Chapitre 12

Équations différentielles, systèmes d'équations différentielles

Table des matières

12.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

12.1.1 Généralités

DÉFINITION 12.1 ♡ **Équation différentielle linéaire du premier ordre**
Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle et trois fonctions continues $a, b, c : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit qu'une fonction $y : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

si :
— la fonction y est dérivable sur I,
— $\forall t \in \mathrm{I}$, $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Remarque 12.1 Résoudre l'équation différentielle (E) sur un intervalle I consiste à déterminer l'ensemble de toutes les solutions y.

Remarque 12.2 Si la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les mêmes que celles de l'équation différentielle normalisée :

$$(\mathrm{E}_n)\ : y'(t)+\alpha(t)y(t)=\beta(t)$$

où $\alpha = b/a$ et $\beta = c/a$.

Remarque 12.3 On considère une équation différentielle normalisée :

$$(\mathrm{E})\ : y'+a(t)y=b(t)$$

Si $a,b : \mathrm{I}\mapsto\mathbb{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{C})$, toute solution de (E) est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.

THÉORÈME 12.1 ♡ **Structure de l'ensemble des solutions**
Soient $a,b : \mathrm{I}\to\mathbb{K}$ deux applications continues sur I.

$$(\mathrm{H})\ : y'+a(t)y=0$$

$$(\mathrm{E})\ : y'+a(t)y=b(t)$$

1. $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ est une droite vectorielle :

$$\boxed{\mathscr{S}_\mathrm{H}=\{t\mapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)};\ \mathrm{C}\in\mathbb{K}\}}$$

   où $\mathrm{A}(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de a sur I.
2. $\mathscr{S}_\mathrm{E}\neq\varnothing$.
3. L'ensemble des solutions de (E) est une droite affine : pour toute solution particulière $\tilde{y}\in\mathscr{S}_\mathrm{E}$,

$$\boxed{\mathscr{S}_\mathrm{E}=\{t\mapsto \tilde{y}(t)+\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)};\ \mathrm{C}\in\mathbb{K}\}}$$

Démonstration *Voir le cours de première année.*

PLAN 12.1 : Pour résoudre une équation différentielle linéaire normalisée du premier ordre

1 ***Résolution de l'équation différentielle homogène :***

$$(\mathrm{H})\ : y'+a(t)y=0$$

— *On cherche une primitive de la fonction a sur* I *:* $\mathrm{A}(t)=\int a(u)\,\mathrm{d}u$,
— *L'ensemble des solutions est la droite vectorielle*

$$\mathscr{S}_\mathrm{H}=\{t\mapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)};\ \mathrm{C}\in\mathbb{K}\}$$

2 ***Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre (méthode de la variation de la constante)*** *: On cherche une solution particulière $\tilde{y}$ de l'équation normalisée avec second membre :*

$$(\mathrm{E})\ : y'+a(t)y=b(t)$$

sous la forme

$$\boxed{\tilde{y}(t)=\mathrm{C}(t)e^{-\mathrm{A}(t)}}$$

Alors $\tilde{y}$ est solution de (E) *si et seulement si*

$$\forall t\in\mathrm{I},\quad \boxed{\mathrm{C}'(t)e^{-\mathrm{A}(t)}=b(t)}$$

3 ***L'ensemble de toutes les solutions de*** E ***est la droite affine***

$$\mathscr{S}=\{t\mapsto \tilde{y}(t)+\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)};\ \mathrm{C}\in\mathbb{K}\}$$

THÉORÈME 12.2 ♡ **Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires du premier ordre**
Soient $a,b : \mathrm{I}\to\mathbb{K}$ deux applications continues sur I. Soient $t_0\in\mathrm{I}$ et $y_0\in\mathbb{K}$.

Il existe une unique solution y au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y &= b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

On a l'expression explicite de y sous forme intégrale :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y(t) = e^{-\mathrm{A}(t)} y(t_0) + e^{-\mathrm{A}(t)} \int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{A}(s)} b(s) \,\mathrm{d}s$$

où $\mathrm{A}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$ est l'unique primitive de a sur I qui s'annule en t_0.

