Chapitre 10

Suites de nombres réels

Table des matières

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer...

D'Alembert.

Pour bien aborder ce chapitre

Nous allons définir dans ce chapitre et le suivant une des notions les plus fondamentales en analyse, celle de *limite*.

Si on se pose les questions suivantes :

— Qu'est ce qu'une dérivée ?
— Qu'est ce qu'une intégrale ?
— Qu'est ce qu'une somme infinie ?

La réponse est la même : une limite.

Bien que les mathématiciens utilisent ces différents objets depuis la renaissance, ce n'est que vers la fin du 18^{e} siècle et le début du 19^{e} siècle que la notion de limite, grâce à D'Alembert (voir **??** page **??**) et à Cauchy (voir **??** page **??**), commence à être formalisée. Le cours d'analyse de Cauchy, alors qu'il professait à l'École Polytechnique, allait d'ailleurs devenir une référence pour tout travail en analyse au 19^{e} siècle. Malgré la grande rigueur de son contenu, il subsistait des lacunes, comme une preuve, fausse, que la limite d'une série de fonctions continues est continue. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass vers 1860 (voir biographie **??** page **??**) et ses élèves formalisèrent définitivement la notion de limite et parachevèrent l'œuvre de Cauchy. La forme actuelle de la définition d'une limite est exactement celle donnée par Weierstrass.

Il vous faudra prendre le temps dans ce chapitre de bien comprendre les nouvelles notions, de faire et refaire les démonstrations. Il fallut plusieurs siècles pour que les mathématiciens formalisent ces concepts correctement. Il est alors naturel que cela vous demande un travail approfondi. Vous êtes en train de préparer les fondations sur lesquelles seront construites toute votre connaissance en analyse.

10.1 Définitions

10.1.1 Vocabulaire

DÉFINITION 10.1 **Suite réelle**
Une *suite réelle* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note cette application sous forme indicielle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n). L'ensemble des suites réelles est noté $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 10.1
- On appellera aussi suite réelle une application u définie à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, $u : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\} \to \mathbb{R}$. On la note : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
- Attention aux notations : la notation (u_n) désigne une suite, alors que u_n désigne le *terme* de rang n de la suite (u_n).

On adoptera une des visualisations suivantes pour une suite :

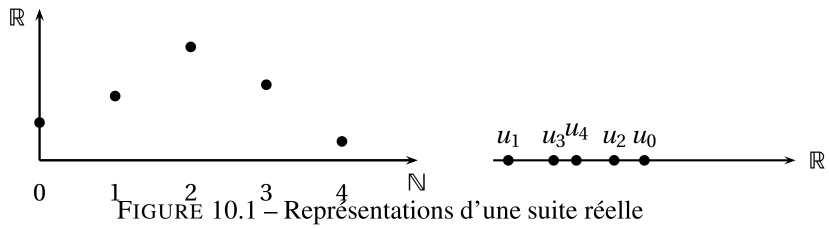


FIGURE 10.1 – Représentations d'une suite réelle

10.1.2 Opérations sur les suites

DÉFINITION 10.2 **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Soient $(u_n), (v_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- *Addition :* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- *Multiplication par un scalaire :* $\lambda(u_n) = (\lambda\ u_n)$
- *Multiplication de deux suites :* $(u_n) \times (v_n) = (u_n.v_n)$

Remarque 10.2
- $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication précédemment définies a une structure d'anneau commutatif (que l'on verra plus tard).
  - Élément neutre de l'addition : la suite nulle.
  - Élément neutre de la multiplication : la suite constante égale à 1.
- $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire précédemment définies a une structure d'espace vectoriel que l'on verra plus tard.

DÉFINITION 10.3 **Suite majorée, minorée, bornée**
On dit qu'une suite réelle (u_n) est :
- *majorée* lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$$
- *minorée* lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque :
$$\exists m \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$$
- *bornée* si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

PROPOSITION 10.1
Une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que la suite (u_n) est bornée. Alors il existe $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$. En notant $\mathrm{K} = \max(|m|, |\mathrm{M}|)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{K}$. La suite $|u_n|$ est majorée par le réel K.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si la suite $(|u_n|)$ est majorée, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -\mathrm{M} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$ ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.*

DÉFINITION 10.4 **Suite croissante, décroissante, monotone**
On dit qu'une suite réelle (u_n) est

- *croissante* si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$
- *décroissante* si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$
- *monotone* si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

On dit que (u_n) est *strictement croissante* , *strictement décroissante* ou *strictement monotone* si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

DÉFINITION 10.5 **Suite constante**
Une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dite *constante* lorsqu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$.

DÉFINITION 10.6 **À partir d'un certain rang**
On dit qu'*une propriété* $\mathrm{P}(n)$ *est vérifiée à partir d'un certain rang* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

10.2 Convergence d'une suite

10.2.1 Suites convergentes, divergentes

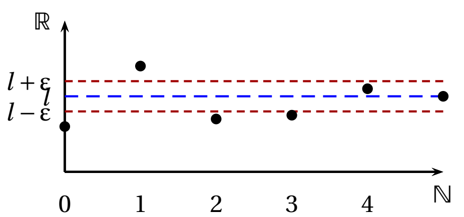
DÉFINITION 10.7 ♡♡♡ **Limite, suite convergente, suite divergente**
On dit qu'une suite réelle (u_n) *converge* vers un réel $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

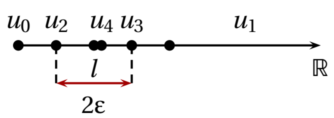
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon}$$

c'est-à dire, pour tout epsilon strictement positif, il existe un entier N $\boxed{\text{qui dépend de epsilon}}$ tel que pour tout n plus grand que N, u_n est à une distance plus petite que ε de l.
On dit alors que l est la *limite* de la suite (u_n) et on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

- S'il existe un tel l, on dit que la suite (u_n) est *convergente*.
- S'il n'existe pas de réel l vérifiant cette propriété, on dit que la suite (u_n) est *divergente*.

Remarque 10.3 Pour comprendre cette définition, étudiez le premier dessin de la figure ci-dessous. Imaginez qu'une clé à molette est centrée sur l'axe $(\mathrm{O}y)$ en l. Vous pouvez choisir l'ouverture 2ε à votre guise aussi petite que vous le souhaitez. Chaque ouverture détermine une bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Si la suite converge vers l, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Une autre façon de comprendre cette définition consiste à interpréter n comme un temps. À l'instant n, on allume un point sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ d'abscisse u_n. Pour tout $\varepsilon > 0$, à partir de l'instant N, tous les points allumés seront dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.





