens de ce produit, il correspond en fait à la composition des applications linéaires.

DÉFINITION 15.8 ♡ **Produit matriciel**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice C de $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,r]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad c_{i,j} = [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$



Attention 15.5 On ne peut effectuer le produit de $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q',p}(\mathbb{K})$ que si $q = q'$!

Exemple 15.6 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquons qu'en général, le produit AB peut exister sans que ce ne soit forcément le cas pour le produit BA.

Il est souvent utile dans les exercices de savoir multiplier les matrices élémentaires. Pour ce faire introduisons le symbole de Kronecker.

DÉFINITION 15.9 ♡ **Symbole de Kronecker**
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 15.1 Le nombre $\delta_{i,j}$ est l'élément générique de la matrice identité I_n.

THÉORÈME 15.3 ♡♡♡ **Produit de matrices élémentaires**
Pour deux matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{k,\ell} E_{p,q} = \delta_{\ell,p} E_{k,q}}$$

Démonstration *Par un calcul direct. Voir aussi le paragraphe **??** page **??**.*

PROPOSITION 15.4 **Règles de calculs avec les matrices**
Quant les produit suivants sont possibles, pour des matrices A, B, C et des scalaires α, β :

1. Le produit matriciel est distributif à gauche par rapport à l'addition : $C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$.
2. Le produit matriciel est distributif à droite par rapport à l'addition :$(\alpha A + \beta B) C = \alpha AC + \beta BC$.
3. Le produit matriciel est associatif : $(AB) C = A(BC)$.
4. Le produit matriciel admet la matrice I_n comme élément neutre :$AI_n = I_n A = A$.

Démonstration *Laissée au lecteur.*
****

15.1.4 Transposition (Hors programme en première année)

****

DÉFINITION 15.10 ♡ **Transposée d'une matrice**
On appelle transposée de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice noté $A^T \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées par les lignes de A. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,q]\!], \quad [A^T]_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque 15.2 Transposer revient à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple 15.7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 15.5 ♡
L'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^t A \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{\left(A^T\right)^T = A} \quad \text{et} \quad \boxed{(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T}.$$

Démonstration : La linéarité ainsi que la relation $\left(A^T\right)^T = A$ sont faciles à prouver. Pour la bijectivité, on propose deux méthodes :

— On montre facilement que, si $A \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a $\left(A^T\right) = 0$ et donc $A = \left(A^T\right)^T = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, θ est injective. Grâce à la formule du rang, on en déduit qu'elle est aussi surjective et donc bijective.
— On peut aussi remarquer que $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$ ce qui prouve que Φ est bijective et égale à sa fonction réciproque.

Remarque 15.3 En prenant un peu d'avance sur le paragraphe **??**, L'opération de transposition sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}\Phi - \mathrm{id} = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}\Phi + \mathrm{id} = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 15.6 ♡ **Transposée d'un produit**
Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

Démonstration *On suppose que* $A = (a_{i,k}) \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, *que* $B = \left(b_{k,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $C = AB = \left(c_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ *où* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$. *On note aussi :*

- $A' = A^T = \left(a'_{i,k}\right) \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $i \in [\![1,q]\!]$ *et tout* $k \in [\![1,r]\!]$, $a'_{i,k} = a_{k,i}$.
- $B' = B^T = \left(b'_{k,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $k \in [\![1,p]\!]$ *et tout* $j \in [\![1,q]\!]$, $b'_{k,j} = b_{j,k}$.

- $C' = B^T A^T = \left(c'_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ *et* $j \in [\![1,r]\!]$ *:*

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

et par conséquent, $C' = B^T A^T = C = AB^T$.

Attention 15.8 Attention au retournement dans le produit.

15.1.5 Avec Maple

Voici une feuille de calcul Maple sur les matrices. On notera :

— la première ligne qui sert à charger en mémoire les instructions maple pour faire du calcul matriciel.

— la commande pour le produit de deux matrices : &*. Pour l'addition de deux matrices, on utilisera + et pour la multiplication par un scalaire *.

— la commande pour évaluer les matrices : evalm.

```
MAPLE
> with(linalg): #On charge la librairie de calcul matriciel
> A:=matrix([[1,-1],[0,2],[1,-3]]);
                                [1  -1]
                                [     ]
                           A := [0   2]
                                [     ]
                                [1  -3]
> B:=matrix([[2,0],[1,-3],[-1,1]]);
                              [ 2   0]
                              [      ]
                         B := [ 1  -3]
                              [      ]
                              [-1   1]

> C:=matrix([[-1,1,0],[0,2,1]]);
                             [-1  1  0]
                        C := [        ]
                             [ 0  2  1]

> evalm(2*A-B); #on calcule 2A-B
                           [ 0  -2]
                           [      ]
                           [-1   7]
                           [      ]
                           [ 3  -7]

> evalm(A&*C); #on calcule AC
                         [-1  -1  -1]
                         [          ]
                         [ 0   4   2]
                         [          ]
                         [-1  -5  -3]
> transpose(A); #on transpose A
                         [ 1  0   1]
                         [         ]
                         [-1  2  -3]
```

15.1.6 Les matrices vues commes des applications linéaires

Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $X \in \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et $Y = AX \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. L'application $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & Y = AX \end{array} \right.$ est linéaire.

On convient d'identifier $\mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^q$ et $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^p$. Ainsi, Θ peut être vue comme une application de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$.

Remarquons que si e_i est le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^q$ alors $Ae_i = C_i$ où C_i est la ième colonne de A.

Par conséquent, si $X = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q \in \mathbb{K}^q$ alors

$$AX = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_q C_q.$$

DÉFINITION 15.11 **Image et noyau d'une matrice**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle :

— *noyau de la matrice* A le sous-espace de $\mathbb{K}^q$ noté $\operatorname{Ker} A$ et donné par

$$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in \mathbb{K}^q \mid AX = 0\right\}.$$

— *image de la matrice* A le sous-espace de $\mathbb{K}^p$ noté $\operatorname{Im} A$ et donné par

$$\operatorname{Im} A = \left\{AX \mid X \in \mathbb{K}^q\right\}.$$

15.2 Matrices d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

15.2.1 Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base

DÉFINITION 15.12 ♡ **Matrice d'un vecteur relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ un vecteur qui se décompose sur la base e en :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

On appelle *matrice de x relativement à la base e* et on note $\operatorname{Mat}_e(x)$ la matrice colonne donnée par :

$$\operatorname{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Exemple 15.9 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Alors $\operatorname{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 15.4 $\operatorname{Mat}_e(x)$ représente les coordonnées du vecteur x dans la base e. Il y a bien sûr une bijection entre les vecteurs de E et les matrices colonnes de taille n (qui contiennent les composantes de ces vecteurs dans une base fixée). De plus, « effectuer des calculs avec ces vecteurs » correspond à « effectuer des calculs avec ces matrices ». C'est le sens de la proposition suivante.

