

Chapitre 12

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Table des matières

Pour bien aborder ce chapitre

Nous poursuivons dans ce chapitre le travail commencé dans le précédent et nous allons étendre la notion de limite aux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Si Leibniz parle de fonction (dans le sens de quantité dépendant d'une autre), Johann Bernouilli est le premier à parler de « fonction d'une ordonnée », ce que Leibniz reprendra et les deux discuteront de la façon de désigner une fonction par un symbole.

En 1718, Bernouilli publie la première définition formelle. Euler la reprend en 1748 dans son «*Introductio in analysin infinitorum* ». Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée de n'importe quelle façon de la quantité variable et de nombres ou quantités constantes. Mais dans les «*Institutiones calculi differentialis* », il définit une fonction comme une variable dépendant d'une autre variable. Cette double vision va se poursuivre tout le 18^e siècle. On la retrouve, par exemple, chez Lagrange.

En 1821, dans son «*Cours d'analyse* », Cauchy définit exclusivement une fonction comme une variable dépendant d'une autre variable. Mais en 1822, Fourier dans sa «*Théorie analytique de la chaleur* », écrit « En générale, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire [...]. On ne suppose pas que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune. Elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité ». Pour autant, dans une « démonstration » sur la convergence d'une série, il suppose implicitement que toute fonction est continue.

Il faut attendre Lejeune-Dirichlet en 1837 pour avoir une définition moderne de la notion de fonction. Elle sera reprise presque mot pour mot par Riemann en 1851. Le point de vue d'Euler et Lagrange n'a cependant pas immédiatement disparu et Weierstrass considérait la définition de Dirichlet comme « intenable et improductive ». On peut voir le travail de Weierstrass comme une recherche pour obtenir la définition la plus utile de la notion de fonction.

Dans ce chapitre, après avoir introduit les notions de limite et de continuité en un point, nous réaliserons l'étude des propriétés locales des fonctions, c'est-à-dire des propriétés vraies dans un « voisinage suffisamment petit » d'un point donné. Dans la seconde partie du chapitre, nous énoncerons des théorèmes globaux, c'est-à-dire vrais sur un intervalle tout entier. Parmi ces théorèmes, quatre sont fondamentaux :

- 1 L'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle (ce théorème est équivalent au théorème des valeurs intermédiaires).

- ② L'image d'un segment par une application continue est un segment. (Ce théorème est équivalent au théorème du maximum, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).
- ③ Le théorème de Heine qui aura des conséquences importantes dans la suite du cours.
- ④ Le théorème de continuité de la bijection réciproque.

12.1 Vocabulaire

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial de \mathbb{R} (c'est-à-dire non vide et non réduit à un point). On considère l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

12.1.1 L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

DÉFINITION 12.1 Opérations sur les fonctions

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on définit les lois suivantes.

— *Addition.* Si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f + g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

— *Multiplication par un réel.* Si $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on définit l'application $(\lambda f) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

— *Multiplication de deux fonctions.* Si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, on définit l'application $(fg) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

— *Valeur absolue d'une fonction.* Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on définit l'application $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

— *Maximum, Minimum de deux fonctions.* Si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, on définit les deux applications $\sup(f + g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\inf(f + g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I, \quad \sup(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$\forall x \in I, \quad \inf(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Remarque 12.1 La relation d'ordre \leq sur \mathbb{R} s'étend naturellement à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ en posant, pour $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$

$$f \leq g \iff \forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$$

PROPOSITION 12.1

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$\bullet \quad |f| = \sup(f, -f)$$

$$\bullet \quad \sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$\bullet \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

Remarque 12.2 En posant $\begin{cases} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = \sup(-f, 0) \end{cases}$, on vérifie que $\begin{cases} f^+ = \frac{|f| + f}{2} \\ f^- = \frac{|f| - f}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$

Remarque 12.3

- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (où « \cdot » désigne la multiplication par un scalaire) possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ (où « \times » désigne le produit entre deux fonctions) possède une structure d'anneau.

— L'élément neutre pour l'addition est la fonction identiquement nulle, $0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$ et l'élément neutre

pour la multiplication est la fonction constante $1_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$.

12.1.2 Fonctions bornées

DÉFINITION 12.2 Fonction majorée, minorée, bornée

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est :

- *Majorée* si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
- *Minorée* si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$.
- *Bornée* si elle est majorée et minorée.

PROPOSITION 12.2 Pour montrer qu'une fonction est bornée sur I, il suffit de la majorer, sur I, en valeur absolue

Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in I, |f(x)| \leq \alpha.$$

PROPOSITION 12.3

- Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée (l'ensemble des fonctions bornées forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).
- Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.

Notation 12.1

- Dire que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est majorée revient à dire que $\{f(x) \mid x \in I\}$ est un sous-ensemble majoré de \mathbb{R} . Comme ce sous-ensemble est non vide, d'après l'axiome de la borne supérieure, il possède une borne supérieure qu'on note $\sup_I f$.
- De même, si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est minorée alors ce sous-ensemble est minoré. On note $\inf_I f$ sa borne inférieure.
- Si une fonction f est bornée, puisque $|f|$ est majorée, la partie $\{|f(x)|; x \in I\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup_I |f| = \|f\|_\infty$.

DÉFINITION 12.3 Extremum, Extremum local

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et soit $a \in I$

- On dit que f admet un *maximum* en a si et seulement si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un *maximum local* en a si et seulement si $\exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \implies f(x) \leq f(a)$.
- On définit de manière analogue la notion de *minimum* et de *minimum local*.
- On dit que f admet un *extrémum* (respectivement un *extremum local*) si f admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).

Notation 12.2 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- Si f possède un maximum sur I , on le note $\max_I f$
- De même, si f possède un minimum sur I , on le note $\min_I f$

12.1.3 Monotonie

DÉFINITION 12.4 Fonction croissante, décroissante, strictement croissante,

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que :

- f est *croissante* si et seulement si $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *décroissante* si et seulement si $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- f est *monotone* si et seulement si f est croissante ou décroissante.

On dit de plus que f est *strictement croissante*, *strictement décroissante* ou *strictement monotone* si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

PROPOSITION 12.4 Règle des signes

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ toutes deux monotones et telles que $f(I) \subset J$. On peut alors définir la fonction composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est également monotone et l'on a la règle des signes pour la monotonie de $g \circ f$.

	g		
f	↗	↘	
↗	↗	↘	
↘	↘	↗	

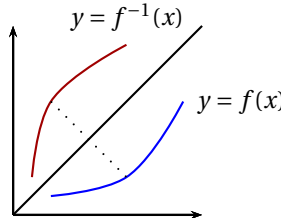
Démonstration Supposons par exemple f croissante sur I et g décroissante sur J . Montrons que $g \circ f$ est décroissante. Soient $(x, y) \in I$ tels que $x \leq y$. Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$ et puisque g est décroissante, $g(f(x)) \geq g(f(y))$ et donc $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$.

PROPOSITION 12.5

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone sur I et soit $J = f(I)$ alors f réalise une bijection de I sur J et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est strictement monotone de même sens que f .

Démonstration Supposons par exemple la fonction f strictement croissante sur I . Montrons qu'alors f est injective. Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$ par l'absurde. Si l'on avait $x \neq y$, on aurait $x < y$ ou $y < x$, mais alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. Puisque $J = f(I)$, par définition de l'image directe d'une fonction, la fonction f est surjective de I vers J . Elle réalise donc une bijection de I vers J . Vérifions que la fonction f^{-1} est également strictement croissante. Soient $(X, Y) \in J^2$ tels que $X < Y$. Notons $x = f^{-1}(X)$ et $y = f^{-1}(Y)$. Si l'on avait $y \leq x$, puisque f est croissante, on aurait $f(y) \leq f(x)$ et donc $Y \leq X$ ce qui est faux. On en déduit que $x < y$ donc que $f^{-1}(X) < f^{-1}(Y)$.

Remarque 12.4 Soit f une fonction bijective sur I . Le graphe de f^{-1} , dans un repère orthonormé, se déduit de celui de f par une symétrie d'axe la première bissectrice.



12.1.4 Parité périodicité

DÉFINITION 12.5 Fonction paire, impaire

Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à l'origine (c'est-à-dire que si $x \in I$ alors $-x \in I$). On dit que

- La fonction f est *paire* si et seulement si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
- La fonction f est *impaire* si et seulement si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Remarque 12.5 Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque 12.6 L'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) est stable par combinaison linéaire. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Les sous-espaces de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ formés par les fonctions paires et par les fonctions impaires sont de plus supplémentaires dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

DÉFINITION 12.6 Fonction périodique

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est périodique si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. On dit que T est une période de f et que f est T -périodique.

Remarque 12.7 Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions T -périodiques sur \mathbb{R} est stable par combinaison linéaire et par produit. En particulier, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

12.1.5 Fonctions lipschitziennes

BIO 1 Rudolf Lipschitz, né le 14 mai 1832 à Königsberg, mort le 07 octobre 1903 à Bonn

Mathématicien Allemand. Rudolf Lipschitz se caractérise par la grande diversité de ses contributions : fonctions de Bessel, séries de Fourier (il est à l'origine d'un critère pour tester leur convergence), géométrie Riemannienne, mécanique (il travailla à résoudre les équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi), théorie des nombres (il étudia les quaternions et, plus généralement, les algèbres de Clifford qu'il redécouvra et qu'il appliqua à la représentation des rotations d'un espace euclidien). Il est en particulier célèbre pour son amélioration du théorème de Cauchy quant à l'existence des solutions d'une équation différentielle. C'est lors de ce travail qu'il introduisit les fonctions qui maintenant portent son nom et que nous allons étudier dans ce paragraphe.