Multimédia : un pied à coulisse où l'on choisit ε avec le rang N à partir duquel tous les termes sont dans la bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$

PLAN 10.1 : Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

On utilise le plan

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *On cherche à partir de quelle valeur* N, *on a* $|u_N - l| \leqslant l$ *en sorte de vérifier le point* 3. *Cela se ramène la plupart du temps à la résolution d'inéquations. C'est souvent la partie la partie la plus difficile de la preuve*
3. *Posons* $N = ...$
4. *Vérifions : soit* $n \geqslant N$, *on a bien* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
5. *Donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exemple 10.1 Montrons que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en utilisant le plan ci-dessus.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
2. On cherche N tel que $1/N \leqslant \varepsilon$. On obtient $N \geqslant 1/\varepsilon$.
3. On pose alors $N = E(1/\varepsilon) + 1$.
4. Vérifions. Soit $n \geqslant N$. On a $n \geqslant N \geqslant 1/\varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $1/n \leqslant \varepsilon$ ou encore $|1/n - 0| \leqslant \varepsilon$.
5. Donc $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

PROPOSITION 10.2 **On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de convergence**
Une suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

Démonstration

$\Leftarrow$ *est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.*

$\Rightarrow$ *soit* $\varepsilon > 0$. *Posons* $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$ *et à partir de ce rang, on a* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$.

Remarque 10.4 Nous allons voir cette année plusieurs définitions d'analyse faisant intervenir des inégalités. Par défaut, nous utiliserons des inégalités larges. On peut souvent remplacer dans les définitions ces inégalités larges par des inégalités strictes au besoin en utilisant l'idée de la démonstration précédente.

THÉORÈME 10.3 ♡♡♡ **Unicité de la limite**
La limite d'une suite réelle, si elle existe, est unique.

Démonstration ♡ *Supposons que* (u_n) *possède deux limites* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *et montrons par l'absurde que* $l_1 = l_2$.
Supposons $l_1 \neq l_2$ *et posons* $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2 > 0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$, *il existe un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $|u_n - l_1| < \varepsilon$ *et puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$, *il existe un rang* N_2 *à partir duquel* $|u_n - l_2| < \varepsilon$. *Considérons l'entier* $n = \max(N_1, N_2)$ *supérieur à la fois à* N_1 *et* N_2. *On a* $|u_n - l_1| < \varepsilon$ *et* $|u_n - l_2| < \varepsilon$ *mais alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,*

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leqslant |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde.

THÉORÈME 10.4 **La valeur absolue d'une suite convergente est convergente**
Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Alors $\boxed{|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|}$

Démonstration *Soit* $\varepsilon > 0$, *puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. *Alors pour* $n \geqslant N$, *en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire voir* **??** *page* **??**, $\big|\,|u_n| - |l|\,\big| \leqslant |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

THÉORÈME 10.5 ♡ **Une suite convergente est bornée**
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration ♡♡♡ *Posons $\varepsilon = 1$. Puisque (u_n) converge, il existe $l \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Donc pour $n \geqslant \mathrm{N}$, en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire, $|u_n| - |l| \leqslant |u_n - l| \leqslant 1$ et donc $|u_n| \leqslant 1 + |l|$. Les premiers termes sont en nombre fini, donc on peut poser $\mathrm{M} = \max(|u_0|, \dots, |u_{\mathrm{N}-1}|, 1 + |l|)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ ce qui montre que la suite est bornée.*

On se sert souvent du résultat suivant pour transformer l'hypothèse sur une limite en inégalité à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 10.6 ♡♡♡ **Transformation de limite en inégalités**
Soit (u_n) une suite et $k, k' \in \mathbb{R}$.. On suppose que

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

H2 $k < l < k'$.

Alors, il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $k \leqslant u_n \leqslant k'$.

Démonstration ♡ *Posons $\varepsilon = \min(l - k, k' - l) > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang N à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Alors, si $n \geqslant \mathrm{N}$,*
- *$u_n - l \leqslant \varepsilon \leqslant k' - l$ d'où $u_n \leqslant k'$,*
- *$l - u_n \leqslant \varepsilon \leqslant l - k$ d'où $u_n \geqslant k$.*

10.3 Opérations sur les limites

10.3.1 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont très instructives pour comprendre ce qu'est une preuve d'analyse. Nous les avons rédigées en deux étapes. La première étape (qui se fait au brouillon) consiste à comprendre l'idée de l'approximation. La deuxième étape consiste à rédiger rigoureusement une preuve qui s'appuie sur le plan de démonstration correspondant aux définitions. Étudiez en particulier l'ordre dans lequel les différents objets sont introduits dans ces preuves.

PROPOSITION 10.7
Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. La suite (u_n) converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

Démonstration *Il suffit d'écrire $|u_n - l| = |(u_n - l) - 0|$ dans la définition.*
Pour montrer qu'une suite converge vers une limite l, il suffit donc de majorer $|u_n - l|$ comme le montre le résultat suivant.

PROPOSITION 10.8 **Théorème de majoration**
Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite réelle (α_n) et un rang $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que

H1 $\forall n \geqslant \mathrm{N}_1, \quad |u_n - l| \leqslant \alpha_n$,

H2 $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_2$, $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon$.
Posons $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$.
Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. Puisque $n \geqslant \mathrm{N}_1$ et $n \geqslant \mathrm{N}_2$,
$$|u_n - l| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$$

THÉORÈME 10.9 **La somme de suites convergentes est convergente**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,

H2 $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + l'$.

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons majorer* $|(u_n+v_n)-(l+l')|$ *à partir d'un certain rang. Notre hypothèse permet de majorer les quantités* $|u_n-l|$ *et* $|v_n-l'|$ *par un réel* $\varepsilon'>0$ *arbitraire à partir d'un certain rang. Faisons donc apparaître ces groupements avant d'utiliser l'inégalité triangulaire :*

$$|(u_n+v_n)-(l+l')| = |(u_n-l)+(v_n-l')| \leqslant |u_n-l|+|v_n-l'| \leqslant 2\varepsilon'$$

Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.

Soit $\varepsilon>0$.

Posons $\varepsilon'=\varepsilon/2>0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N_1\in\mathbb{N}$ *à partir duquel* $|u_n-l|\leqslant\varepsilon'$. *De même, il existe un rang* $N_2\in\mathbb{N}$ *à partir duquel* $|v_n-l'|\leqslant\varepsilon'$.

Posons $N=\max(N_1,N_2)$.