PROPOSITION 15.7 **Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit e une base de E. L'application $\theta : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname{Mat}_e(x) \end{array}\right.$ qui à un vecteur associe la matrice colonne de ses coordonnées dans la base E est un isomorphisme de $\mathbb{K}$−espaces vectoriels.

Démonstration *Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) e_i$ donc il est clair que $\operatorname{Mat}_e(\alpha x + \beta y) = \alpha \operatorname{Mat}_e(x) + \beta \operatorname{Mat}_e(y)$ et θ est linéaire. Si $x \in \operatorname{Ker}\theta$ alors $\theta(x) = 0$ et les composantes de x dans la base e valent toutes 0. Donc $x = 0$ et θ est injective. De plus, $\dim E = \dim \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc θ est bijective.*

DÉFINITION 15.13 ♡ **Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $e = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E. On considère $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E qui se décomposent dans la base e sous la forme :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \qquad v_j = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} e_i.$$

On appelle *matrice de la famille $(v_1, \dots, v_p)$ relativement à la base e* et on note $\operatorname{Mat}_e(v_1, \dots, v_p)$ la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_p \end{array} \\ \operatorname{Mat}_e(v_1,\dots,v_p) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_q \end{array} \end{array}$$

La j-ème colonne de cette matrice est constituée des coordonnées du vecteur v_j dans la base e.

Exemple 15.10 On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $v_1 = (-1,3,0)$, $v_2 = (0,-1,5)$, $v_3 = (-3,2,1)$, $v_4 = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ et soit $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ alors $\operatorname{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

15.2.2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 15.14 ♡ **Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle *matrice de u relativement aux bases f et e* et on note $\operatorname{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$ (ou $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ [1]) la matrice $q \times p$ donnée par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_q \end{array} \end{array}$$

où $(a_{1j}, \dots, a_{qj})$ sont les composantes du vecteur $u(e_j)$ dans la base f.
Autrement dit : $\operatorname{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$ est la matrice de la famille de vecteurs $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ relativement à la base f :

$$\operatorname{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \operatorname{Mat}_f\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right).$$

Remarque 15.5 Les notations utilisées sont un peu lourdes mais elles rendront très simples à retenir les formules de changement de base.

Exemple 15.11 Donnons deux exemples :

— Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique f. Soit $u : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+3z) \end{cases}$ alors comme $u(e_1) = (1,2)$, $u(e_2) = (1,-1)$ et $u(e_3) = (-1,3)$, $\operatorname{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

— Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique e et $u : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{P} - \mathrm{P}' \end{cases}$ alors $u(1) = 2$, $u(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X} - 1$, $u(\mathrm{X}^2) = 2\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}$ et $u(\mathrm{X}^3) = 2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2$. Il vient alors $\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 15.15 ♡ **Matrice d'une forme linéaire relativement à une base**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Si φ est une forme linéaire sur E, on appelle *matrice de* φ *relativement à la base* e la matrice ligne $1\times n$ donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(\varphi)=\big(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)\big)$$

PROPOSITION 15.8 ♡ **Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases**

Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f=(f_1,\dots,f_q)$ une base de F.

l'application :

$$\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})\\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $\mathrm{M}\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ telle que $\theta^{-1}(\mathrm{M})=u$. On dit que *$u$ est l'application linéaire de* E *dans* F *représentée par* M *dans les bases* e *de* E *et* f *de* F.

Démonstration

- *On vérifie tout d'abord que θ est linéaire. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et soient $u,v\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose que $\theta(u)=\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)=\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, que $\theta(v)=\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(v)=\mathrm{B}=\left(b_{i,j}\right)\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et que $\theta(\alpha u+\beta v)=\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(\alpha u+\beta v)=\mathrm{C}=\left(c_{i,j}\right)\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Par conséquent :*

$$\forall j\in[\![1,p]\!],\quad u\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}a_{k,j}f_k\quad\text{et}\quad v\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}b_{k,j}f_k.$$

  Par suite, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$:

$$(\alpha u+\beta v)\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}c_{k,j}f_k=\alpha u\left(e_j\right)+\beta v\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}\left(\alpha a_{k,j}+\beta b_{k,j}\right)f_k.$$

  Par identification, la famille f formant une base de F, on a :

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad\forall j\in[\![1,p]\!],\quad c_{k,j}=\alpha a_{k,j}+\beta b_{k,j}$$

  ce qui prouve que : $\mathrm{C}=\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}$ et que θ est linéaire.
- *θ est injective. En effet, si $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est telle que $\theta(u)=0$ alors $\forall j\in[\![1,p]\!],\quad u\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}0.f_k=0$. u s'annulant sur une base de E ne peut que s'annuler sur E tout entier et donc $u=0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\theta=\{0\}$ et que θ est injective.*
- *θ est surjective. Soit $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Considérons l'application linéaire $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ donnée par : $\forall j\in[\![1,p]\!],\quad u\left(e_j\right)=\sum_{k=1}^{q}a_{k,j}f_k$ (Rappelons qu'une application linéaire est complètement déterminées par les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace vectoriel sur lequel elle est définie). On a clairement $\theta(u)=\mathrm{A}$ ce qui prouve que θ est surjective.*

PLAN 15.1 : Autrement dit :

Avec les notations précédentes, se fixant une base e dans E et une base f dans F.

- *Toute matrice de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est celle d'une application linéaire $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ dans les bases e et f.*
- *Réciproquement, à toute application linéaire de $\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ correspond une et une seule matrice de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ qui la représente dans les bases e et f.*

En utilisant ces deux dernières propositions, on obtient :

COROLLAIRE 15.9 ♡

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient e et f des bases respectives de E et F. Si on note $p=\dim\mathrm{E}$ et $q=\dim\mathrm{F}$, on a :

$$\boxed{\dim\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})=\dim\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})=qp}$$

Démonstration : En effet, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension.

Le théorème suivant justifie la définition du produit matriciel. Composer des applications linéaires revient à multiplier les matrices correspondantes.