DÉFINITION 12.7 Fonctions lipschitziennes

Soit un réel $k \geq 0$.

— On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

- On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* sur l'intervalle I s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit k -lipschitzienne.
— On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I .

Remarque 12.8 On comprend mieux cette définition en écrivant la propriété équivalente,

$$\exists k \geq 0, \forall (x, y) \in I^2, x \neq y, \quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$$

Une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si l'ensemble des pentes de toutes ses cordes est borné.

PROPOSITION 12.6 Opérations sur les fonctions lipschitziennes

1. Une combinaison linéaire de deux fonctions lipschitzienne est encore lipschitzienne. Si $f, g \in \mathcal{L}(I)$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(I)$.
2. La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne. Si $f \in \mathcal{L}(I)$ et $g \in \mathcal{L}(J)$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(I)$.
3. Soit $c \in I$, on note $I_1 = I \cap]-\infty, c]$ et $I_2 = I \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2 , alors elle est lipschitzienne sur I .

Démonstration

1. Puisque f et g sont lipschitziennes sur I , il existe deux constantes $k_1, k_2 \geq 0$ telles que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k_1|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq k_2|x - y|$. Posons $k = |\alpha|k_1 + |\beta|k_2$ et vérifions que $\alpha f + \beta g$ est k -lipschitzienne. Soit $(x, y) \in I^2$, utilisons l'inégalité triangulaire

$$|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| = |\alpha(f(x) - f(y)) + \beta(g(x) - g(y))| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leq (|\alpha|k_1 + |\beta|k_2)|x - y|$$

2. Comme f est lipschitzienne sur I , il existe $k_1 \geq 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k_1|x - y|$. Puisque g est lipschitzienne sur J , il existe $k_2 \geq 0$ tel que $\forall (X, Y) \in J^2, |g(X) - g(Y)| \leq k_2|X - Y|$. Posons $k = k_1 k_2$ et vérifions que $g \circ f$ est k -lipschitzienne sur I . Soient $(x, y) \in I^2$, puisque $X = f(x) \in J$ et $Y = f(y) \in J$,

$$|g \circ f(x) - g \circ f(y)| = |g(X) - g(Y)| \leq k_2|X - Y| = k_2|f(x) - f(y)| \leq k_1 k_2|x - y|$$

3. Puisque f est lipschitzienne sur I_1 , il existe $k_1 \geq 0$ tel que $\forall (x, y) \in I_1^2, |f(x) - f(y)| \leq k_1|x - y|$ et puisque f est lipschitzienne sur I_2 , il existe $k_2 \geq 0$ tel que $\forall (x, y) \in I_2^2, |f(x) - f(y)| \leq k_2|x - y|$. Posons $k = \max(k_1, k_2)$ et vérifions que f est k -lipschitzienne sur I . Soient $(x, y) \in I^2$. Étudions trois cas,
 - Si $x, y \in I_1$, alors $|f(x) - f(y)| \leq k_1|x - y| \leq k|x - y|$.
 - Si $x, y \in I_2$, alors $|f(x) - f(y)| \leq k_2|x - y| \leq k|x - y|$.

— Si $x \in I_1$ et $y \in I_2$ (l'autre cas est similaire), puisque $(x, c) \in I_1^2$ et $(c, y) \in I_2^2$ et que $x < c < y$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |[f(x) - f(c)] + [f(c) - f(y)]| \leq |f(x) - f(c)| \leq k_1|c - x| + k_2|y - c| \\ &= k_1(c - x) + k_2(y - c) \leq k(c - x) + k(y - c) = k(y - x) = k|y - x| \end{aligned}$$

12.2 Limite et continuité en un point

12.2.1 Voisinage

DÉFINITION 12.8 Point adhérent

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} . On dit qu'un réel x est *adhérent* à la partie A lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $|x - a| \leq \varepsilon$. On note \bar{A} l'ensemble des points adhérents de la partie A .

Remarque 12.9 On dira également que $+\infty$ est un point adhérent à la partie A lorsque $\forall M > 0, \exists a \in A$ tel que $a \geq M$ et que $-\infty$ est adhérent à la partie A lorsque $\forall m < 0, \exists a \in A$ tel que $a \leq m$.

DÉFINITION 12.9 Voisinage d'un point

Soit V une partie de \mathbb{R} et un point adhérent $a \in \bar{V}$. On dit que

- V est un *voisinage de a* si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$.
- V est un *voisinage de $+\infty$* si et seulement si il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\subset V$.
- V est un *voisinage de $-\infty$* si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, A[\subset V$.

On note V_a l'ensemble des voisinages du point a .

DÉFINITION 12.10 Propriété vraie au voisinage d'un point

Soient f une fonction définie sur une partie I de \mathbb{R} et $a \in \bar{I}$.

- On dit que la fonction f est définie *au voisinage* du point a si et seulement s'il existe un voisinage V de a telle que $V \subset I$.
- On dit que f vérifie la propriété \mathcal{P} *au voisinage* du point a si et seulement s'il existe un voisinage $V \subset I$ de a tel que la restriction de f à V vérifie la propriété \mathcal{P} .

12.2.2 Notion de limite

DÉFINITION 12.11 ♥♥♥ Limite d'une fonction en un point

Soient une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, un point adhérent $a \in \bar{I}$ et un réel $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f *admet pour limite* le réel ℓ en a lorsque

- Si $a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Si $a = +\infty : \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Si $a = -\infty : \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq m \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

PLAN 12.1 : Pour montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

on utilise le plan

1. Soit $\varepsilon > 0$.
2. Posons $\eta = \dots > 0$.
3. Vérifions : soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$... on a bien $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Remarque 12.10 Comme pour les suites, on peut utiliser des inégalités strictes $|f(x) - \ell| < \varepsilon, |x - a| < \eta, x > M$... dans ces définitions.

PROPOSITION 12.7 Unicité de la limite

Si f admet pour limites en $a \in \bar{I}$ les réels ℓ et ℓ' alors $\ell = \ell'$. On dira que ℓ est *la* limite de f en a et on écrira $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\ell = \lim_a f$.

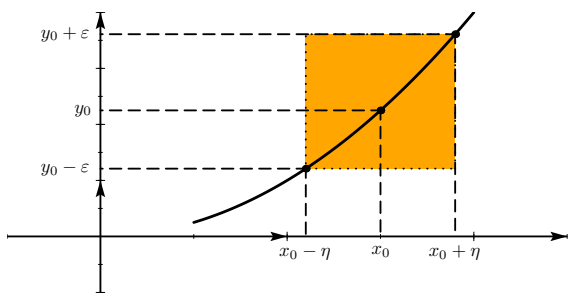


FIGURE 12.1 – Avec $\epsilon = 0.4$

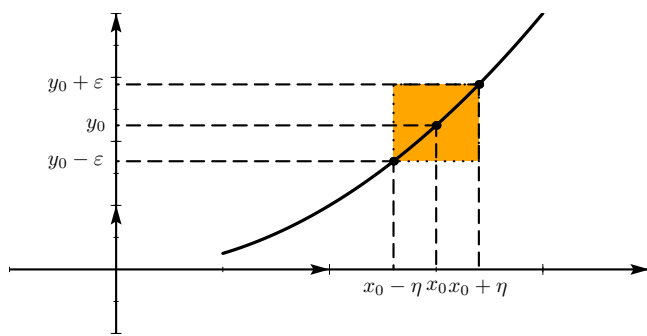


FIGURE 12.2 – Avec $\epsilon = 0.2$

Démonstration Démontrons le résultat par exemple lorsque $a \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$, et posons $\epsilon = |\ell' - \ell|/2 > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$. De même, puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell'| < \epsilon$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Puisque a est adhérent à I , il existe $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$ mais alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \epsilon$ et donc

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\epsilon = |\ell' - \ell|$$

ce qui est absurde.

DÉFINITION 12.12 Limite infinie

Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un point adhérent $a \in I$. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a lorsque

- Si $a \in \mathbb{R} : \forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$).
- Si $a = +\infty : \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \forall x \in I, x \geq A \implies f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$).
- Si $a = -\infty : \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \forall x \in I, x \leq A \implies f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$).

On notera alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$).