Soit $n\geqslant N$, *comme* $n\geqslant N_1$ *et* $n\geqslant N_2$,

$$|(u_n+v_n)-(l+l')| \leqslant |(u_n-l)+(v_n-l')| \leqslant |u_n-l|+|v_n-l'| \leqslant 2\varepsilon'=\varepsilon$$

THÉORÈME 10.10 ♡ **Combinaison linéaire de suites convergentes**
Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$. Alors pour tous réels $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha u_n+\beta v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha l+\beta l'$$

Démonstration *Similaire à la preuve précédente et laissée en exercice. Utiliser* $\varepsilon'=\varepsilon/(|\alpha|+|\beta|)$ *lorsque* α *et* β *ne sont pas tous les deux nuls.*

THÉORÈME 10.11 ♡ **Produit de suites convergentes**
On considère deux suites (u_n) et (v_n) convergentes :

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l\in\mathbb{R}$,

H2 $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'\in\mathbb{R}$.

Alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ll'$.

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons estimer la quantité* $|u_nv_n-ll'|$ *et utiliser notre hypothèse,* $|u_n-l|\leqslant\varepsilon'$ *et* $|v_n-l'|\leqslant\varepsilon'$. *Faisons donc apparaître ces groupements à l'intérieur des valeurs absolues avant de majorer grâce à l'inégalité triangulaire :*

$$|u_nv_n-ll'| = |u_n(v_n-l')+l'(u_n-l)| \leqslant |u_n||v_n-l'|+|l'||u_n-l| \leqslant (|u_n|+|l'|)\varepsilon'$$

Il reste $|u_n|$ *qu'il nous faut majorer. Nous savons qu'une suite convergente est bornée, donc* $|u_n|\leqslant M$ *et alors* $|u_nv_n-ll'|\leqslant(|l'|+M)\varepsilon'$. *Reste à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.*

Soit $\varepsilon>0$.

Puisque la suite (u_n) *converge, elle est bornée. Il existe* $M>0$ *tel que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\leqslant M$.

Posons $\varepsilon'=\varepsilon/(|l'|+M)>0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe* $N_1\in\mathbb{N}$ *tel que* $\forall n\geqslant N_1$, $|u_n-l|\leqslant\varepsilon'$. *Puisque* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$, *il existe* $N_2\in\mathbb{N}$ *tel que* $\forall n\geqslant N_2$, $|v_n-l'|\leqslant\varepsilon'$.

Posons $N=\max(N_1,N_2)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $n\geqslant N$, *on a*

$$|u_nv_n-ll'| = |u_n(v_n-l')+l'(u_n-l)| \leqslant |u_n||v_n-l'|+|l'||u_n-l| \leqslant (M+|l'|)\varepsilon'=\varepsilon$$

PROPOSITION 10.12 **Inverse d'une suite convergente**
Soit (u_n) une suite et $l\in\mathbb{R}$. On suppose que

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l\in\mathbb{R}$,

H2 $l\neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{l}$.

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons estimer la quantité* $|1/u_n - 1/l|$ *en utilisant l'hypothèse* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$. *Écrivons*

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l||u_n|}$$

Il reste $|u_n|$ *au dénominateur qu'il nous faut minorer. Comme* $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$, *et que* $k = |l|/2 < |l|$, *d'après la proposition* **??**, *à partir d'un certain rang,* $|1/u_n - 1/l| \leqslant 2\varepsilon'/|l|^2$. *Il nous reste à rédiger rigoureusement cette idée en suivant le plan :*

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $\varepsilon' = |l|^2\varepsilon/2$.
Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* N_1 *à partir duquel* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$.
Puisque d'après la proposition **??**, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$, *en utilisant la proposition* **??** *avec* $k = |l|/2 < |l|$, *il existe un rang* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2$, $|u_n| \geqslant |l|/2$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n \geqslant N$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l|^2/2} = \varepsilon$$

THÉORÈME 10.13 **Quotient de suites convergentes**
On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on fait les hypothèses suivantes.

- H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,
- H2 $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$,
- H3 $l' \neq 0$.

Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{l}{l'}$.

Démonstration *Il suffit d'appliquer les théorèmes* **??** *puis* **??**.

Remarque 10.5 Les théorèmes précédents s'appellent les *théorèmes généraux* sur les suites.

10.3.2 Limites et relations d'ordre

Nous allons voir dans ce paragraphe les liens entre limites et inégalités. Ces résultats sont particuliers aux suites réelles et ne s'étendront pas aux suites complexes (il n'y a pas de relation d'ordre naturelle dans $\mathbb{C}$!).

PROPOSITION 10.14 ♡♡♡ **Passage à la limite dans une inégalité**
Soit (u_n) une suite réelle et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,
- H2 À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant k$.

Alors $l \leqslant k$.

Démonstration *Montrons le résultat par l'absurde. Supposons* $l > k$ *et posons* $\varepsilon = l - k > 0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $|u_n - l| < \varepsilon$ *(on peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de la limite). D'après la deuxième hypothèse, il existe un rang* $N_2 \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $u_n \leqslant k$. *Considérons l'entier* $n = \max(N_1, N_2)$. *On devrait avoir d'une part* $l - u_n < l - k$ *d'où* $u_n > k$ *et d'autre part* $u_n \leqslant k$ *ce qui est absurde.*

Remarque 10.6 Attention aux hypothèses de ce théorème important : on *suppose* que la suite converge. En aucun cas un passage à la limite ne permet de justifier l'*existence* d'une limite. On obtient évidemment le théorème correspondant en remplaçant l'inégalité $\leqslant$ par $\geqslant$.

PROPOSITION 10.15 ♡♡♡ **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que :

- H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,
- H2 $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$,
- H3 À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration *Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec la suite* $(w_n) = (u_n - v_n)$ *et* $k = 0$.
`Multimédia : Une suite cv vers` l. `On choisit une barre de hauteur` $k < l$ `et on obtient le rang à partir duquel` $u_n \geqslant k$

THÉORÈME 10.16 ♡♡♡ Théorème des gendarmes
On considère trois suites : (u_n), (v_n) et (w_n) . On suppose que :

- H1 À partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
- H2 Les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers une *même limite* $l \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (u_n) converge vers l.

Démonstration ♡

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$*, il existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2$, $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$. *De même, il existe* $N_3 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_3$, $|w_n - l| \leqslant \varepsilon$.
D'après la première hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$.