THÉORÈME 15.10 ♡ **Fondamental ! Matrice de la composée de deux applications linéaires**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r et $g = (g_1, \dots, g_r)$ une base de G.
4. $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathfrak{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)}$$

Démonstration *Notons :* $\mathrm{A} = \left(a_{i',j'}\right) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ $\mathrm{B} = \left(b_{i'',j''}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v)$ et $\mathrm{C} = \left(c_{i,j}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v \circ u)$. *Soient* $j \in [\![1, p]\!]$ *et* $i \in [\![1, r]\!]$. *On a :* $(v \circ u)\left(e_j\right) = v\left(u\left(e_j\right)\right) = v\left(\sum_{k=1}^q a_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^q a_{k,j} v\left(f_k\right) = \sum_{k=1}^q a_{k,j} \sum_{i=1}^r b_{i,k} g_i = \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^r b_{i,k} a_{k,j} g_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^q b_{i,k} a_{k,j}\right) g_i$

Et par identification : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^q b_{j,k} a_{k,i}$ *ce qui prouve le résultat.*

Enfin, on écrit le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire peut s'effectuer, en dimension finie, au moyen des matrices.

PROPOSITION 15.11 ♡ **Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_e(x)}$$

Autrement dit, si $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_f(u(x))$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_e(x)$, on a : $\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{AX}}$.

Démonstration *Posons* $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \left(x_j\right) \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Y} = \left(y_i\right) \in \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$. *On a :* $u(x) = u\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j u\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^q a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j f_i = \sum_{i=1}^q y_i f_i$. *Par identification, on a bien :*

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j$$

ce qui prouve le résultat.

Exemple 15.12

— Soit deux applications linéaires

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y,\ x + y + z) \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y,\ x + 2y,\ x - y) \end{array} \right.$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. On écrit $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On écrit maintenant $\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v \circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u \circ v)$. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) \times = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Donnons l'expression analytique de $u\circ v$ et $v\circ u$. On utilise le théorème **??**.
D'une part $\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+z\\3x+y+2z\\-2y-z\end{pmatrix}$ donc $u\circ v\big(x,y,z\big)=\big(2x+z,3x+y+2z,-2y-z\big)$.
D'autre part $\begin{pmatrix}0&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\3x+2y\end{pmatrix}$ et $v\circ u\big(x,y\big)=\big(-y,3x+2y\big)$.

—

15.3 Matrices carrées

15.3.1 Définitions

Rappelons qu'une matrice est carrée si et seulement si elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 15.12 ♡
- $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension finie n^2.
- $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ possède une structure d'anneau unitaire (non commutatif).

Démonstration *Le premier point est un corollaire immédiat des propositions* **??** *et* **??**. *On vérifie facilement les axiomes d'un anneau pour* $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Remarque 15.6 Comme $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, pour deux matrices $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton (voir le théorème **??** page **??**) dès que A et B commutent, c'est-à-dire dès que $AB=BA$.

Exemple 15.13 Calculons les puissance de $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$. On remarque que $A=I_3+B$ avec $B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
On remarque aussi que $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et que $B^3=0$. Comme $I_3B=BI_3=B$, on peut appliquer la formule du binôme et écrire pour $n\geqslant 2$:

$$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_3^{n-k}B^k=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&-n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, on montre que cette égalité reste correcte si $n=0,1$ d'où le résultat.

DÉFINITION 15.16 ♡ **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Soit $u\in\mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E. On appelle *matrice de l'endomorphisme u* dans la base e la matrice notée $\mathrm{Mat}_e(u)$ et donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(u)=\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(u)$$

Remarquons que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est une matrice carrée : $\mathrm{Mat}_e(u)\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 15.13 ♡ **Un endomorphisme est entièrement déterminé par sa matrice dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors, l'application

$$\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{L}(E)&\longrightarrow&\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\\u&\longmapsto&\mathrm{Mat}_e(u)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels.
En particulier, si $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique endomorphisme $u\in\mathfrak{L}(E)$ tel que $\theta^{-1}(M)=u$. On dit que *u est l'endomorphisme de* E *représenté par* M *dans la base e*.

Démonstration *Le fait que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels est un cas particulier du théorème* **??**. *Par ailleurs, si $u,v\in\mathfrak{L}(E)$ alors $\theta(u\circ v)=\mathrm{Mat}_e(u\circ v)=\mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{Mat}_e(v)=\theta(u)\theta(v)$ ce qui prouve que θ est un morphisme d'anneaux.*

PLAN 15.2 : Autrement dit :

Avec les notations de la proposition précédente, se fixant une base e de E :

- *A toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ correspond un et un seul endomorphisme u de E dont la matrice dans la base e est A.*
- *Réciproquement, à tout endomorphisme de E correspond une et une seule matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui le représente dans la base e.*

15.3.2 Éléments inversibles dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

DÉFINITION 15.17 ♡ **Matrice inversible**
On dit qu'une matrice *carrée* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* si et seulement si il existe $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$$

Si tel est le cas B est unique et est appelée *matrice inverse* de la matrice A ; on la note A^{-1}. L'ensemble des matrices de taille n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Soit B et B′ deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{AB}' = \mathrm{B}'\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. On a donc

$$\mathrm{B} = \mathrm{BI}_n = \mathrm{B}\left(\mathrm{AB}'\right) = (\mathrm{BA})\,\mathrm{B}' = \mathrm{I}_n\mathrm{B}' = \mathrm{B}'.$$

Exemple 15.14 La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet, cherchons son inverse sous la forme $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$ on a le système : $\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$ qu'on résout et on trouve $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_3$ donc $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Remarque 15.7 On comprend grâce à cet exemple qu'il va falloir développer des outils plus sophistiqués si on veut montrer sans trop de calculs qu'une matrice est inversible. Ces outils seront le rang (voir paragraphe **??**) et le déterminant (voir paragraphe **??**). On montrera aussi dans ce dernier paragraphe comment, grâce à la notion de comatrice, on pourra calculer l'inverse de matrices inversibles de taille pas trop grande.

La proposition suivante permet de traduire la notion d'inversibilité entre les matrices et les applications linéaires.