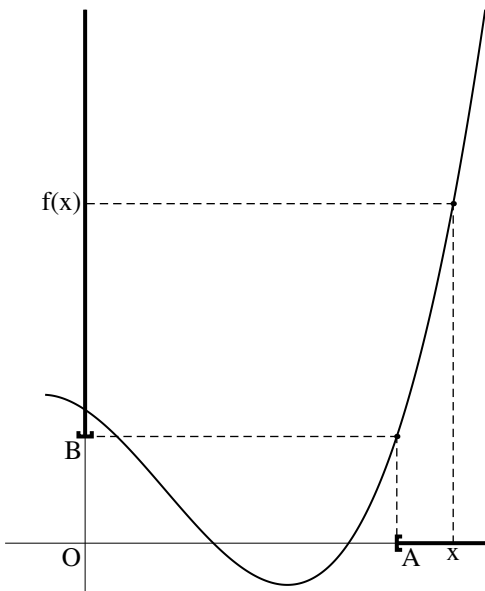


FIGURE 12.3 – $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

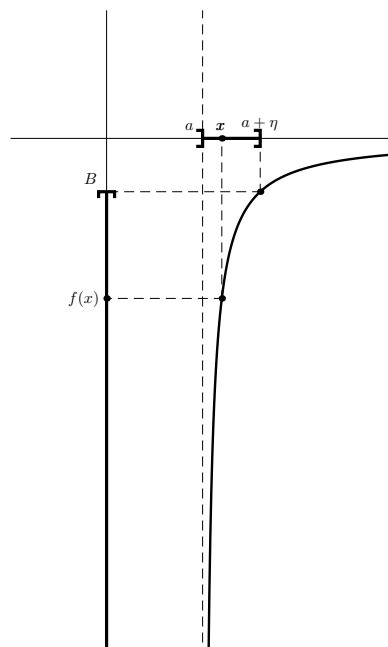


FIGURE 12.4 – $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$

PLAN 12.2 : Pour montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

Dans le cas où a est fini, on utilise le plan

1. Soit $B \in \mathbb{R}$.

2. Posons $\eta = \dots > 0$.
3. Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$.
4. On a bien $f(x) \geq B$.

Pour montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$,

1. Soit $B \in \mathbb{R}$.
2. Posons $A = \dots$.
3. Soit $x \in I$ tel que $x \geq A$.
4. On a bien $f(x) \leq B$.

Voici une formulation équivalente de la notion de limite (finie et infinie) qui ne fait intervenir que la notion de voisinages.

PROPOSITION 12.8 Définition de la limite à l'aide des voisinages

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff \forall W \in \mathcal{V}_l, \exists V \in \mathcal{V}_a, f(V \cap I) \subset W$$

Démonstration Démontrons le résultat dans le cas où a et l sont finis.

- \Rightarrow Soit W un voisinage de l , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset W$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$. Posons donc $V =]a - \eta, a + \eta[$ qui est un voisinage du point a . Soit $y \in f(V \cap I)$, il existe $x \in V \cap I$ tel que $y = f(x)$ et puisque $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$ et donc $y = f(x) \in W$.
- \Leftarrow Soit $\varepsilon > 0$. Posons $W =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ qui est un voisinage du point l . Il existe donc un voisinage V du point a tel que $f(V \cap I) \subset W$. D'après la définition d'un voisinage, il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset V$. Soit alors $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$, puisque $x \in V \cap I$, $f(x) \in W$ d'où $|f(x) - l| < \varepsilon$.

PROPOSITION 12.9 Limite finie \implies localement bornée

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction admettant une limite finie en $a \in \bar{I}$. Alors il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction f est bornée. a .

Démonstration Démontrons le résultat lorsque $a \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq 1$. Notons $V =]a - \eta, a + \eta[$ qui est un voisinage du point a et $M = |l| + 1$. Pour $x \in V \cap I$, d'après la minoration de l'inégalité triangulaire, $|f(x)| - |l| \leq |f(x) - l| \leq 1$ d'où $|f(x)| \leq M$.

PROPOSITION 12.10 \heartsuit Transformation de limite en inégalité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$ et deux réels $k, k' \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.
- (H2) $k < l < k'$.

Alors il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V \cap I, k \leq f(x) \leq k'$.

Démonstration Posons $\varepsilon = \min(l - k, k' - l)$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V \cap I$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ d'où si $x \in V \cap I$, $f(x) - l \leq \varepsilon$ ce qui donne $f(x) \leq l + \varepsilon \leq l + (k' - l) \leq k'$ et aussi $l - f(x) \leq \varepsilon$ ce qui donne $f(x) \geq l - \varepsilon \geq k$.

Pour montrer qu'une fonction tend vers l lorsque x tend vers a , on majore en pratique $|f(x) - l|$ par une fonction qui tend vers zéro.

PROPOSITION 12.11 Théorème de majoration

Soient

- une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.
- θ une fonction définie sur un voisinage V de a

On suppose que

- (H1) $\forall x \in V, |f(x) - l| \leq \theta(x)$.
- (H2) $\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Démonstration Remarquons qu'en vertu de l'inégalité énoncée dans la première hypothèse, θ est nécessairement positive. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, il existe un voisinage V_2 de a tel que : $\forall x \in V, |\theta(x)| = \theta(x) \leq \epsilon$. Soit $x \in V$, en appliquant la première hypothèse : $|f(x) - l| \leq \theta(x) \leq \epsilon$. Ce qui prouve que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

12.2.3 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont typiques des démonstrations à ϵ d'analyse. Il est important de les étudier en détail et de les comparer aux démonstrations correspondantes sur les suites.

THÉORÈME 12.12 Limite d'une somme

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$.

Alors, $(f + g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1 + l_2$.

Démonstration \heartsuit Notre hypothèse permet de majorer $|f(x) - l_1|$ et $|g(x) - l_2|$ par ϵ' aussi petit que l'on veut pour x suffisamment proche de a . Faisons apparaître cette quantité sous la valeur absolue avant de majorer à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$|(f + g)(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leq 2\epsilon'$$

Il nous reste à rédiger une démonstration rigoureuse en suivant le plan de démonstration correspondant à la définition de la limite.

Soit $\epsilon > 0$.

Posons $\epsilon' = \epsilon/2$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l_1| \leq \epsilon'$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |g(x) - l_2| \leq \epsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a bien

$$|(f + g)(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leq \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$$

Remarque 12.11 On montre de même que pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ tend vers la combinaison linéaire des limites : $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha l_1 + \beta l_2$.

THÉORÈME 12.13 Limite d'un produit

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$. Alors $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1 l_2$.

Démonstration \heartsuit Estimons la différence en faisant apparaître notre hypothèse $|f(x) - l_1| \leq \epsilon'$ et $|g(x) - l_2| \leq \epsilon'$.

$$|(fg)(x) - l_1 l_2| = |f(x)[g(x) - l_2] + l_2[f(x) - l_1]| \leq |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1|$$

Il reste $|f(x)|$ que l'on peut majorer puisque f est bornée sur un voisinage de a . Maintenant que nous avons compris pourquoi le résultat est vrai, écrivons une preuve rigoureuse qui utilise le plan de démonstration de limite.

Soit $\epsilon > 0$.

Comme f admet une limite finie au point a , elle est bornée sur un voisinage de a donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_3 \implies |f(x)| \leq M$.

Notons $\epsilon' = \epsilon/(|l_2| + M)$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l_1| \leq \epsilon'$. Puisque $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |g(x) - l_2| \leq \epsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, en recopiant la majoration précédente,

$$|(fg)(x) - l_1 l_2| \leq |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1| \leq (M + |l_2|)\epsilon' = \epsilon$$

Remarquez l'ordre dans lequel les différents objets sont introduits dans la démonstration. Pour définir ϵ' , il fallait avoir défini M auparavant.

THÉORÈME 12.14 Limite d'une valeur absolue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, alors $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |l|$.

Démonstration \heartsuit

Soit $\epsilon > 0$.

Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, grâce à la minoration de l'inégalité triangulaire,

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| \leq \epsilon$$

THÉORÈME 12.15 Limite de l'inverse

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

(H2) $l \neq 0$.

Alors $(1/f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1/l$.

Démonstration ♡ Nous savons majorer $|f(x) - l|$ par un réel $\epsilon' > 0$ aussi petit que l'on veut sur un voisinage de a . Estimons la quantité

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)||l|}$$

Il nous faut minorer $|f(x)|$ au dénominateur. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, on a vu que $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |l|$ et puisque $|l| > 0$, en notant $k = |l|/2$, puisque $k < |l|$, d'après la proposition ??, il existe un voisinage de a sur lequel $|f(x)| \geq k$ et alors $|1/f(x) - 1/l| \leq \epsilon'/k|l|$. Rédigeons maintenant une preuve rigoureuse.

Soit $\epsilon > 0$.

Notons $k = |l|/2$. Puisque $l \neq 0$, $k < |l|$ et comme $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |l|$, d'après la transformation d'une limite en inégalité, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies k < |f(x)|$.

Notons $\epsilon' = k|l| > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - l| \leq \epsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)||l|} \leq \frac{\epsilon'}{k|l|} = \epsilon$$

Remarque 12.12 D'après les deux théorèmes précédents, si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$ avec $l_2 \neq 0$, $(f/g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1/l_2$. On invoque souvent les théorèmes de ce paragraphe pour justifier l'existence d'une limite sous le nom de « théorèmes généraux » sur les limites.

On peut étendre les théorèmes généraux aux limites infinies. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \bar{I}$, éventuellement infini et un réel α . On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l' \in \bar{\mathbb{R}}$. Nous avons résumé dans les tableaux suivants les limites de la somme, produit et quotient des deux fonctions dans tous les cas de figure. Les cases noires correspondent à des « formes indéterminées » où l'on ne peut rien dire de général.

— Somme $f + g$

	l'	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
l				
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$+\infty$			$+\infty$	$+\infty$

— Produit fg

	l'	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$l' > 0$	$+\infty$
l						
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
$l = 0$			0	0	0	
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$			$+\infty$	$+\infty$

— Inverse $\frac{1}{f}$

l	$-\infty$	$l < 0$	$l = 0^-$	$l = 0$	$l = 0^+$	$l > 0$	$+\infty$
$\frac{1}{f}$	0	$1/l$	$-\infty$		$+\infty$	$1/l$	0

12.2.4 Continuité

DÉFINITION 12.13 ♡♡♡ Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue au point a* si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ ce qui se traduit avec des quantificateurs par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

THÉORÈME 12.16 ♡ Théorèmes généraux

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$, alors

1. la fonction $(f + g)$ est continue au point a ,
2. la fonction (fg) est continue au point a ,
3. si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est définie sur un voisinage du point a et est continue au point a .