Soit $n \geqslant N$. *On a* $u_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \varepsilon$ *et* $l - u_n \leqslant l - v_n \leqslant \varepsilon$. *Par conséquent,* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 10.7 Contrairement au passage à la limite dans les inégalités, le théorème des gendarmes garantit l'*existence* de la limite de (u_n). Bien distinguer les deux théorèmes.

THÉORÈME 10.17 ♡ Caractérisation séquentielle de la borne supérieure
On considère une partie X non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède une borne supérieure $\sup X$. Soit un réel $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $l = \sup X$.
2. l est un majorant de X et il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers l.

Démonstration ♡ *La preuve illustre bien l'utilisation des deux théorèmes précédents.*

$\Rightarrow$ *On sait que* $\sup X$ *est un majorant de la partie X. Nous allons utiliser pour la première fois une technique importante en analyse : la construction d'une suite à partir d'une propriété à quantificateurs de la forme* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \dots$ *Utilisons la caractérisation à* ε *de la borne supérieure (théorème* **??** *page ??).*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ \sup X - \varepsilon \leqslant x \leqslant \sup X$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$*, en prenant* $\varepsilon = 1/n > 0$ *dans la propriété ci-dessus, il existe un réel* $x_n \in X$ *vérifiant* $\sup X - 1/n \leqslant x_n \leqslant \sup X$.
On construit ainsi une suite de points (x_n) *de* X *qui converge vers* $\sup X$ *d'après le théorème des gendarmes.*

$\Leftarrow$ *Montrons que* l *est le plus petit des majorants de la partie* X. *Soit* M *un majorant de* X*, on a* $\forall x \in X$, $x \leqslant M$ *d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant M$$

Mais puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$*, par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que* $l \leqslant M$.

`Multimédia : illustrer cette construction séquentielle`

10.3.3 Limites infinies

Nous allons étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$.

DÉFINITION 10.8 ♡ Suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$
Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que (u_n) *diverge (ou tend)* vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N} :\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant M$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

— On dit que (u_n) *diverge (ou tend)* vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N} :\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant m$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

PLAN 10.2 : Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On utilise le plan :

1. *Soit* $M \in \mathbb{R}$.
2. *Posons* $N = ...$
3. *Vérifions : soit* $n \geqslant N$, *on a bien* $u_n \geqslant M$

Remarque 10.8 Attention, il existe des suites divergentes qui ne tendent pas vers $\pm\infty$, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ ...

On étend les théorèmes généraux aux suites qui divergent vers l'infini. Par exemple :

PROPOSITION 10.18
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration *On veut minorer* $u_n + v_n$ *à partir d'un certain rang. Avec nos hypothèses, à partir d'un certain rang,* $u_n \geqslant l-1$ *et* $v_n \geqslant M'$ *(avec* M' *aussi grand que l'on veut). Alors à partir d'un certain rang,* $u_n + v_n \geqslant M' + l - 1$. *Il suffit de rédiger rigoureusement cette idée :*

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Posons $M' = M - l + 1$.

Puisque $v_n \to +\infty$, *il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1$, $v_n \geqslant M'$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ *et que* $k = l-1 < l$, *d'après le théorème* **??**, *il existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2$, $u_n \geqslant l-1$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant l - 1 + M' = M$.

Plus généralement, on dispose des théorèmes généraux suivants qui utilisent les opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$ vues dans les tables **??**.

THÉORÈME 10.19 **Théorèmes généraux étendus à $\overline{\mathbb{R}}$**
On considère deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que :

(H1) $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$,

(H2) $v_n \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors,

— $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + l'$ sauf si $(l + l')$ est une forme indéfinie.
— $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ll'$ sauf si (ll') est une forme indéfinie.
— $u_n / v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l/l'$ sauf si l/l' est une forme indéfinie.

On utilise souvent la variante suivante du théorème des gendarmes :

THÉORÈME 10.20 ♡♡♡ **Théorème des gendarmes étendu à $\overline{\mathbb{R}}$**
Soient deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que

(H1) À partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
De même, si

(H1) À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$,

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démonstration

Soit $M \in \mathbb{N}$.

Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, *il existe un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1,\ v_n \geqslant M$.

D'après la première hypothèse, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2,\ v_n \leqslant u_n$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n \geqslant M$.

10.4 Suite extraite d'une suite

DÉFINITION 10.9 **Suite extraite**
On dit qu'un suite (v_n) est *une suite extraite* ou *une sous suite* d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

LEMME 10.21 ♡
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration *Par récurrence :*

Si $n = 0$ *alors comme* φ *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *on a bien* $\varphi(0) \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\varphi(n) \geqslant n$. *Montrons que* $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. *Comme* φ *est strictement croissante, on a nécessairement* $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. *Par conséquent* $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. *(Si pour deux entiers* x, y, *on a* $x > y$ *alors* $x \geqslant y+1$*).*

La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.

PROPOSITION 10.22 ♡♡♡ **Une suite extraite d'une suite convergente est convergente**
Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l

Démonstration *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. On suppose que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. *Montrons que* $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant N$. *D'après le lemme précédent,* $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ *et donc* $|u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$.

COROLLAIRE 10.23 ♡ **Critère de divergence d'une suite**
Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\tilde\varphi(n)}$ telles que :

H1 $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 \in \mathbb{R}$,

H2 $u_{\tilde\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2 \in \mathbb{R}$,

H3 $l_1 \neq l_2$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Démonstration *Il suffit de prendre la contraposée de la précédente proposition : si* (u_n) *admet des suites extraites qui ont des limites différentes, alors elle diverge.*

Exemple 10.2 La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente. En effet, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 alors que la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

PROPOSITION 10.24 **Critère de convergence d'une suite**
Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

H1 $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

H2 $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall p \geqslant N_1$, $|u_{2p} - l| \leqslant \varepsilon$. *Puisque* $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall p \geqslant N_2$, $|u_{2p+1} - l| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Soit $n \geqslant N$. *Il y a deux possibilités.*

- *Si* n *est pair,* $n = 2p$ *avec* $2p \geqslant N \geqslant 2N_1$ *d'où* $p \geqslant N_1$ *et alors* $|u_{2p} - l| \leqslant \varepsilon$.
- *Si* n *est impair,* $n = 2p+1$ *avec* $2p+1 \geqslant N \geqslant 2N_2+1$ *d'où* $p \geqslant N_2$ *et alors* $|u_{2p+1} - l| \leqslant \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a vérifié que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

10.5 Suites monotones

10.5.1 Théorème de la limite monotone

THÉORÈME 10.25 ♡♡♡ **Théorème de la limite monotone**

Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes.