PROPOSITION 15.14 ♡ **Une application linéaire est inversible si et seulement si sa matrice est inversible**
Soient e et f des bases respectives des $\mathbb{K}$-espace vectoriels E et F tous deux de dimension n, $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$. Alors A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* A *est inversible. Alors il existe* $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$. *Soit* v *élément de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *tel que* $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$. *On a :*

$$\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{I}_n = \mathrm{BA} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\,\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u).$$

Par conséquent : $v\circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$. *De même, on a :*

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(\mathrm{Id}_\mathrm{F}) = \mathrm{I}_n = \mathrm{AB} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\,\mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v).$$

Par conséquent : $u\circ v = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. *On a ainsi prouvé que* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *d'application réciproque* v.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement si* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *alors notons* $v : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ *son application réciproque. Posons* $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$. *On a :*

$$\mathrm{AB} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\,\mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(\mathrm{Id}_\mathrm{F}) = \mathrm{I}_n$$

et

$$\mathrm{BA} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\,\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{I}_n$$

et donc A *est inversible de matrice inverse* B.

PROPOSITION 15.15 ♡ **Si E est de dimension n, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ sont des groupes isomorphes**

1. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (en général non abélien).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et si e est une base de E, l'application

$$\theta : \begin{cases} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupe.

Démonstration *Le produit de deux matrices inversibles est inversible, on le démontrera dans la proposition* **??**. *Donc le produit est stable dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il est aussi associatif, son élément neutre est la matrice identitée et par définition toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ admet une matrice inverse élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Par ailleurs :*

- *θ est bien définie car si u est un automorphisme de E alors $\mathrm{Mat}_e(u)$ est inversible.*
- *θ est un morphisme de groupe : si $(u,v) \in (\mathrm{GL}(\mathrm{E}))^2$, alors $\theta(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{Mat}_e(v) = \theta(u)\theta(v)$.*
- *θ est injective car si $\theta(u) = \mathrm{I}_n$ alors $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{I}_n$ et donc $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.*
- *Enfin, θ est surjective car toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ représente un automorphisme de E.*

Remarque 15.8 Les deux démonstrations qui viennent sont typiques de ce chapitre. Pour démontrer une propriété sur les matrices, on la transcrit en terme d'application linéaire. Vous devez vous familiariser avec cette gymnastique.

Exemple 15.15 On reprend la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple **??** p. **??**.
A est la matrice, dans la base $(1, \mathrm{X})$, de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_1[\mathrm{X}]$ dans lui-même défini par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$.
Il est clair que l'endomorphisme v de $\mathbb{K}_1[\mathrm{X}]$ dans lui-même défini par $v(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$ "défait ce que fait u" et donc que u et v sont inverses l'un de l'autre. Donc A est inversible d'après la proposition **??** p. **??**. De plus A^{-1} est la matrice de v dans la base $(1, \mathrm{X})$, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 15.16 ♡♡ **Une première caractérisation des matrices inversibles**
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

H1 $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n$

alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre : $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{B}^{-1}$.

Démonstration *Soient E un espace vectoriel de dimension n, e une base de E et soit u l'endomorphisme de E représenté par A dans la base e et v l'endomorphisme de E représenté par B dans la base e. Comme $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$, on a : $\mathrm{I}_n = \mathrm{AB} = \mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{Mat}_e(v) = \mathrm{Mat}_e(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(\mathrm{I}d_\mathrm{E})$. Par conséquent : $u \circ v = \mathrm{I}d_\mathrm{E}$. On en déduit que d'après le théorème 13.30 page 17 que u est inversible d'inverse v et donc que A est inversible d'inverse B.*

PROPOSITION 15.17 **Une seconde caractérisation des matrices inversibles**

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \left[\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AX} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0\right].$$

Démonstration *Soient E un espace vectoriel de dimension n, e une base de E et soit u l'endomorphisme de E représenté par A dans la base e : $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$. Soient $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et x le vecteur de E tel que $\mathrm{Mat}_e(x) = \mathrm{X}$. On a :*

$$\mathrm{AX} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{Mat}_e(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_e(u(x)) = 0.$$

Si A est inversible alors u est un isomorphisme. Donc $\mathrm{AX} = 0$ n'est possible que si $u(x) = 0$ c'est-à-dire si $x = 0$. Par conséquent $\mathrm{X} = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{AX} = 0$ entraîne $\mathrm{X} = 0$, alors $u(x) = 0$ entraîne $x = 0$ et donc $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ par suite u est injectif. Comme u est un endomorphisme, u est donc aussi surjectif d'après le corollaire 13.29 page 17 et définit bien un isomorphisme. Par conséquent A est inversible.

COROLLAIRE 15.18 **Matrice inversible et systèmes linéaires**
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

1. $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une et une seule solution.

Démonstration

⇒ *Si* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et si* $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *alors le système* $AX = B$ *admet comme unique solution* $X = A^{-1}B$.

⇐ *Réciproquement, si pour tout* $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *le système* $AX = B$ *admet une et une seule solution alors le système* $AX = 0$ *admet comme unique solution* $X = 0$ *et d'après la proposition précédente,* $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

PLAN 15.3 : Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse de la matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *on il suffit de résoudre le système* $AX = Y$.

COROLLAIRE 15.19 **Une troisième caractérisation des matrices inversibles**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

1. $A \in GL_n(\mathbb{K})$.
2. La matrice A comporte n pivots.

Démonstration

⇒ *Si* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et si* $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *alors le système* $AX = B$ *est de Cramer et donc* A *possède* n *pivots.*

⇐ *Réciproquement, si* A *admet* n *pivots alors le système* $AX = 0$ *est de Cramer et d'après proposition précédente,* $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 15.20 ♡♡

Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

Démonstration *Supposons que* A *et* B *soient inversibles. Il existe alors* $A', B' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que :* $AA' = I_n$ *et* $BB' = I_n$. *Montrons que :* $B'A'$ *est la matrice inverse de* AB *ce qui prouvera le résultat. Il suffit pour ce faire de remarquer que :*

$$ABB'A' = A\underbrace{BB'}_{=I_n}A' = AA' = I_n.$$

Exemple 15.16 On a vu au chapitre **??** que si $\vec{u}$ est un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale directe $e = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et si R_θ est la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ alors les coordonnées de $R_\theta(\vec{u})$ dans e sont : $(x', y') = (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$. On a donc :

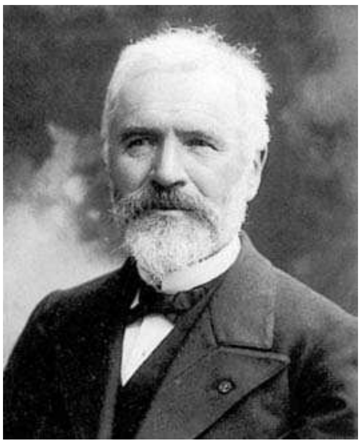
$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarquons que R_θ est un automorphisme du plan, de bijection réciproque : $R_{-\theta}$. On a par ailleurs bien :

$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta)\,\mathrm{Mat}_e(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I_2.$$

Remarquons que $(\mathrm{Mat}_e(R_\theta))^{-1} = \mathrm{Mat}_e(R_\theta)^T$. Les matrices inversibles A dont la matrice inverse est égale à leur transposée : A^T sont dites orthogonales.