Démonstration (1) et (2) sont une conséquence directe des théorèmes généraux sur les limites. Vérifions (3). Puisque $|g(a)| \neq 0$ et que g est continue au point a , $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$ donc $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |g(a)|$. Posons $k = |g(a)|/2$, on a $0 < k < |g(a)|$ donc d'après le théorème ??, il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in I \cap V, 0 < |g(a)|/2 < |g(x)|$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur V . La fonction f/g est donc définie sur $I \cap V$ et d'après les théorèmes généraux sur les limites, $(f/g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} (f/g)(a)$.

12.2.5 Limite à gauche, à droite, continuité à gauche, à droite

DÉFINITION 12.14 Voisinages à gauche, à droite

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie V de \mathbb{R} est

- un *voisinage à droite de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a, a + \varepsilon] \subset V$,
- un *voisinage à gauche de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a] \subset V$,
- un *voisinage strict à droite de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a, a + \varepsilon[\subset V$,
- un *voisinage strict à gauche de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a[\subset V$,
- un *voisinage pointé de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a[\cup]a, a + \varepsilon] \subset V$.

DÉFINITION 12.15 Limite à gauche, à droite

Soit une fonction $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'un réel l est la *limite à droite* (resp. à *gauche*) de f si il existe un voisinage strict à droite de a (resp. un voisinage strict à gauche de a) tel que la restriction de f à ce voisinage admet l pour limite en a . Lorsqu'elle existe, la limite à droite de f est unique et est notée $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $l = l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} f(x)$ ou $l = \lim_{a^+} f$. Nous noterons également $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l$. On a des notations identiques pour la limite à gauche.

Remarque 12.13 En termes de quantificateurs, f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite à gauche en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque 12.14 Une fonction f possède une limite en a lorsque

- f admet une limite à gauche $l_1 \in \mathbb{R}$.
- f admet une limite à droite $l_2 \in \mathbb{R}$.
- $l_1 = l_2$.

DÉFINITION 12.16 Continuité à gauche, à droite

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est *continue à droite en a* (respectivement à *gauche en a*) si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$ (respectivement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$).

Remarque 12.15 Soit $a \in I$ un point intérieur (il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$). Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a .

Exemple 12.3 La fonction $\delta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ n'est pas continue au point 0. On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^-} \delta(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \delta(x) = 0$ mais $\delta(0) = 1$.

DÉFINITION 12.17 Prolongement par continuité

Soit une fonction f définie sur I et un point adhérent $a \in \bar{I}$ qui n'appartient pas à I . On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R}$. On définit alors la fonction \tilde{f} sur $\tilde{I} = I \cup \{a\}$ par :

$$\forall x \in \tilde{I} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

Cette fonction \tilde{f} est continue au point a et est appelée *prolongement de f par continuité au point a* .

Exemple 12.4 Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x/x \end{cases}$. Puisque $\sin x/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on peut la prolonger par continuité en une fonction définie sur \mathbb{R} , $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin x/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.

12.2.6 Limites et relation d'ordre

THÉORÈME 12.17 ♡♡♡ Passage à la limite dans les inégalités

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, un point $a \in \bar{I}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.
- (H2) Il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V \cap I, k \leq f(x)$.

Alors $k \leq l$.

Démonstration Écrivons la démonstration dans le cas où a est fini. Supposons par l'absurde que $l < k$ et posons $\varepsilon = k - l > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$. Puisque V est un voisinage du point a , il existe $\eta_2 > 0$ tel que $]a - \eta_2, a + \eta_2[\subset V$. Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Puisque le point a est adhérent à I , il existe $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$ et on doit avoir d'une part $k \leq f(x)$ et $|f(x) - l| < \varepsilon$ mais alors,

$$k \leq f(x) < l + \varepsilon = l + (k - l) = k$$

ce qui est absurde.

Remarque 12.16 Le passage à la limite dans les inégalités ne conserve pas les inégalités strictes. Si sur un voisinage V de a on a $k < f(x)$, on ne peut pas garantir que $k < l$. Par exemple pour la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = x$, $\forall x \in]0, 1[, k = 0 < f(x)$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = l$ et $k = l = 0$.

On dispose bien sûr du théorème correspondant en remplaçant \leq par \geq .

COROLLAIRE 12.18 Passage à la limite dans les inégalités

Soient deux fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$,
- (H2) $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$,
- (H3) il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V \cap I, f(x) \leq g(x)$.

Alors $l_1 \leq l_2$.

Démonstration Définissons la fonction $h = g - f$. D'après les théorèmes généraux, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2 - l_1$. D'après l'hypothèse (3), sur un voisinage de a , on a $k = 0 \leq h(x)$. D'après le théorème précédent, $0 \leq l_2 - l_1$ d'où $l_1 \leq l_2$.

THÉORÈME 12.19 ♡♡♡ Théorème des gendarmes

Soient α, f, β trois fonctions définies sur un voisinage V d'un point adhérent $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) $\forall x \in V, \alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$

(H2) $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ et $\beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

alors la fonction f admet une limite au point a et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Démonstration Écrivons la preuve dans le cas où a est fini.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |\alpha(x) - l| \leq \varepsilon$. De même, puisque $\beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |\beta(x) - l| \leq \varepsilon$. Comme V est un voisinage du point a , il existe $\eta_3 > 0$ tel que $]a - \eta_3, a + \eta_3[\subset V$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$. Puisque $|x - a| \leq \eta \leq \eta_1, l - \varepsilon \leq \alpha(x)$. Puisque $|x - a| \leq \eta \leq \eta_2, \beta(x) \leq l + \varepsilon$ et puisque $|x - a| \leq \eta \leq \eta_3, \alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$. On a finalement $l - \varepsilon \leq \alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x) \leq l + \varepsilon$ d'où $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Remarque 12.17 Le théorème des gendarmes se généralise aux limites infinies. Par exemple, si au voisinage de $a \in \bar{I}$, on a

(H1) $f(x) \geq \alpha(x)$.

(H2) $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$

Remarque 12.18 Attention, il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les inégalités. Le second permet d'affirmer l'existence d'une limite tandis que dans le premier l'existence de cette limite est présupposée.

12.2.7 Théorème de composition des limites

THÉORÈME 12.20 Composition de limites

Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soient $a \in \bar{I}$ et $b \in \bar{J}$. On suppose que

(H1) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

(H2) $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} l \in \bar{\mathbb{R}}$

Alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Démonstration ♡ Écrivons la preuve dans le cas où a et l sont finis.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} l$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall y \in J, |y - b| \leq \alpha \implies |g(y) - l| \leq \varepsilon$.

Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \alpha$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$. Comme $y = f(x) \in J$ et que $|f(x) - b| \leq \alpha$, on a $|g(f(x)) - l| \leq \varepsilon$ d'où $|g \circ f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Remarque 12.19 On déduit du théorème précédent les règles de passage à la limite dans une exponentiation $f^g = e^{g \ln f}$. On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent comme limites respectives l et l' .

$l \backslash l'$	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$0 < l'$	$+\infty$
$l = 0$	$+\infty$	$+\infty$		0	0
$0 < l < 1$	$+\infty$	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	0
$l = 1$		1	1	1	
$1 < l$	0	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0		$+\infty$	$+\infty$

Remarque 12.20

— 0^0 est une forme indéterminée. Par exemple,

- Lorsque $x \rightarrow 0$, $x^x = e^{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ car $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- Lorsque $x \rightarrow 0$, $x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$.

— $1^{+\infty}$ est une forme indéterminée. Par exemple,

- Lorsque $x \rightarrow 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.
- Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1^x = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

COROLLAIRE 12.21 **Continuité de la composée de deux applications**

Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que

- (H1) f est continue en a .
- (H2) g est continue en $b = f(a)$.

alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

12.2.8 Image d'une suite par une fonction

THÉORÈME 12.22 ♡♡♡ **Théorème de la limite séquentielle**

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Soit une suite (u_n) de points de I et $l \in \bar{I}$. On suppose que

- (H1) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$
- (H2) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Démonstration Supposons que l et a sont finis.

Soit $\epsilon > 0$.

Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$.

Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - a| \leq \eta$.

Soit $n \geq N$, puisque $u_n \in I$ et $|u_n - a| \leq \eta$, on a $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$.

COROLLAIRE 12.23 ♡ **Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) de points de I vérifiant

- (H1) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$
- (H2) $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1, f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2$
- (H3) $l_1 \neq l_2$

alors f n'admet pas de limite au point a .

Démonstration Par l'absurde, s'il existait $l \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, d'après le théorème de limite séquentielle, $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et par unicité de la limite d'une suite, on aurait $l = l_1$. De même, on aurait $l = l_2$ et donc $l_1 = l_2$ ce qui est faux.

Exemple 12.5 Considérons la fonction $f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(1/x) \end{cases}$ et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0. Par l'absurde, supposons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} l$. Introduisons les deux suites $(u_n) = (1/(n\pi))$ et $(v_n) = (1/(2n\pi + \pi/2))$. On calcule $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(v_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on aurait $0 = 1$ ce qui est faux.