1. Si la suite (u_n) est majorée alors elle converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration ♡♡♡

1. *Supposons que* (u_n) *soit une suite croissante et majorée par un réel* M. *L'ensemble* $\mathscr{A} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$. *En appliquant la propriété de la borne supérieure* **??**, *cet ensemble possède une borne supérieure* $l \in \mathbb{R}$. *Montrons que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in \mathscr{A}$ *tel que* $l - \varepsilon \leqslant x \leqslant l$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x = u_N$ *et on a* $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$.

   Soit $n \geqslant N$. *Puisque la suite* (u_n) *est croissante,* $u_N \leqslant u_n$ *et comme* l *est un majorant de* $\mathscr{A}$, $u_n \leqslant l$. *D'où* $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant l$. *Mais alors* $-\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant 0$ *ce qui montre que* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
2. *Supposons que* (u_n) *est croissante mais non majorée. Soit* $A \in \mathbb{R}$. *Comme* (u_n) *n'est pas majorée, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_N \geqslant A$. *Comme* (u_n) *est croissante, on a* $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$. *Par conséquent* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque 10.9

- Ce théorème dit que toute suite croissante possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- La première partie de ce théorème est souvent formulée sous la forme suivante qu'il faut impérativement retenir :

  $$\boxed{\text{Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.}}$$
- Si une suite (u_n) croissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l$.
- Si un suite (u_n) décroissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ l \leqslant u_n$.

COROLLAIRE 10.26

Soit (u_n) une suite *décroissante*. On a les deux possibilités suivantes.

1. Si (u_n) est minorée alors (u_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration *Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite* $(-u_n)$.

Remarque 10.10 Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'*existence* d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.

10.5.2 Suites adjacentes

DÉFINITION 10.10 **Suites adjacentes**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si et seulement si

1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

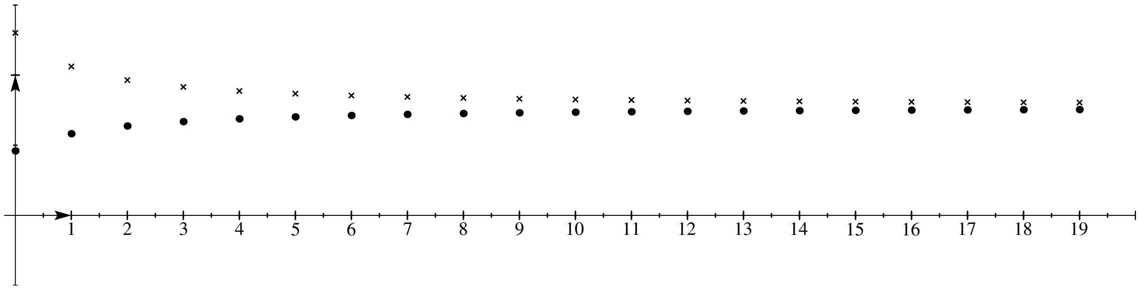


FIGURE 10.2 – Suites adjacentes

THÉORÈME 10.27 **Théorème de convergence des suites adjacentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que

H1 les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n}$$

Démonstration

1. *Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u_\mathrm{N} - v_\mathrm{N} > 0$. Mais alors, comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, il vient pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n - v_n \geqslant u_\mathrm{N} - v_\mathrm{N} > 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ car (v_n) est décroissante et $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ car (u_n) est croissante.*
2. *(u_n) est croissante et majorée par v_0. En vertu du théorème de la limite monotone ??, (u_n) converge vers une limite $l_1 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l_1$.*
3. *(v_n) est décroissante et minorée par u_0. En appliquant à nouveau le théorème de la limite monotone ??, (v_n) converge donc vers une limite $l_2 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant l_2$.*
4. *Enfin : $0 = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = l_2 - l_1$. Par conséquent $l_1 = l_2$.*

Les deux suites convergent donc vers une même limite $l = l_1 = l_2$.

10.5.3 Approximation décimale des réels

Dans tout ce paragraphe x est un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\boxed{p_n = \mathrm{E}\left(10^n x\right)}$$

Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$. Cette inégalité est équivalente à $\dfrac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \dfrac{\mathrm{E}(10^n x)+1}{10^n}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)+1}{10^n}$$

Remarque 10.11
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = 10^{-n}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des rationnels : $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

DÉFINITION 10.11 **Valeur décimale approchée**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Les rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement *valeurs décimales approchées* de x à 10^{-n} près respectivement *par défaut* et *par excès*.

Exemple 10.3

n		a_n	b_n	erreur$= 10^{-n}$
1	$1 < \sqrt{2} < 2$	1	2	1
2	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	1.4	1.5	0.1
3	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	1.41	1.42	0.01
4	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$	1.414	1.415	0.001

THÉORÈME 10.28
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

Démonstration *Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$ où $p_n = \mathrm{E}\left(10^n x\right)$. En multipliant par 10 chaque membre de cette inégalité, on obtient*

$$10 p_n \leqslant 10^{n+1} x < 10\left(p_n + 1\right).$$

Or p_{n+1} est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$ et $1 + p_{n+1}$ est le plus petit entier supérieur à $10^{n+1}x$. Par conséquent, on a

- *$10 p_n \leqslant p_{n+1}$ ce qui donne $\dfrac{p_n}{10^n} \leqslant \dfrac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$ et donc $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est croissante.*
- *$1 + p_{n+1} < 10\left(p_n + 1\right)$ ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{1 + p_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant \dfrac{p_n + 1}{10^n}$. La suite (b_n) est décroissante.*

Comme $b_n - a_n = 10^{-n}$, on a bien $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et on a prouvé que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$, on a nécessairement $l = x$ par passage à la limite dans les inégalités

10.5.4 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass

COROLLAIRE 10.29 **Théorème des segments emboîtés**
Soit $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments, $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$ tels que

H1 Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n$;

H2 Leur diamètre tend vers 0 : $(b_n - a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n = \{l\}$.

Démonstration *Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ ce qui montre que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. La deuxième hypothèse montre que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Montrons par double inclusion que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n = \{l\}$.*

$\boxed{\supset}$ *Montrons que l appartient à l'intersection des intervalles I_n. Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers l, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant l \leqslant b_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathrm{I}_n$ ce qui montre que $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n$.*

$\boxed{\subset}$ *Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n$. Montrons que $x = l$. Par définition de l'intersection d'une famille (voir l'appendice **??**), $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{I}_n$ d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que $l \leqslant x \leqslant l$ d'où $l = x$.