BIO 1 Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon, mort le 22 janvier 1922 à Paris)



Mathématicien Français. Camille Jordan est issu d'un milieu favorisé. Son père était polytechnicien et sa mère était la sœur du peintre Pierre Puvis de Chavannes. Il fait des études brillantes et intègre Polytechnique à la première place. Il devient ingénieur du corps des mines et mène en parallèle des recherches mathématiques. En 1876, il succède à Cauchy comme enseignant à l'école Polytechnique.
Ses travaux mathématiques portent sur la géométrie, (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier. Il est aussi l'auteur d'un procédé de réduction des endomorphismes tellement utile qu'il est parfois nommé « jordanisation des endomorphismes ». Réduire un endomorphisme consiste à trouver une base dans laquelle sa matrice prend une « forme simple ». Dans le cas de la jordanisation, il s'agit d'une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de Jordan (voir l'exercice **??**). Ce procédé est en particulier important pour résoudre certaines équations différentielles. Ajoutons que Jordan était réputé pour l'excentricité de ses notations.
Il prend sa retraite en 1912. Celle-ci est marquée par le décès de trois de ses huit enfants durant la première guerre mondiale.

15.3.3 Matrices carrées remarquables

Matrices scalaires, diagonales, triangulaires

Nous allons nous intéresser à deux types particuliers de matrice dans cette section : les matrices diagonales et les matrices triangulaires. Les premières se multiplient et s'inversent très facilement (quand c'est possible évidemment). Avec les secondes, les calculs sont plus difficiles mais moins que dans le cas de matrices quelconques.

DÉFINITION 15.18 ♡ **Matrices scalaires, diagonales**

— Une matrice $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On notera $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_2)$ ainsi que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.

— Les matrices diagonales de la forme $\text{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires*.

Remarque 15.9 Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est scalaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

DÉFINITION 15.19 ♡ **Matrice triangulaire supérieure**

On dit que $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* lorsque :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i > j \implies t_{i,j} = 0$$

T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.

PROPOSITION 15.21 **Dimension du sous-espace des matrices diagonales et du sous-espace des matrices triangulaires**

1. Le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1.
2. Le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
3. Le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

- *Le fait que chacun de ces quatre sous-ensembles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est laissé en exercice au lecteur.*

— *La matrice identité engendre clairement le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent ce sous-ensemble est de dimension 1.*

— *Les matrices élémentaires $\left(E_{i,i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ engendrent clairement le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent : $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$.*

— *De même les matrices élémentaires $\left(E_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1,n]\!], j \geq i}$ engendrent le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de telles matrices et donc : $\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

PROPOSITION 15.22 ♡ **Opérations algébriques avec les matrices diagonales et les matrices triangulaires supérieures**

— Si D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, D_1D_2 est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.

— Si T_1 et T_2 sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, T_1T_2 est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.

— Si $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$; on dit que N est nilpotente.

Démonstration *Exercice.*

COROLLAIRE 15.23 ♡ **Inverse d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire**

- Une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas :

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left({\lambda_1}^{-1},\dots,{\lambda_n}^{-1}\right)$$

- Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22}^{-1} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration

- *Soit* $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *une matrice diagonale. Supposons que :* $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k \neq 0$ *alors clairement la matrice* $\mathrm{Diag}({\lambda_1}^{-1},\dots,{\lambda_n}^{-1})$ *est la matrice inverse de* D. *Réciproquement, si un des coefficients,* λ_1 *par exemple est nul. Alors, posant* $X = (1,0,\dots,0)^T \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc,appliquant la proposition* **??**, A *n'est pas inversible.*
- *De même si* T *est une matrice triangulaire supérieure telle que ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors en posant* $X = (x1,\dots,x_n)^T \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on a :* $TX = 0$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad \lambda_2 x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad \lambda_n x_n = 0 \end{cases}$$

comme les λ_i, *pour* $i \in [\![1,n]\!]$ *sont non nuls, ce système possède comme unique solution le* n*-uplet nul donc* $X = 0$ *et appliquant à nouveau la proposition* **??**, A *n'est pas inversible. Réciproquement, si un des coefficient,* λ_1 *par exemple est nul, alors en posant* $X = (1,0,\dots,0)^T \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc, appliquant la proposition* **??**, A *n'est pas inversible.*

Matrices symétriques, antisymétriques

DÉFINITION 15.20 ♡ **Matrices symétriques, antisymétriques**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *symétrique* si et seulement si $A^T = A$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = a_{i,j}$$

L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *antisymétrique* si et seulement si $A^T = -A$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$$

L'ensemble des matrices antisymétriques de taille n est noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ à n lignes et n colonnes.

Remarque 15.10 Par définition, si $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, et si $i \in [\![1,n]\!]$ alors $a_{i,i} = -a_{i,i}$ et donc $a_{i,i} = 0$. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont donc nuls.

PROPOSITION 15.24
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus :

$$\boxed{\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Démonstration *Posons, pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, $i<j$ posons $F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ et $H_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire (i,j). On a :*

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left\{F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}$$

et

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}\right)$$

ce qui prouve que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, on vérifie facilement que les familles $\left(F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ et $\left(H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ sont libres de cardinal respectif $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. Elles constituent donc des bases de, respectivement, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ ce qui donne leur dimension. On vérifie de plus facilement que si une matrice est à la fois symétrique et antisymétrique, elle est nulle et donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. Comme de plus : $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ on peut affirmer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrices de transvection et de dilatation, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

On considère dans tout ce paragraphe une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

DÉFINITION 15.21 ♡ **Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice**
On appelle **opération élémentaire sur les lignes** (respectivement **sur les colonnes**) de la matrice A une des opérations suivantes :

1. Addition d'une ligne (respectivement d'une colonne) à une autre ligne (respectivement à une autre colonne).
2. Multiplication d'une ligne (respectivement d'une colonne) par un scalaire **non nul**.
3. Échange de deux lignes (respectivement de deux colonnes)

✎ *Notation 15.17* On note, pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:
— $L_i \leftarrow \lambda L_i$ la multiplication de la ligne i par le scalaire λ.
— $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ l'addition de la ligne λL_j à la ligne L_i.
— $L_i \leftrightarrow L_j$ l'échange des lignes i et j.
On a des notations analogues avec les colonnes.
Nous noterons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$, E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne et qui vaut 1.