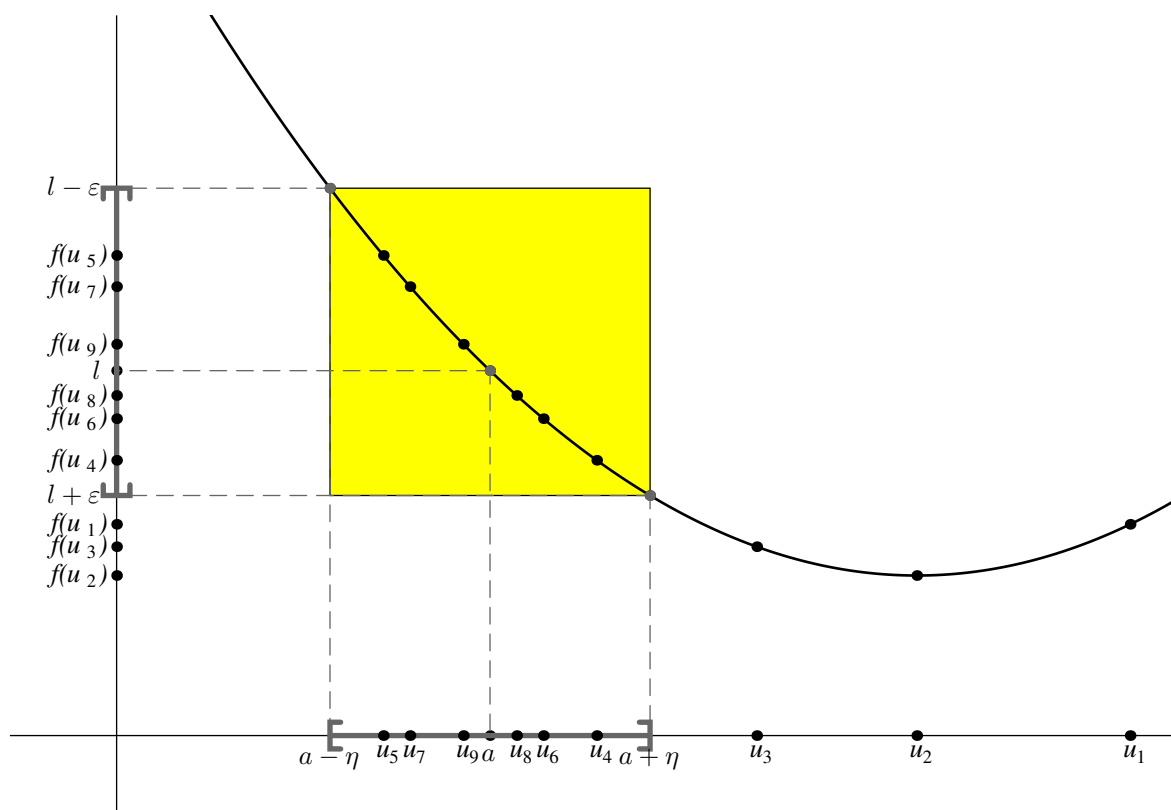


FIGURE 12.5 – Si $n \geq 4$ alors $|u_n - a| \leq \eta$ et $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$.

THÉORÈME 12.24 ♡♡♡ **Caractérisation séquentielle de la continuité en un point**
 Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de I convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Démonstration

- \Rightarrow Soit (x_n) une suite de points de I telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. Puisque f est continue au point a , $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$ et d'après le théorème de la limite séquentielle, $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$.
- \Leftarrow Cette démonstration peut être sautée en première lecture. Elle sera revue en deuxième année. Nous allons utiliser une technique classique en analyse : la construction d'une suite à partir d'une propriété de la forme

$$\forall \eta > 0, \exists x \in I \dots$$

En prenant $\eta = 1/n$, on associe un élément $x_n \in I$ et l'on construit ainsi une suite de points de I . Pour obtenir une telle propriété, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que la fonction f n'est pas continue au point a . La propriété f est continue au point a s'écrit à l'aide des quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

La traduction « f n'est pas continue au point a » s'écrit en niant cette phrase :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \epsilon$$

Il existe donc un réel $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \epsilon$$

Pour tout entier n non nul, en prenant $\eta = 1/n$, il existe un réel $x_n \in I$ vérifiant $|x_n - a| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers a puisque $|x_n - a| \leq 1/n$. D'après (ii), notre suite image doit converger vers $f(a)$: $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$. Mais alors puisque $\forall n \geq 1, \epsilon < |f(x_n) - f(a)|$, par passage à la limite dans l'inégalité on devrait avoir $\epsilon \leq |f(a) - f(a)| = 0$ ce qui est absurde.

12.2.9 Théorème de la limite monotone

THÉORÈME 12.25 ♡♡♡ Théorème de la limite monotone (fonction croissante)

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $I =]a, b[$.

Si une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est *croissante*, alors il y a deux possibilités.

1. Si f est *majorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et on a alors $l = \sup_I f$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.

De même,

1. Si f est *minorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et $l = \inf_I f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

Démonstration ♡ Posons $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a, b[\}$. La partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est non vide. Étudions les deux cas.

1. Si la fonction f est majorée, alors la partie \mathcal{E} est majorée et d'après l'axiome de la borne supérieure, elle possède une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Montrons qu'alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} l$.

Soit $\epsilon > 0$.

D'après le théorème de caractérisation de la borne supérieure (??), il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $l - \epsilon \leq y \leq l$. Puisque $y \in \mathcal{E}$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y = f(x_0)$.

Posons $\eta = b - x_0 > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - b| \leq \eta$, on a $x_0 \leq x \leq b$. Puisque la fonction f est croissante, $f(x_0) \leq f(x)$ et comme l est un majorant de \mathcal{E} , on a également $f(x) \leq l$. Finalement, $l - \epsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq l$ d'où $|f(x) - l| \leq \epsilon$.

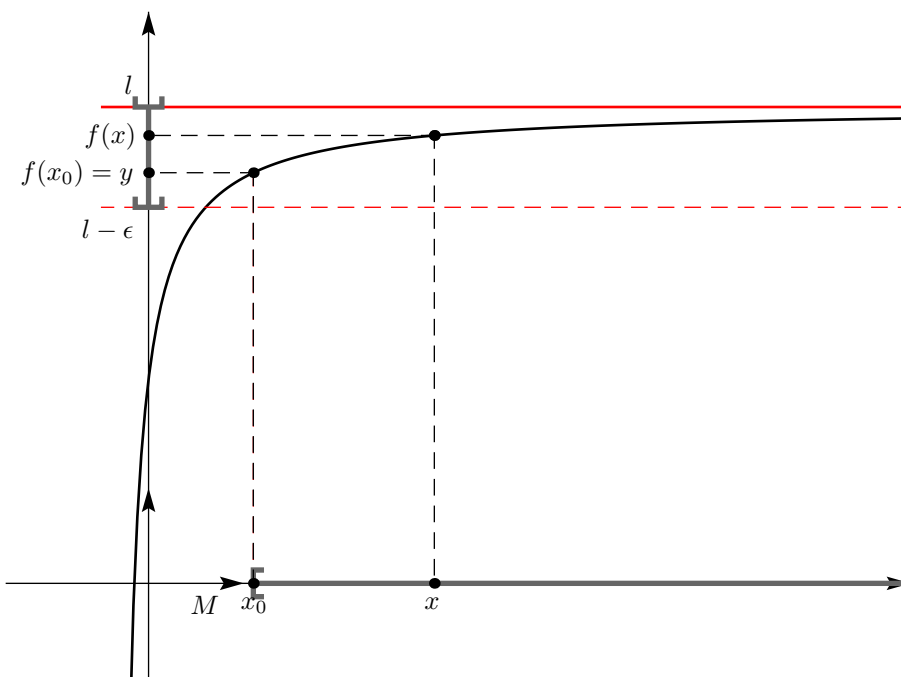


FIGURE 12.6 – $x > x_0 \implies l - \epsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq l$

2. Si la fonction f n'est pas majorée, montrons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.

Soit $M > 0$.

Puisque f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $M \leq f(x_0)$.

Posons $\eta = b - x_0 > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - b| \leq \eta$.

Puisque $x_0 \leq x$ et que f est croissante, on a $M \leq f(x_0) \leq f(x)$.

Multimédia : Comme pour les suites, l'utilisateur fixe son ϵ, B, \dots et on obtient le η, A, \dots

Remarque 12.21 Si f est croissante et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} l \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]a, b[, f(x) \leq l$. En effet, d'après le théorème précédent, on est dans le premier cas et l est la borne supérieure de f donc un majorant de f . Ce résultat est bien entendu faux si la fonction n'est pas croissante.

On a le théorème correspondant pour une fonction décroissante.

THÉORÈME 12.26 ♡♡♡ **Théorème de la limite monotone (fonction décroissante)**
 Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ et $I =]a, b[$.
 Si une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est *décroissante*, alors il y a deux possibilités.

1. Si f est *majorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et on a alors $l = \sup_I f$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

De même,

1. Si f est *minorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et $l = \inf_I f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} -\infty$.

Remarque 12.22 Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'*existence* d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.

12.3 Étude locale d'une fonction

12.3.1 Domination, prépondérance

Définitions

DÉFINITION 12.18 Fonction dominée par une autre
 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si et seulement si existe une fonction B définie au voisinage de a telle que

- 1 $f(x) = B(x)g(x)$ au voisinage de a
- 2 B est bornée au voisinage de a

On note alors $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$.