BIO 1 Karl Weierstrass, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin

Mathématicien Allemand. Karl Weierstrass est considéré comme le père de l'analyse moderne. Après des études secondaires brillantes, son père le force à étudier le droit à l'université de Bonn. Il ne fréquente guère les amphithéâtres et préfère s'adonner à l'escrime, aux mathématiques et à la boisson ... Tant et si bien qu'au bout de quatre ans il n'a toujours aucun diplôme. Son père consent à lui financer deux années supplémentaires afin qu'il décroche un poste d'enseignant dans le secondaire. Il rencontre alors Guddermann qui va le former aux mathématiques. Ce n'est qu'à 40 ans et alors qu'il enseigne dans le secondaire depuis une quinzaine d'année qu'il publie un article dans le fameux journal de Crelle sur les travaux qu'il a mené de façon isolée depuis plusieurs années. Il accède aussitôt à la célébrité et obtient rapidement un titre de docteur et une chaire à l'université de Berlin. Il s'est intéressé, entre autres aux fonctions analytiques et aux fonctions elliptiques. On lui doit le formalisme actuel en analyse.

THÉORÈME 10.30 ♡♡♡ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration *Vous pouvez la sauter en première lecture. Nous allons uniquement donner une idée de la construction en ne rédigeant pas les récurrences complètes.*
Considérons une suite (u_n) bornée. Il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0$. Nous allons utiliser un procédé standard d'analyse, la dichotomie *pour construire une suite extraite de (u_n) qui va converger.*

- *Posons $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ et $\mathrm{G}_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_0, c_0]\}$, $\mathrm{D}_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [c_0, b_0]\}$. Puisque $\mathrm{G}_0 \cup \mathrm{D}_0 = \mathbb{N}$, l'un de ces deux ensembles est infini.*
- *Si G_0 est infini, puisque G_0 est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément n_0 (c'est un axiome des entiers que nous verrons prochainement). Posons $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, $\mathrm{G}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}$, $\mathrm{D}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}$.*
- *Si G_0 est fini, alors D_0 est infini et possède un plus petit élément n_0. On pose alors $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$, $\mathrm{G}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}$, $\mathrm{D}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}$.*

Dans les deux cas, $\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{D}_1$ est un ensemble infini. On construit par récurrence une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{K}}$ et deux suites réelles (a_n), (b_n) vérifiant : $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant \cdots \leqslant b_k \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$. Puisque $(b_k - a_k) = (b_0 - a_0)/2^k$, on vérifie facilement que ce sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. On définit alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & n_k \end{array} \right.$$

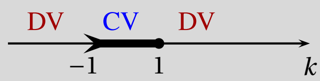
qui est strictement croissante. Puisque $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$, d'après le théorème des gendarmes, la suite extraite $u_{\varphi(k)}$ converge vers l.
`Multimédia : Animation qui explique cette construction.`

10.6 Suites géométriques

THÉORÈME 10.31 ♡♡♡♡ **Convergence d'une suite géométrique**
Considérons la suite géométrique (k^n) de raison $k \in \mathbb{R}$ et de premier terme 1.

- Si $k > 1$, la suite (k^n) diverge vers $+\infty$.
- Si $k = 1$, la suite (k^n) est constante et tend vers 1.
- Si $|k| < 1$, la suite (k^n) converge vers 0.
- Si $k \leqslant -1$, la suite (k^n) diverge.

En résumé la suite géométrique (k^n) converge si et seulement si $|k| < 1$ ou bien $k = 1$.



Démonstration

- *Supposons $k > 1$. Nous allons utiliser l'inégalité suivante, dite de Bernoulli et qui se prouve aisément par récurrence (voir l'exercice* **??** *page* **??***) :*
$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$
Comme $k > 1$, on a $k - 1 > 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k^n = (1 + (k-1))^n \geqslant 1 + n(k-1)$. Comme $k - 1 > 0$, $n(k-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- *Si $k = 1$, trivialement $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.*
- *Si $|k| < 1$, alors en supposant que k est non nul et en posant $b = 1/|k|$, on a $b > 1$. D'après le premier point, on peut affirmer que $b^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et alors la suite $|k|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Si $a = 0$, le résultat est évident.*
- *Si $k \leqslant -1$, on peut extraire deux sous-suites de la suite $\left(k^n\right)$, les suites (k^{2n}) et (k^{2n+1}). Si $k < -1$, la première sous-suite diverge vers $+\infty$ et la seconde diverge vers $-\infty$ et si $k = -1$, la première sous-suite converge vers 1 et la seconde converge vers -1. Dans les deux cas, appliquant le théorème* **??***, on peut affirmer que $\left(k^n\right)$ est divergente.*

DÉFINITION 10.12 **Série géométrique**
Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit la *progression géométrique* (ou *série géométrique*) de raison k comme étant la suite de terme général

$$\mathrm{S}_n = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

THÉORÈME 10.32 ♡♡♡♡ **Convergence d'une série géométrique**

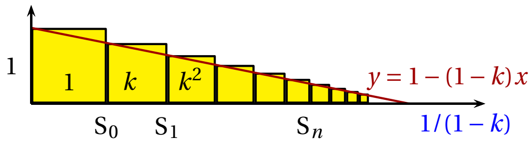
— On sait calculer une somme géométrique :

$$S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \begin{cases} \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ n+1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

— Si $|k| < 1$, la suite (S_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{1-k}$ et si $|k| \geqslant 1$, la suite (S_n) diverge.

Démonstration *Si $|k| < 1$, puisque $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $S_n = \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-k}$. Si $k = 1$, $S_n = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc (S_n) diverge. Pour $|k| \geqslant 1$ et $k \neq 1$, puisque $(1-k)S_n = 1-k^{n+1}$, on tire $k^n = (1-(1-k)S_n)/k$. Si la suite (S_n) convergeait vers l, d'après les théorèmes généraux, la suite (k^n) convergerait vers $(1-(1-k)l)/k$ ce qui est faux d'après le théorème précédent.*

Remarque 10.12 Le dessin suivant permet de visualiser la limite de la somme géométrique dans le cas où $0 < k < 1$. On place les uns après les autres des cubes de côté k^i. Multimédia : Faire varier k et la valeur de la somme



Remarque 10.13 Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques dont on connaît bien le comportement.