PROPOSITION 15.25 ♡ **Traduction des oel en termes matriciels**
On a le tableau de correspondances :

k	oel	matrice P	
1	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$	Matrice de transvection
2	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$	Matrice de dilatation
3	$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	

qui se lit ainsi :
Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

PROPOSITION 15.26 ♡ **Traduction des oec en termes matriciels**
On a le tableau de correspondances :

k	oec	matrice P	
1	$C_i \leftarrow \lambda C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{i,j}$	Matrice de transvection
2	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$	Matrice de dilatation
3	$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	

qui se lit ainsi :
Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les colonnes de A revient à multiplier A $\boxed{\text{à droite}}$ par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

Matrices de changement de base

Comme leur nom l'indique, les matrices de changement de base vont nous permettre de calculer la matrice d'une application linéaire dans des bases données quand on connaît cette matrice pour d'autres bases.

DÉFINITION 15.22 ♡ **Matrice de changement de base**
Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension n. On appelle *matrice de passage de e à f* (ou *matrice de changement de base*) et on note $P_{e\to f}$ la matrice de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base e :

$$P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_e\left(f_1, \dots, f_n\right)$$

Remarque 15.11 $P_{e\to f} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 15.27 ♡ **Propriétés des matrices de changement de base**
Soient e, f et g trois bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On a :

1. $$\boxed{P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E)}$$
2. $$\boxed{P_{e\to g} = P_{e\to f} \times P_{f\to g}}$$
3. $P_{e\to f}$ est inversible et :
$$\boxed{\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}}$$

Démonstration

1. *La première égalité est laissée en exercice.*
2. *On a, par application du théorème* **??** *:* $P_{e\to f} \times P_{f\to g} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow g}(id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E \circ id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E) = P_{e\to g}$.
3. *Par application de la proposition précédente, on a :* $P_{e\to f} \times P_{f\to e} = P_{e\to e} = I_n$ *et* $P_{f\to e} \times P_{e\to f} = P_{f\to f} = I_n$ *Par conséquent,* $P_{e\to f}$ *est inversible et :* $\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}$.

COROLLAIRE 15.28 ♡♡ **Caractérisation matricielle de la liberté d'une famille de vecteurs**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et x une famille de n vecteurs de E. Alors, la famille x est libre si et seulement si la matrice des n vecteurs de la famille x dans la base e, $\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que la famille x soit libre. Comme elle est de cardinal n, elle forme une base de e et donc, appliquant la propriété précédente,* $\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n) = P_{e\to x}$ *est une matrice de passage de la base e à la base x et est donc inversible.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ *est inversible alors cette matrice représente un automorphisme u de* E *dans la base e et comme l'image d'une base de* E *par un automorphisme de* E *est une base de* E*, on en déduit que x est une base de* E*. En particulier x est libre.*

Proposition 15.29 ♡ **Toute matrice inversible s'interprète comme une matrice de changement de base**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors pour toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base e' de E telle que $A = P_{e\to e'}$.

Démonstration *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées d'une famille de vecteurs f dans la base e : $A = \mathrm{Mat}_e\left(f_1,\dots,f_n\right)$. Par application de la proposition précédente, la famille f est libre et donc $A = \mathrm{Mat}_e\left(f\right) = P_{e\to f}$.*

15.4 Changement de base

15.4.1 Pour un vecteur

Proposition 15.30 ♡ **Formule de changement de base pour un vecteur**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Considérons e et f deux bases de E et $x \in E$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_f(x) = P_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(x)}.$$

Démonstration *Posons $\mathrm{Mat}_f(x) = \left(X'_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Mat}_e(x) = \left(X_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $P_{f\to e} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On a :*

$$x = \sum_{i=1}^n X'_i f_i = \sum_{j=1}^n X_j e_j \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n X_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^n X_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} X_j\right) f_i \\ &= \sum_{i=1}^n X'_i f_i \end{aligned}$$

Donc, par identification, on a bien : $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad X'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} X_j$.

On peut aussi prouver ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_f(x) &= \mathrm{Mat}_f(\mathrm{Id}_E(x)) \\ &= \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_e(x) \quad \text{par application de } \textbf{??} \\ &= P_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

15.4.2 Pour une application linéaire

Proposition 15.31 ♡ **Formule de changement de base pour une application linéaire**
On considère :

- e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
- f et f' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F

et $u \in \mathfrak{L}(E,F)$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = P_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times P_{e\to e'}}$$

Démonstration *Soit $x \in E$ et $y = u(x)$. Soit $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_f\left(y\right)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $Y' = \mathrm{Mat}_{f'}\left(y\right)$, $A = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u)$. On a, par application du théorème **??** : $Y = AX$ et $Y' = A'X'$. De plus, par application de la proposition précédente : $X = P_{e\to e'}X'$ et $Y = P_{f\to f'}Y'$. On a donc :*

$$Y' = P_{f'\to f} Y = P_{f'\to f} AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X' = A'P_{e'\to e}X.$$

Par conséquent : $A'P_{e'\to e} = P_{f'\to f}A$ *ce qui donne bien :* $A' = P_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times P_{e\to e'}$.

On peut aussi démontrer cette formule ainsi :

$$A' = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E)$$
$$= \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow f}(\mathrm{Id}_F) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e\leftarrow e'}(\mathrm{Id}_E)$$
$$= P_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times P_{e\to e'}$$

15.4.3 Pour un endomorphisme

PROPOSITION 15.32 ♡ **Formule de changement de base pour un endomorphisme**
On considère e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P_{e'\to e} \times \mathrm{Mat}_e(u) \times P_{e\to e'}}$$

qui s'écrit aussi avec $P = P_{e\to e'}, A = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$:

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Démonstration : C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

Remarque 15.12 Avec les notations précédentes, si $A' = P^{-1}AP$ alors $A'^n = P^{-1}A^nP$.

15.4.4 Pour une forme linéaire

PROPOSITION 15.33 ♡ **Formule de changement de base pour une forme linéaire**
Soient e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si φ est une forme linéaire sur E, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_e(\varphi) \times P_{e\to e'}}.$$

Démonstration : C'est encore un corollaire immédiat de la proposition précédente.

15.4.5 Un exemple

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique e et les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,3)$.