DÉFINITION 12.19 Fonction négligeable devant une autre
 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

- 1 $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ au voisinage de a
- 2 $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

On note alors : $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$

Remarque 12.23 f une fonction définie au voisinage de a . Alors,
 — $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(1) \iff f(x)$ est bornée au voisinage de a
 — $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Propriétés

PROPOSITION 12.27 Caractérisation pratique de $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$
 Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x)) \iff \text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Démonstration

- ⇒ Comme $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ il existe une fonction B bornée définie sur un voisinage V' de a (que l'on peut, quitte à travailler sur $V \cap V'$ supposer égal à V) et vérifiant pour tout $x \in V'$, $f(x) = B(x)g(x)$. L'application f/g est donc définie sur $V \setminus \{a\}$ et coïncide avec B sur ce voisinage. Elle est donc bornée au voisinage de a .
- ⇐ Réciproquement, si f/g est bornée au voisinage de a , considérons un voisinage V de a sur lequel g ne s'annule pas sauf peut être en a . Si $x \in V \setminus \{a\}$, posons $B(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et posons $B(a) = 1$. La fonction α est bien définie sur V , et $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) = B(x)g(x)$. De plus B est bornée au voisinage de a . Par conséquent $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$.

PROPOSITION 12.28 Caractérisation pratique de $f(x) = o(g(x))$

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Démonstration

- ⇒ Comme $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$, il existe une fonction ε définie sur un voisinage V' de a (que l'on peut, quitte à travailler sur $V \cap V'$, supposer égal à V) vérifiant, pour tout $x \in V'$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. L'application f/g est définie sur $V \setminus \{a\}$ et $f(x)/g(x) = \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- ⇐ Réciproquement, si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in V \setminus \{a\}$ et posons $\varepsilon(a) = 0$. La fonction ε est bien définie sur V , et on a : $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. De plus $\varepsilon(x) = f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Par conséquent $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$.

Opérations sur les relations de comparaison

PROPOSITION 12.29 Les relations o et O sont transitives

Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- $\left[f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \text{ et } g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x)) \right] \implies f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$
- $\left[f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x)) \text{ et } g(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x)) \right] \implies f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x))$

PROPOSITION 12.30 Opérations sur les relations de comparaison

Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

- 1. $f_1 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ et $f_2 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \implies f_1 + f_2 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$
- 2. $f_1 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ et $f_2 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x)) \implies f_1 + f_2 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$
- 1. $f_1 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_1(x))$ et $f_2 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_2(x)) \implies f_1 f_2 = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_1 g_2(x))$
- 2. $f_1 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_1(x))$ et $f_2 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_2(x)) \implies f_1 f_2 = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_1 g_2(x))$

Démonstration Les preuves sont laissées en exercice. Vous pouvez supposer que les fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage du point a pour utiliser les caractérisations précédentes.

Exemples fondamentaux

PROPOSITION 12.31 Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β et γ des réels strictement positifs.

- En $+\infty$:

$$(\ln x)^\gamma = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{\beta x})$$

- En 0 et en $-\infty$:

$$|\ln x|^\gamma = \underset{x \rightarrow 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad e^{\beta x} = \underset{x \rightarrow -\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Autrement dit

- Aux bornes de l'intervalle de définition,
- « l'exponentielle l'emporte sur la puissance »,
- « la puissance l'emporte sur le logarithme ».

12.3.2 Fonctions équivalentes

Définitions

DÉFINITION 12.20 Fonctions équivalentes

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si

$$f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$$

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Remarque 12.24 On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

THÉORÈME 12.32 Caractérisation pratique de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

Démonstration

\Rightarrow Comme $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de a (que l'on peut supposer égal à V , quitte à considérer le voisinage $V \cap V'$) vérifiant, pour tout $x \in V$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$ et telle que $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. L'application f/g est définie sur $V \setminus \{a\}$ et $f(x)/g(x) = \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

\Leftarrow Si $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$, pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, posons $\alpha(x) = f(x)/g(x)$ et $\alpha(a) = 1$. On définit ainsi une fonction α sur le voisinage V avec $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$. De plus, $\alpha(x) = f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Propriétés

PROPOSITION 12.33 Un équivalent donne localement le signe

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Démonstration Comme $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de a vérifiant $\forall x \in V'$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$ avec $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. Puisque $k = 1/2 < 1$, d'après la transformation de limite en inégalité (théorème ??), il existe un voisinage V' de a sur lequel $\alpha(x) \geq 1/2 > 0$ et alors $\forall x \in V$, $f(x)$ est de même signe que $g(x)$.

PROPOSITION 12.34 Une fonction est équivalente à sa limite si celle-ci est non nulle et finie

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Alors

$$\left[f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \text{ et } l \neq 0 \right] \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l$$

Démonstration Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, d'après les théorèmes généraux, $f(x)/l \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ ce qui signifie que la fonction f est équivalente à la fonction constante égale à l au voisinage du point a .

PROPOSITION 12.35 Deux fonctions équivalentes ont même limite

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Alors :

$$\left[f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \right] \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

Démonstration Puisque $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, il existe un voisinage V du point a et une fonction α définie sur ce voisinage vérifiant $\forall x \in V, f(x) = \alpha(x)g(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. D'après les théorèmes généraux sur les limites, $f(x) = \alpha(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Remarque 12.25 Attention, écrire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$ signifie que la fonction f est nulle sur un voisinage de a , ce qui est possible, mais en général, lorsque vous écrivez 0 à droite d'un équivalent, vous commettez une erreur !

PROPOSITION 12.36

Soient $a \in I$ et une fonction f définie sur I . Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors, au voisinage de a ,

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Démonstration Comme f est dérivable en a , son taux d'accroissement en a vérifie $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$. Par conséquent, comme $f'(a) \neq 0$, par opération sur les limites, on a $\frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ ce qui montre que $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

PROPOSITION 12.37

Soient u une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

(H1) $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} b$

(H2) $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$

alors $f(u(t)) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(u(t))$.

Démonstration Comme $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de b telle que $\forall x \in V', f(x) = \alpha(x)g(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 1$. Soit V un voisinage de a tel que $\forall t \in V, u(t) \in V'$. On a alors $\forall t \in V, f(u(t)) = \alpha(u(t))g(u(t))$. De plus, comme $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} b$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 1$, d'après le théorème de composition de limites (?? page ??), $\alpha(u(t)) \xrightarrow{t \rightarrow a} 1$ ce qui montre que $f(u(t)) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(u(t))$.

THÉORÈME 12.38 ♡ Opérations sur les équivalents

Soient $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

(H1) $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

(H2) $\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \tilde{g}(x)$.

Alors

1. $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$.

2. Si la fonction \tilde{f} ne s'annule pas sur un voisinage du point a , il en est de même pour la fonction \tilde{g} et alors

$$\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}$$

3. Pour tout réel s , si les fonctions f et g sont strictement positives au voisinage du point a , $[f(x)]^s \underset{x \rightarrow a}{\sim} [g(x)]^s$.

Démonstration Puisque $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \tilde{g}(x)$, il existe un voisinage V du point a et deux fonctions $\alpha, \tilde{\alpha}$ définies sur ce voisinage vérifiant $f(x) = \alpha(x)g(x)$, $\tilde{f}(x) = \tilde{\alpha}(x)\tilde{g}(x)$ avec $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et $\tilde{\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. Nous pouvons alors écrire

1. $f(x)g(x) = \alpha(x)\tilde{\alpha}(x)\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ avec $\alpha(x)\tilde{\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ ce qui montre que $f(x)\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)\tilde{g}(x)$.

2. Puisque $\tilde{\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$, il existe un voisinage V' du point a sur lequel les fonctions $\tilde{\alpha}$ et \tilde{f} ne s'annulent pas. Puisque $\tilde{f}(x) = \tilde{\alpha}(x)\tilde{g}(x)$, la fonction \tilde{g} ne s'annule pas sur V' et $\forall x \in V', \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} = \frac{\alpha(x)g(x)}{\tilde{\alpha}(x)\tilde{g}(x)}$. D'après les théorèmes généraux, $\alpha(x)/\tilde{\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ ce qui prouve le résultat.

3. On peut écrire sur un voisinage du point a , $[f(x)]^s = [\alpha(x)]^s [g(x)]^s$ et puisque $y^s \xrightarrow{y \rightarrow 1} 1$, par composition de limites, $[\alpha(x)]^s \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ ce qui prouve le résultat.

⚠ Attention 12.6 Il ne faut jamais

1. Sommer des équivalents.
2. Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas :
 - (a) Prendre des logarithmes d'équivalents.
 - (b) Prendre des exponentielles d'équivalents.

Exemple 12.7 Par exemple $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x+1$ mais e^x et e^{x+1} ne sont pas équivalents quand x tends vers $+\infty$ puisque $\frac{e^x}{e^{x+1}} = e^{x-x-1} = e^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 1$.