10.7 Relations de comparaison

10.7.1 Introduction

Bien que deux suites puissent avoir la même limite, elles peuvent avoir des comportements très différents en l'infini. On s'en convaincra en observant les graphes des suites (n), (2^n) et $(n!/10)$. Une idée simple pour comparer le comportement asymptotique de deux suites (u_n) et (v_n) est d'étudier la nature de la suite quotient (u_n/v_n). Cette idée est à la base des notions de *domination*, *prépondérance* et *équivalence* que nous allons développer maintenant. Ainsi, on dira que (v_n) est prépondérante devant (u_n) si $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On dira aussi que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On verra que cette façon de comparer le comportement asymptotique des suites aura des conséquences utiles sur les méthodes de calcul de limites.

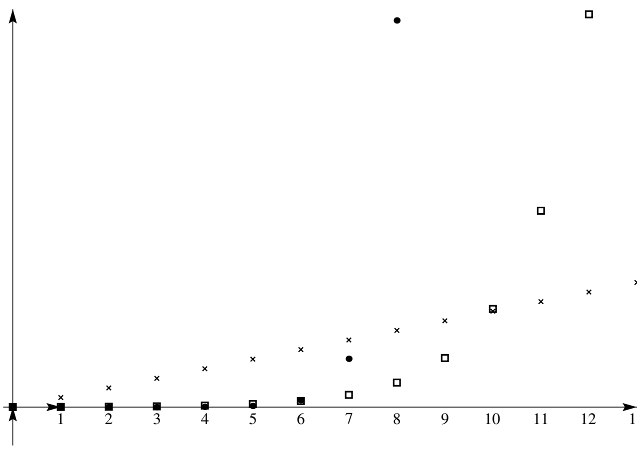


FIGURE 10.3 – × $(100n)$ - □ (2^n) - •$(n!/10)$

10.7.2 Suite dominée par une autre

DÉFINITION 10.13 **Suite dominée par une autre**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) si et seulement si il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

1. (B_n) est une suite bornée.
2. $\forall n \geqslant N, \quad u_n = B_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$

Proposition 10.33 Transitivité de la relation O
Le relation O est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites, alors :

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)$$

Démonstration *Comme* $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)$, *il existe des suites bornées* $\left(\mathrm{B}'_n\right)$ *et* $\left(\mathrm{B}''_n\right)$ *telles que à partir d'un certain rang* N' *et d'un certain autre* N'', *on a :* $\forall n \geqslant \mathrm{N}', \quad u_n = \mathrm{B}'_n v_n$ *et* $\forall n \geqslant \mathrm{N}'', \quad v_n = \mathrm{B}''_n w_n$. *Posons* $\mathrm{N} = \max\left(\mathrm{N}', \mathrm{N}''\right)$ *et pour tout* $n \geqslant \mathrm{N}$, *posons* $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}'_n.\mathrm{B}''_n$. *La suite* $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ *est bornée et :*

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad u_n = \mathrm{B}'_n v_n = \mathrm{B}'_n \mathrm{B}''_n w_n = \mathrm{B}_n w_n.$$

Par conséquent, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(w_n)$.

Théorème 10.34 Une suite est dominée par une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième est borné
Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}}$$

Démonstration *Supposons que* (v_n) *ne s'annule pas à partir du rang* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. *La suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ *est donc bien définie. On peut supposer que* (v_n) *ne s'annule jamais (et donc que* $\mathrm{N} = 0$*). Dire que :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ *revient à dire qu'il existe un rang* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *et une suite bornée* (B_n) *tels que :* $\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad u_n = \mathrm{B}_n v_n$, *ce qui est équivalent à dire que :* $\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} = \mathrm{B}_n$ *et donc que* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est bornée.*

10.7.3 Suite négligeable devant une autre

Définition 10.14 Suite négligeable devant une autre
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que

1. $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. $\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad u_n = \varepsilon_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Remarque 10.14 Écrire que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ revient à dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 10.35 Transitivité de la relation o
La relation o est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$

Démonstration *Identique à la démonstration de la transitivité de* O.

Théorème 10.36 Une suite est négligeable devant une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 0.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Démonstration *Identique à la démonstration du théorème* **??**.

Remarque 10.15 Vous rencontrerez deux façons d'utiliser la notation o.

— La première est celle de la définition. Par exemple, on peut écrire $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, ce qui signifie que $\ln n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— Mais vous rencontrerez aussi des écritures comme :

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

qui signifie que $1/(n-1) - \left(1/n + 1/n^2 + 1/n^3\right)$ est négligeable devant $1/n^3$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit : $1/n + 1/n^2 + 1/n^3$ est une approximation de $1/(n-1)$ quand $n \to +\infty$ et l'erreur commise est un $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ c'est-à-dire est négligeable devant $1/n^3$ quand $n \to +\infty$.

10.7.4 Suites équivalentes

DÉFINITION 10.15 **Suite équivalentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) si et seulement si :

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

PROPOSITION 10.37
La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On a :

- $\sim$ est réflexive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ est symétrique : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ est transitive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration *Montrons que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, à partir d'un certain rang N, $u_n - v_n = v_n\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en tire $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$. Puisque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, à partir d'un rang $N_2 \geqslant N$, $1-\varepsilon_n \neq 0$. Alors pour $n \geqslant N_2$, $v_n - u_n = -\varepsilon_n/(1-\varepsilon_n)v_n$. Définissons la suite (e_n) par $e_n = -\varepsilon_n/(1+\varepsilon_n)$. On a $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui montre que $v_n - u_n = o(u_n)$ d'où $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les autres preuves sont laissées en exercice.*

THÉORÈME 10.38 **Une suite est équivalente à une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 1.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

PLAN 10.3 : Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

on peut au choix, montrer que

1. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
2. *À partir d'un certain rang,* $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ *avec* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. *À partir d'un certain rang,* $u_n = v_n + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

THÉORÈME 10.39 **Équivalents et limites**
Soit (u_n) et (u_n) deux suites réelles . Alors :

— Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

— Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{l \neq 0}$, alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l}$.

Démonstration

— *Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang : $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$, par opération sur les limites : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.*

— *Dire que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$ revient à dire que : $\dfrac{u_n}{l} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.*

⚠ *Attention 10.4* Écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) sont tous nuls.