1. Montrons que le système $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, f est forcément une base de E. On écrit $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. On écrit la matrice de passage $P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On inverse cette matrice en cherchant une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $P_{e\to f} \times B = I_2$. On obtient un système et on trouve $P_{f\to e} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
4. Soit le vecteur $x = (4,1)$. On cherche matriciellement les coordonnées du vecteur x dans la base f. On trouve $\mathrm{Mat}_f(x) = P_{f\to e}\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$.
5. Soit l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \right.$. On écrit les matrices de cet endomorphisme dans les bases e et f : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_f(u) = P_{f\to e}\mathrm{Mat}_e(u)P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$.

15.5 Rang d'une matrice

On va développer dans cette section des méthodes pratiques pour :

1. calculer le rang d'une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases données.
2. tester si une matrice (et donc si l'endomophisme associé) est inversible.

15.5.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 15.23 ♡♡♡ **Rang d'une matrice**
On appelle *rang* de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, et on note $\operatorname{rg} A$, le rang de la famille constituée des vecteurs colonnes $C_1,...,C_p$ de A dans $\mathbb{K}^q$.

Exemple 15.18

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3,\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=3,\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}=2.$$

PROPOSITION 15.34 ♡♡♡ **Le rang d'une matrice** A **est égal au rang de l'application linéaire** $X \mapsto AX$
Soit $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On note $\Theta : \begin{cases} \mathfrak{M}_q(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^q & \longrightarrow & \mathfrak{M}_q(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^q \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$. Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\Theta)$.

Démonstration *On a* $\operatorname{rg}(\Theta) = \dim \mathrm{Vect}\left(\Theta(e_1),\dots,\dots\Theta\left(e_q\right)\right) = \dim \mathrm{Vect}\left(C_1,\dots,C_q\right) = \operatorname{rg}(A)$.

PROPOSITION 15.35 ♡♡♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base e.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q muni d'une base f.
3. $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathfrak{L}(E,F)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$ alors on a : $\boxed{\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A}$.

Démonstration *D'après la proposition* **??** *page* **??**, *l'application* $\theta : F \to \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ *qui à un vecteur de* F *associe sa matrice dans la base* f *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. On identifie dans la suite* $\mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}^q$. *Notons*

$$\mathscr{F} = \mathrm{Vect}\left(u(e_1),\dots,u\left(e_p\right)\right) \subset F \quad \text{et} \quad \mathscr{G} = \mathrm{Vect}\left(C_1,\dots,C_p\right) \subset \mathbb{K}^q.$$

Rappelons que $\operatorname{rg} u = \dim \mathscr{F}$ *et que* $\operatorname{rg} A = \dim \mathscr{G}$. *Mais* $\theta(\mathscr{F}) = \mathscr{G}$ *donc* $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{G}$ *et* $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A$.

COROLLAIRE 15.36 **Le rang d'une matrice** A **est égal au rang du système** $AX = 0$
Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est égal au rang du système $AX = 0$.

Démonstration *Pour un système linéaire, on a*

$$\#\,\text{inconnues} = \#\,\text{inconnues principales} + \#\,\text{inconnues secondaires}.$$

Le rang du sytème, c'est-à-dire le nombre de pivots, est donné par le nombre d'inconnues principales, c'est à dire # inconnues − # inconnues secondaires. *Le nombre d'inconnues secondaire correspond à la dimension du noyau* $AX = 0$. *Mais d'après la formule du rang, la dimension de ce noyau est* # inconnues $-\operatorname{rg}(A)$.

THÉORÈME 15.37 ♡♡♡ **Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille**
$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démonstration *Soient* e *une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *et soit* u *l'unique endomorphisme de* E *tel que :* $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. *On a :* A *inversible* $\iff$ u *est un automorphisme de* E $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = n$.

PROPOSITION 15.38 ♡♡♡
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathrm{Mat}_e(x_1,\ldots,x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1,\ldots,x_n)$ est une base de E.

Démonstration *Soit u l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = x_i$. Notons $A = \mathrm{Mat}_e(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Mat}_e(u)$. On a : A est inversible $\Longleftrightarrow$ u est un automorphisme de E $\Longleftrightarrow$ l'image d'une base de E par u est une base de E.*

PROPOSITION 15.39 Le rang d'une matrice est inchangé par multiplication à gauche ou à droite de cette matrice par une matrice inversible
Soit $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

1. $\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$ pour tout $Q \in GL_q(\mathbb{K})$
2. $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$ pour tout $P \in GL_p(\mathbb{K})$

Démonstration *C'est une conséquence directe de l'invariance du rang d'une application linéaire par multiplication à droite ou à gauche par un isomorphisme.*

THÉORÈME 15.40 ♡
Soit $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On a : A est une matrice de rang r si et seulement si il existe $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$ où

$$J_r = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & r & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, e une base de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et f une base de F. Soit $u \in \mathfrak{L}(E,F)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = A$. On a : $\mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}A = r$. Faisant comme dans la démonstration du théorème 13.27, on peut décomposer E en la somme : $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus G$ où G est un sous-espace de E tel que $u_{|G} : G \to \mathrm{Im}\,u$ est un isomorphisme. Par conséquent, $\dim G = \dim \mathrm{Im}\,u = \mathrm{rg}\,u = r$. Soit $\left(e'_1,\ldots,e'_r\right)$ une base de G et $\left(e'_{r+1},\ldots,e'_p\right)$ une base de $\mathrm{Ker}\,f$. $e' = \left(e'_1,\ldots,e'_r,e'_{r+1},\ldots,e'_n\right)$ est donc une base de E et l'image d'une base d'un espace vectoriel par un isomorphisme étant une base de l'espace vectoriel d'arrivée, $\left(u\left(e'_1\right),\ldots,u\left(e'_r\right)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\,f$ qu'on peut compléter en une base $f' = \left(u\left(e'1\right),\ldots,u\left(e'_r\right),f'_{r+1},\ldots,f'_q\right)$ de F. On a : $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = J_r$ et utilisant les formules de changement de base, on a :*

$$A = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = P_{f\to f'} \times \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) \times P_{e'\to e}$$

qui est de la forme voulue.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q. Soit e une base de E, f une base de F et :*
— *e' une autre base de E telle que $P_{e'\to e} = P$.*
— *f' une autre base de F telle que $P_{f'\to f} = Q$.*
Soit $u \in \mathfrak{L}(E,F)$ tel que : $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = J_r$. Interprétant la formule $A = QJ_rP$ comme une formule de changement de base, on a : $A = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$. Par conséquent : $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}J_r$.