PROPOSITION 12.39 Équivalents classiques en 0

$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$		$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	
$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\operatorname{tanh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\operatorname{argsh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\operatorname{argth} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$	
$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$			

Démonstration Les dix premières se démontrent en utilisant un taux d'accroissement, ou en utilisant la proposition ?? . Pour la onzième,

$$\cos x - 1 = \cos\left(2 \frac{x}{2}\right) - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2}$$

d'après l'équivalent usuel du sinus et par puissance d'équivalent. La douzième se prouve de même. Les deux dernières se prouvent encore en utilisant un taux d'accroissement. Pour l'avant dernière, on peut aussi utiliser la formule $\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \pi/2$ et l'équivalent usuel d'arcsinus. La dernière peut encore se démontrer en passant en $\exp - \ln$ et en utilisant les équivalents usuels pour \exp et \ln .

Remarque 12.26 Attention, n'écrivez pas $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - x^2/2$. Le résultat est vrai, mais on a plus simplement $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$! Il est conseillé de lire l'appendice ?? pour comprendre ce qu'est un équivalent.

De manière plus générale,

PROPOSITION 12.40
Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, au voisinage du point a

$\ln(1+f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$	$\sin(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$	$\tan(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$
$\cos(f(x)) - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2}$	$e^{f(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$	$(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Démonstration Il suffit de combiner les résultats précédents et la proposition ??.

Une fois que vous avez assimilé les définitions de ce paragraphe, il est conseillé de lire l'appendice ?? pour apprendre à utiliser *en pratique* les équivalents.

12.4 Propriétés globales des fonctions continues

12.4.1 Définitions et propriétés de base

Définitions

DÉFINITION 12.21 Fonction continue sur un intervalle

On dit qu'une fonction f est *continue sur un intervalle* I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I . Cette définition s'écrit avec les quantificateurs sous la forme suivante :

$$\forall a \in I, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I .

Remarque 12.27

- La continuité en un point est une notion *locale*.
- La continuité sur un intervalle est une notion *globale*.
- Intuitivement, « une fonction est continue sur un intervalle si et seulement si on peut tracer son graphe sans lever le crayon ».

THÉORÈME 12.41 Une fonction lipschitzienne est continue

Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur l'intervalle I , alors f est continue sur l'intervalle I .

Démonstration Puisque f est lipschitzienne sur l'intervalle I , il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Soit $a \in I$. Montrons que la fonction f est continue au point a .

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\eta = \varepsilon/k > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \leq k\eta = \varepsilon$

Opérations sur les fonctions continues

THÉORÈME 12.42 Théorème d'opérations sur les fonctions continues

- Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I .
- Une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I .
- La fonction produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I .
- Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Démonstration Les affirmations précédentes sont vraies en chaque point de I d'après les théorèmes généraux donc elles sont vraies sur I .

Remarque 12.28 $\mathcal{C}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 12.43 La composée de fonctions continues est continue

Soient deux intervalles I et J . Soit une application f continue sur I telle que $f(I) \subset J$ et g une application continue sur J . Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Démonstration la proposition est vraie en chaque point de I donc elle est vraie sur I .

12.4.2 Les théorèmes fondamentaux

Le théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 12.44 ♥♥♥ Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

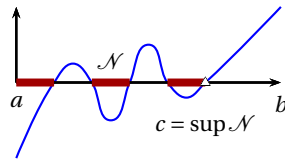
Soient I un intervalle de \mathbb{R} et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soient deux points $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On suppose que

(H1) la fonction f est continue sur l'intervalle I .

(H2) $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.

Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration Puisque I est un intervalle et que $a, b \in I$, on a $[a, b] \subset I$. Notons $\mathcal{N} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. C'est une partie de \mathbb{R} . Puisque $a \in \mathcal{N}$, cette partie est non vide. De plus elle est majorée par b donc elle admet une borne supérieure $c = \sup \mathcal{N}$. Montrons que $f(c) = 0$.



— D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{N}, c - \varepsilon \leq x \leq c$$

En prenant pour tout entier n non nul $\varepsilon = 1/n$, il existe donc un réel $x_n \in [c - 1/n, c]$ vérifiant $f(x_n) \leq 0$. On construit ainsi une suite de points de $[a, b]$ vérifiant $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ et $f(x_n) \leq 0$. Puisque la fonction f est continue au point c , $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$ et par passage à la limite dans les inégalités, on a $f(c) \leq 0$.

— Puisque c est un majorant de E , $\forall x \in]c, b]$, $f(x) > 0$ et puisque f est continue à droite au point c , $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c^+} f(c)$. Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $f(c) \geq 0$.

En conclusion, $f(c) = 0$.

Remarque 12.29 Le résultat est faux si la fonction est définie sur un ensemble A qui n'est pas un intervalle. Par exemple, la fonction f définie sur $[-2, -1] \cup [1, 2]$ par $f(x) = -1$ si $x \in [-2, -1]$ et $f(x) = 1$ lorsque $x \in [1, 2]$ est continue en tout point de A , vérifie la deuxième hypothèse, puisque $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$ mais ne s'annule pas sur A .

Remarque 12.30 Plus généralement, on peut remplacer l'hypothèse H1 par $f(a)f(b) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires est (comme le théorème de la limite monotone) un théorème qui permet de montrer l'existence d'objets de façon abstraite sans préciser leur valeur. On utilise pour cela une fonction auxiliaire bien choisie et on applique le TVI à cette fonction.

Exemple 12.8 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Cette fonction admet au moins un point fixe $x_0 \in [0, 1]$. Définissons la fonction auxiliaire $g : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$. D'après les théorèmes généraux, la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$. Puisque la fonction est à valeurs dans $[0, 1]$, $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ d'où $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Exemple 12.9 Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Vérifions qu'elle s'annule au moins une fois. En notant $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$, on obtient un équivalent simple de la fonction au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_{2n+1}x^{2n+1}$. Si $a_{2n+1} > 0$, $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. La transformation de limite en inégalités donne l'existence d'un réel $a < 0$ tel que $P(a) \leq 0$ et d'un réel $b > 0$ tel que $P(b) \geq 0$. Puisque P est une fonction continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $P(c) = 0$.

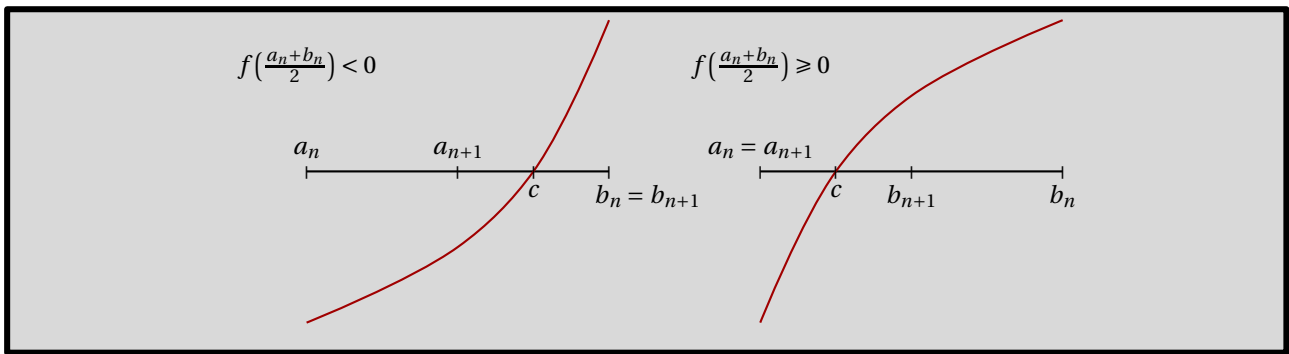
THÉORÈME 12.45 Recherche d'un zéro par dichotomie

On considère une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Alors les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite c qui est un zéro de la fonction f . Si l'on choisit de prendre a_n comme valeur approchée de c , on obtient la majoration de l'erreur

$$\forall n \in \mathbb{N}, |c - a_n| \leq \frac{b - a}{2^n}$$



Démonstration On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, que $a_n \leq b_n$ et que $(b_n - a_n) = (b - a)/2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $c \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction f est continue au point c , d'après le théorème de la limite séquentielle, $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(c)$. On vérifie également par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient alors que $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$ ce qui montre que $f(c) = 0$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq b_n$, $|c - a_n| \leq (b_n - a_n) \leq (b - a)/2^n$ ce qui montre que a_n est une valeur approchée par défaut de c à $(b - a)/2^n$ près. De même, b_n est une valeur approchée par excès de c à $(b - a)/2^n$ près.

Remarque 12.31 La preuve précédente fournit une autre démonstration plus constructive du théorème des valeurs intermédiaires. Elle fournit un algorithme simple et efficace qui permet de déterminer une valeur approchée d'un zéro de la fonction f .

```

MAPLE
dicho := proc(f, a, b, eps)
# f : une fonction définie sur le segment [a,b]
# eps : une précision souhaitée
# On suppose f continue sur [a,b] avec f(a) <= 0 et f(b) >= 0
local A, B, C;
A := a;
B := b;
C := (A + B)/2;
while (B-A) > eps do
# tant que la précision souhaitée n'est pas atteinte, calculer les termes suivants
  if f(C) < 0 then
    A := C;
  else
    B := C;
  fi;
  C := (A+B)/2;
# après le n-ième passage dans cette boucle, A=a_n, B=b_n et C=(a_n+b_n)/2
od;
# on sort de la boucle donc (B-A) <= eps
C; #C est une valeur approchée de c à eps près
end;

f := x -> exp(x) - 2; dicho(f, -1., 2., 0.0001);

```

Multimédia : voir les segments de taille moitié qui encadrent le zéro au cours du temps

On dispose d'un énoncé équivalent du théorème des valeurs intermédiaires qui justifie son nom.