PROPOSITION 10.40 **Un équivalent simple permet de connaître le signe d'une suite**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes alors, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies [\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n v_n \geqslant 0]$$

Démonstration *Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang : $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le signe de $(1+\varepsilon_n)v_n$ est donc donné, à partir d'un certain rang, par celui de v_n. Par conséquent, à partir d'un certain rang, les deux suites (u_n) et (v_n) sont de me signe.*

THÉORÈME 10.41 **Produits, quotients, puissances d'équivalents**
Soit (a_n), (b_n), (u_n), (v_n) des suites vérifiant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors :

1. $\boxed{u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n}$
2. Si (v_n) et (b_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang : $\boxed{\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{b_n}}$.
3. Si (u_n) et (a_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang : $\boxed{u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Démontrons le premier équivalent. Les autres se prouvent de même. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, il existe des suites (α_n) et (β_n) toutes deux convergeant vers 1 telles que à partir d'un certain rang : $u_n = \alpha_n a_n$ et $v_n = \beta_n b_n$. Par conséquent, à partir d'un certain rang : $u_n.v_n = (\alpha_n a_n).(\beta_n b_n) = \alpha_n\beta_n.a_n b_n$ et par opération sur les limites $\alpha_n\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On a donc bien : $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$.*

Remarque 10.16 **Attention, il ne faut pas**

1. Sommer des équivalents.
2. Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas
   - Prendre des logarithmes d'équivalents.
   - Prendre des exponentielles d'équivalents.

Exemple 10.5 Par exemple :

— $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n+2$ mais cela n'a pas de sens d'écrire : $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.

— $2^n + n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$ mais par contre e^{2^n+n} n'est pas équivalent à e^{2^n}.

10.8 Comparaison des suites de référence

PROPOSITION 10.42 **Comparaison logarithmique**

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes $\boxed{\textit{strictement positifs}}$ et si, à partir d'un certain rang,

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}}$$

alors $\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)}$.

2. Soit (u_n) est une suite à termes $\boxed{\textit{strictement positifs}}$. On a :

   (a) $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l<1 \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

   (b) $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l>1 \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Démonstration

1. *Si à partir d'un certain rang :* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors, à partir d'un certain rang, on a :* $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ *et donc la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *est décroissante à partir de ce rang. Comme* (u_n) *et* (v_n) *sont à termes strictement positifs, cette suite est minorée par* 0*. On peut donc appliquer le théorème de la limite monotone* **??***, la suite* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *converge vers une limite* $l \geqslant 0$*. Par application du théorème* **??***, on peut affirmer que* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *est bornée et donc que* $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$*.*
2. *Posons* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$*.*
   (a) *Si* $l<1$ *alors on peut trouver un réel* $r \in]l,1[$ *(par exemple* $r=(l+1)/2$*). D'après le théorème* **??** *page* **??***, à partir d'un certain rang* $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$*, on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$*. Par conséquent, si* $n \geqslant \mathrm{N}$*,*

   $$\frac{u_{n+1}}{u_\mathrm{N}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\dots\frac{u_{\mathrm{N}+2}}{u_{\mathrm{N}+1}}\frac{u_{\mathrm{N}+1}}{u_\mathrm{N}} \leqslant \underbrace{r\dots .r}_{n+1-\mathrm{N}\text{ fois}} = r^{n+1-\mathrm{N}}.$$

   Donc $u_n \leqslant r^{n+1-\mathrm{N}}u_\mathrm{N}$ *et comme* $0\leqslant r<1$*, la suite géométrique* (r^n) *converge vers* 0*. On en déduit que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

   (b) *Si* $l>1$ *alors en prenant* $r\in]1,l[$*, à partir d'un certain rang* $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$*, on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant r$*. La démonstration se termine comme la précédente.*

THÉORÈME 10.43 **Comparaison des suites de référence**
Soient $a>1$, $\alpha>0$ et $\beta>0$.

$$\boxed{(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\alpha\right)} \qquad \boxed{n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(a^n\right)} \qquad \boxed{a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)} \qquad \boxed{n! = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^n\right)}$$

Démonstration

- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$*. Pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, on a* $u_n = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\left(\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$*. Mais* $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*. Par conséquent* $\dfrac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *ce qui prouve que* $(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\alpha\right)$*.*
- *Considérons maintenant la suite* (v_n) *de terme général* $v_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$*. Soit* $n\in\mathbb{N}$*. On a*

  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$$

  En appliquant le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer, puisque $0<\dfrac{1}{a}<1$*, que* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc que* $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(a^n\right)$*.*
- *Considérons la suite* (w_n) *de terme général* $w_n = \dfrac{a^n}{n!}$*. On a*

  $$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  En appliquant à nouveau le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc que* $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$*.*

— *Pour la dernière relation, si $n \geqslant 1$ on vérifie facilement que :*

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}{n\times n\times n\times \ldots \times n} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut aussi appliquer le critère de comparaison logarithmique à la suite (x_n) de terme général $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \in]0,1[.$$

THÉORÈME 10.44 **Équivalents usuels**
Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

1. $\boxed{\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
2. $\boxed{\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
3. $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
4. $\boxed{[1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}}$
5. $\boxed{[e^{u_n}-1] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
6. $\boxed{\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
7. $\boxed{[(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

Démonstration

1. *La première équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$.
2. $\dfrac{\tan u_n}{u_n} = \dfrac{\sin u_n}{u_n}\dfrac{1}{\cos u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. *La troisième équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$.
4. *Par application des formules de trigonométrie,* $1-\cos u_n = 1-\cos\left(2\dfrac{u_n}{2}\right) = 2\sin^2\dfrac{u_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{u_n^2}{4} = \dfrac{u_n^2}{2}$ *par produit d'équivalents.*
5. *La cinquième équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$.
6. $(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+u_n)} - 1 = \alpha\ln(1+u_n)$ *par application de la formule* 5 *car* $\alpha\ln(1+u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Donc, en appliquant la formule* 3, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

En conclusion à ce chapitre et avant d'aborder les exercices, il est vivement conseillé de prendre connaissance du paragraphe **??** de l'annexe **??**. On y apprendra différentes méthodes permettant de calculer des équivalents. Il sera aussi très profitable de (re-)lire le paragraphe **??** de cette même annexe.

En résumé

Les différents théorèmes et les différentes définitions de ce chapitre doivent être parfaitement compris et appris. Il faut pouvoir les illustrer par des dessins et savoir refaire les démonstrations marquées avec des ♡ . Pour la plupart, ces théorèmes et définitions seront re-formulés dans le cadre du prochain chapitre sur les fonctions réelles.
En accompagnement des exercices de ce chapitre, lisez la partie **??** page **??** sur les techniques de majoration-minoration et la partie **??** page **??** sur les équivalents. Le tout se trouve dans l'annexe **??**.
Enfin, en complément à ce chapitre, il faudra vous consacrer au paragraphe **??** page **??** toujours dans l'annexe **??**. On y traite des suites définies par récurrence un thème .... récurrent... dans les concours.