COROLLAIRE 15.41 ♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée**
Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\left(A^T\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration *Posons $r = \mathrm{rg}A$. En appliquant la proposition précédente, il existe $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$. Par conséquent : $A^T = P^T {J_r}^T Q^T = P^T J_r Q^T$ et $P^T \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q^T \in GL_q(\mathbb{K})$. Par conséquent, appliquant à nouveau la proposition précédente : $\mathrm{rg}A^T = r$.*

DÉFINITION 15.24 **Matrices équivalentes**
Deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* si et seulement s'il existe deux matrices inversibles $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QBP^{-1}$.

Remarque 15.13 Un corollaire du théorème précédent est que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

DÉFINITION 15.25 **Matrices semblables**
Deux matrices carrées $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarque 15.14 Deux matrices semblables sont *a fortiori* équivalentes.

Remarque 15.15 Deux matrices semblables ont même trace.

15.5.2 Calcul pratique du rang d'une matrice

PROPOSITION 15.42 ♡ **Deux matrices déduites l'une de l'autre par une oel ou une oec ont même rang**
Deux matrices obtenues l'une de l'autre par une oel ou une oec sont de même rang.

Démonstration *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* P *une matrice correspondant à une oel ou une oec.* P *est donc inversible. Posons* $B = PA$. *Soit* $r = \text{rg}(A)$. *On applique le théorème* **??**. *Il existe des matrices* $Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $Q_2 \in GL_p(\mathbb{K})$ *telles que* $A = Q_1 I_r Q_2$. *On a donc :* $B = PQ_1 I_r Q_2 = Q_0 I_r Q_2$ *avec* $Q_0 = PQ_1$ *qui est une matrice inversible de* $GL_n(\mathbb{K})$. *Par conséquent,* B *étant de la forme* $Q_0 I_r Q_2$ *où* Q_0 *et* Q_1 *sont inversibles. On applique à nouveau la proposition* **??** *et on peut affirmer que* B *est de rang* r.

LEMME 15.43 ♡
Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On a :

$$\text{rg}\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = 1 + \text{rg}A'.$$

Démonstration *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Par définition, $\text{rg}A = \dim \text{V}ect(L_1, \dots, L_n)$ *où* $L_1, \dots, L_n$ *représentent les vecteurs colonnes de* A^T. *Posons* $F = \text{V}ect(L_1)$ *et* $G = \text{V}ect(L_2, \dots, L_n)$. *Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^p$ *sont en somme directe. Soit* $L = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F \cap G$. *Comme* $L \in F$, *on a :* $L = \lambda L_1$. *Comme* $L \in G$, *on a aussi* $\ell_1 = 0$. *Par conséquent, en regardant la première coordonnée,* $\lambda\alpha = 0$, *d'où* $\lambda = 0$ *et donc* $L = 0$. *Donc* F *et* G *sont en somme directe. On a donc* $\dim \text{V}ect(L_1, \dots, L_n) = \dim F + \dim G$ *ce qui s'écrit aussi* $\text{rg}A = 1 + \text{rg}A'$.

PLAN 15.4 : Application au calcul du rang d'une matrice A

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique le plan suivant :

1. *Si* $A = 0$ *alors* $\text{rg}A = 0$.
2. *Sinon* A *possède un coefficient* α *non nul. Par des permutations de lignes et de colonnes, on peut supposer que* α *est en position* $(1,1)$. *En retranchant aux* $n-1$ *dernières lignes un multiple judicieusement choisi de la première ligne, on obtient une matrice du type :*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   et donc $\text{rg}A = 1 + \text{rg}A'$
3. *On se ramène ainsi à une matrice de taille* $(n-1) \times (p-1)$ *sur laquelle il suffit de réitérer le procédé jusqu'à obtenir une matrice de taille nulle.*

Exemple 15.19 Calculons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

PROPOSITION 15.44 ♡ **Méthode du pivot de Gauss**
Par une suite d'oel, on peut transformer une matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure (inversible !).

Démonstration *On va démontrer cette proposition en effectuant une récurrence sur la taille n de cette matrice.*

1. *Si $n = 1$ la proposition est évidente.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.*
3. *Supposons la proposition vraie au rang $n-1$ et prouvons la au rang n. Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$. Quitte à permuter les lignes de A, cette matrice étant inversible, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. Par des oel, en utilisant comme pivot le coefficient a_{11}, on peut alors transformer A en une matrice B de la forme :*

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

et on a, par application du lemme précédent : $\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}B = 1 + \operatorname{rg}A'$. On applique l'hypothèse de récurrence à A', on peut transformer A', via une suite finie d'oel, en une matrice triangulaire. On effectue les oel correspondantes sur la matrice B et on la transforme en une matrice triangulaire.

4. *La proposition est alors démontrée par application du principe de récurrence.*

Remarque 15.16 Grâce aux opérations élémentaires sur les lignes et en s'inspirant de l'algorithme précédent, on peut calculer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donnée. Il suffit de suivre les étapes suivantes.

1. On juxtapose A et I_n.
2. **Grâce à des oel de type 1 et 3 sur** A **on se ramène à une matrice triangulaire supérieure.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $P_1, \dots, P_r$ de type 1 ou 3. La matrice triangulaire obtenue est $P_r \dots P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $P_r \dots P_1$.
3. **On effectue des oel de type 2 sur** $P_r \dots P_1.A$ **afin d'obtenir une matrice triangulaire dont la diagonale ne comporte que des 1.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $Q_1, \dots, Q_s$ de type 2. La matrice triangulaire obtenue est $Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1$.
4. Enfin, à nouveau **grâce à des oel de type 1, on se ramène à la matrice** I_n**.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche $Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1.A$ par des matrices $R_1, \dots, R_t$ de type 1. La matrice triangulaire obtenue est $R_t \dots R_1.Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $R_t \dots R_1.Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1$.
5. Au final, on a donc $R_t \dots R_1.Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1.A = I_n$. La matrice $R_t \dots R_1.Q_s \dots Q_1.P_r \dots P_1$ est donc l'inverse de A.

Exemple 15.20 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3 comme on le vérifie en appliquant la méthode **??**. Calculons son inverse :

$$\begin{array}{rrrcccrrr}
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & L_2 & \leftarrow & L_2+L_1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & & & & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & L_3 & \leftarrow & L_3+L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1/2 & L_2 & \leftarrow & L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & L_3 & \leftarrow & 2L_3 & 1 & 1 & 2 \\
 & & & & & & & & \\
1 & 1 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1+L_3 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & L_2 & \leftarrow & L_2+L_3/2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2 \\
 & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1-L_2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

et on en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.