THÉORÈME 12.46 Théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que :

(H1) f est continue sur $[a, b]$.

alors $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ quand x parcourt $[a, b]$. Autrement dit, si $y_0 \in [f(a), f(b)]$, alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration Supposons pour fixer les idées que $f(a) \leq f(b)$, alors $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$. Définissons la fonction auxiliaire

$$g : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - y_0 \end{cases}$$

Elle est continue sur $[a, b]$ d'après les théorèmes généraux et $g(a) = f(a) - y_0 \leq 0$, $g(b) = f(b) - y_0 \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$ et alors $f(x_0) = y_0$.

COROLLAIRE 12.47

Image d'un intervalle par une application continue L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Démonstration On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et que f est continue sur un intervalle I . Soit J un intervalle de I . Nous allons montrer que $f(J)$ est encore un intervalle de \mathbb{R} . Cela revient à prouver que pour tout $y_1, y_2 \in f(J)$, on a $[y_1, y_2] \subset f(J)$. Soit $y_1, y_2 \in f(J)$. Il existe $x_1, x_2 \in J$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit $y \in [y_1, y_2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme), il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $y \in f(J)$. On prouve ainsi que $[y_1, y_2] \subset f(J)$.

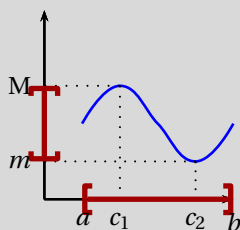
Fonction continue sur un segment

Le théorème suivant est fondamental en analyse.

THÉORÈME 12.48 ♡♡♡ Théorème du maximum : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un *segment*. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes

$$\exists (c_1, c_2) \in [a, b]^2 : f(c_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$



Démonstration ♡ La preuve utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il nous faut donc construire des suites. Pour cela nous allons utiliser la même technique que dans la démonstration du théorème ??.

— Montrons que la fonction f est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a, b], f(x) \leq M$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in [a, b], f(x) > M$$

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. En prenant $M = n$, il existe $x_n \in [a, b]$ vérifiant $f(x_n) > n$. On construit ainsi une suite de points (x_n) du segment $[a, b]$ telle que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (??), il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b$, par passage à la limite dans les inégalités, $a \leq c \leq b$. Mais la fonction f est continue au point c donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$. On obtient une contradiction puisque $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

— Définissons la partie de \mathbb{R} , $\mathcal{F} = \{f(x); x \in [a, b]\}$. Elle est non vide puisque $f(a) \in \mathcal{F}$. De plus, elle est majorée puisqu'on a vu que f était majorée. Elle admet donc une borne supérieure, $M = \sup \mathcal{F} = \sup f$. Montrons que cette borne supérieure est atteinte. D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b], \text{ tel que } M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$$

Pour tout entier n non nul, en prenant $\varepsilon = 1/n$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$$

La suite (x_n) étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $c_1 \in [a, b]$. Puisque la fonction f est continue au point c_1 , $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c_1)$. On a d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que $M \leq f(c_1) \leq M$ d'où $M = f(c_1)$.

— Pour montrer que f possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est atteinte, on utilise les mêmes techniques. Vérifiez que vous avez bien compris la démonstration écrivant cette preuve.

Remarque 12.32 En d'autres termes, une fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum :

$$\sup_{x \in I} f(x) = \max_{x \in I} f(x) = f(c_1) \quad \inf_{x \in I} f(x) = \min_{x \in I} f(x) = f(c_2)$$

On se sert souvent de ce théorème en analyse sous la forme suivante. Si f est une fonction continue sur un segment, la fonction $|f|$ est également continue sur ce segment donc elle possède un maximum. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ ce maximum et il est atteint. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(c)|$.

COROLLAIRE 12.49 Image d'un segment par une application continue

L'image d'un segment $[a, b]$ par une application continue est un segment et si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $f([a, b]) = [m, M]$.

Démonstration Puisque M est un majorant de $f([a, b])$ et m un minorant de $f([a, b])$, on a $f([a, b]) \subset [m, M]$. Montrons que $[m, M] \subset f([a, b])$. Soit $y \in [m, M]$. Comme les bornes sont atteintes, il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tel que $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$. Un segment est un intervalle, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme), puisque $y \in [f(c_1), f(c_2)]$, il existe $x \in [c_1, c_2] \subset [a, b]$ tel que $y = f(x)$ ce qui montre que $y \in f([a, b])$.

Fonctions uniformément continues

DÉFINITION 12.22 ♡♡ **Fonction uniformément continue**

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I . On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle un *module d'uniforme continuité*.

PROPOSITION 12.50 Lipschitz \implies uniformément continue \implies continue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

$$f \text{ lipschitzienne sur } I \implies f \text{ uniformément continue sur } I \implies f \text{ continue sur } I$$

Démonstration

1. Supposons f lipschitzienne sur I , il existe $k \geq 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrons que f est uniformément continue sur I .

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\eta = \varepsilon/k > 0$.

Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\eta = \varepsilon$$

2. Supposons f uniformément continue sur I et montrons que f est continue sur I . Soit $a \in I$, montrons que la fonction f est continue au point a .

Soit $\varepsilon > 0$,

Puisque f est uniformément continue sur I , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a bien $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Le théorème suivant est un résultat important d'analyse.

THÉORÈME 12.51 ♡♡♡ **Théorème de Heine**

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration Nous allons construire des suites et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass. Nous devons montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que cette propriété est fautive :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\eta = 1/n$, on peut trouver deux réels $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ vérifiant $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. On construit ainsi deux suites (x_n) et (y_n) de points du segment $[a, b]$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente, $(x_{\varphi(n)})$ vers une limite $c \in [a, b]$. Puisque

$$|y_{\varphi(n)} - c| = |(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) + (x_{\varphi(n)} - c)| \leq |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers la même limite c . Puisque la fonction f est continue au point c , d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon < |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|$, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que $0 < \varepsilon \leq |f(c) - f(c)| = 0$ ce qui est absurde.

Théorème de la bijection

THÉORÈME 12.52 ♡♡♡ Théorème de la bijection

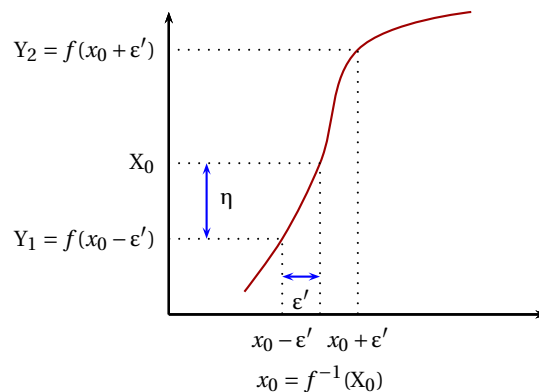
Soit une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est

- (H1) continue sur I ,
- (H2) strictement monotone sur I .

Alors,

1. J est un intervalle,
2. f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J ,
3. la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est une fonction continue sur J , strictement monotone de même sens que f .

Démonstration D'après le théorème ??, on sait déjà que J est un intervalle. D'après le théorème ?? page ??, on sait déjà que f est bijective, strictement monotone de même sens que f . Il nous reste à montrer que la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J . Soit $X_0 \in J$, montrons que f^{-1} est continue au point X_0 . Notons $x_0 = f^{-1}(X_0)$. Pour simplifier la preuve, nous supposons que f est strictement croissante sur I et que x_0 est un point intérieur à I (le cas où x_0 est une borne de l'intervalle se traite de même).



Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque x_0 est un point intérieur de I , il existe un réel $\varepsilon', 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tel que $[x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'] \subset I$. Posons $Y_1 = f(x_0 - \varepsilon')$ et $Y_2 = f(x_0 + \varepsilon')$. Puisque f est strictement croissante sur I , $Y_1 < X_0 < Y_2$. Posons alors $\eta = \min(X_0 - Y_1, Y_2 - X_0) > 0$.

Soit $X \in J$ tel que $|X - X_0| \leq \eta$, on a $Y_1 \leq X \leq Y_2$ et puisque f^{-1} est croissante sur J , $f^{-1}(Y_1) \leq f^{-1}(X) \leq f^{-1}(Y_2)$, c'est-à-dire $f^{-1}(X_0) - \varepsilon' \leq f^{-1}(X) \leq f^{-1}(X_0) + \varepsilon'$ ou encore $|f^{-1}(X) - f^{-1}(X_0)| \leq \varepsilon'$.

En résumé

Les parties ?? page ?? sur les techniques de majoration-minoration et la partie ?? page ?? sur les équivalents dans l'annexe ?? sont, comme dans le chapitre précédent, toujours d'actualité.

Il faudra être capable de distinguer une propriété locale (vraie dans le voisinage d'un point) d'une propriété globale (vraie sur un intervalle).

Les énoncés suivants devront être parfaitement connus et quand on les utilisera, on vérifiera avec rigueur leurs hypothèses :

- ① Théorème des gendarmes.
- ② Théorème de la limite monotone.
- ③ Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
- ④ Théorème d'opérations sur les limites.
- ⑤ Théorème d'opérations sur les fonctions continues.
- ⑥ Équivalents usuels, relations de comparaison.
- ⑦ Théorèmes des valeurs intermédiaires (sous ses différentes formes).
- ⑧ Théorème du maximum.
- ⑨ Théorème de Heine.
- ⑩ Théorème de continuité de la bijection réciproque.