Démonstration *Voir le cours de première année.*

12.1.2 Problèmes de raccord

On suppose ici que $\mathrm{I} =]\alpha,\beta[$ où α et β sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$). Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel a ne s'annule pas.
On considère l'équation

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t) \quad (\mathrm{E}).$$

Pour tout $t \in \mathrm{J}$, on peut normaliser (E) en l'équation

$$\forall t \in \mathrm{J} \quad y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} y(t) = \frac{c(t)}{a(t)} \quad (\mathrm{N})$$

PLAN 12.2 : Pour résoudre (E) sur (I)

1. *On résout l'équation homogène associée à* (N) *sur les sous-intervalles* J *de* I *sur lesquels a ne s'annule pas.*
2. *On cherche une solution particulière de* (N)*, ce qui nous permet de résoudre complètement* (N) *sur ces sous-intervalles.*
3. Analyse *Toute solution de* (E) *sur un des sous intervalles* J *de* I *sur lequel a ne s'annule pas est solution de* (E) *sur ce même sous intervalle. On étudie alors comment raccorder ces solutions en un point t_0 où a s'annule. Pour ce faire : si φ_1 est une solution de* (E) *sur $\mathrm{J}_1 =]\alpha', t_0[$ et si φ_2 est solution de* (E) *sur $\mathrm{J}_2 =]t_0, \beta'[$ ($a(t_0) = 0$), pour que φ_1 et φ_2 se raccordent en t_0, il est nécessaire que :*
   1. *φ_1 et φ_2 aient une même limite l en t_0.*
   2. *La fonction φ définie sur $]\alpha',\beta'[$ par $\varphi_{|\mathrm{I}_1} = \varphi_1$, $\varphi_{|\mathrm{I}_2} = \varphi_2$ et $\varphi(b) = l$ soit dérivable en b.*

   Synthèse *Il faut par ailleurs vérifier que la fonction φ ainsi construite est bien solution de* (E) *sur $]\alpha',\beta'[$.*

Exemple 12.1 Résolvons sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad (1-t)\,y'(t) - y(t) = t$$

Normalisons (E). Nous obtenons l'équation :

$$(\mathrm{N}) : \quad \forall t \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = \frac{t}{t-1}$$

où $\mathrm{I}_1 =]-\infty, 1[$ et $\mathrm{I}_2 =]1, +\infty[$. L'équation homogène associée à (N) est :

$$(\mathrm{H}) : \quad \forall t \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = 0$$

1. Résolvons (H) sur I_1. Posons $a : \begin{cases} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{1-t} \end{cases}$. On a :

   H1 I_1 est un intervalle de $\mathbb{R}$

   H2 a est continue sur I_1.

Par application du théorème de résolution des équations différentielles homogènes du premier degré, on peut affirmer que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha_1 e^{-\mathrm{A}(t)} \end{array} \right.$$

où A est une primitive de A sur I_1 et où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par A : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(|1-t|) \end{array} \right.$. Par conséquent, les solutions de (H) sont de la forme :

$$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_1}{1-t} \end{array} \right.$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On montre de la même façon que les solutions de (H) sur I_2 sont de la forme

$$\varphi_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2}{1-t} \end{array} \right.$$

où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

2 Par la méthode de variation de la constante, identifions une solution particulière ψ_1 de (N) sur I_1. ψ_1 est de la forme : $\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda(t)}{1-t} \end{array} \right.$ où λ est une primitive de $t \rightarrow \frac{t}{1-t} e^{\mathrm{A}} = t$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et

$$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2} \frac{1}{1-t} \end{array} \right.$$

Les solutions de (N) sur I_1 sont somme de cette solution particulière de (N) et d'une solution générale de l'équation (H) et sont donc de la forme :

$$\zeta_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{\alpha_1}{1-t} = \frac{\alpha_1 + t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On prouve de même que les solutions de (N) sur I_2 sont de la forme :

$$\zeta_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2 + t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

3 $\boxed{\text{Analyse}}$ Cherchons s'il existe des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'un telle solution ζ existe. On doit avoir :

- $\zeta_{|\mathrm{I}_1}$ doit être solution de (N) sur I_1 et donc il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathrm{I}_1, \quad \zeta_{|\mathrm{I}_1}(t) = \zeta_{\alpha_1}(t) = \frac{\alpha_1 + t^2}{2(1-t)}$.
- $\zeta_{|\mathrm{I}_2}$ doit être solution de (N) sur I_2 et donc il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathrm{I}_2, \quad \zeta_{|\mathrm{I}_2}(t) = \zeta_{\alpha_2}(t) = \frac{\alpha_2 + t^2}{2(1-t)}$.
- ζ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\zeta_{|\mathrm{I}_1}$ doit avoir une limite quand $t \rightarrow 1^-$. Ceci n'est possible que si $\alpha_1 = -1$.
- De même $\zeta_{|\mathrm{I}_2}$ doit avoir une limite quand $t \rightarrow 1^+$. Ceci n'est possible que si $\alpha_2 = -1$.
- On doit de plus avoir $\lim\limits_{t \rightarrow 1^-} \zeta_{|\mathrm{I}_1(t)} = \lim\limits_{t \rightarrow 1^+} \zeta_{|\mathrm{I}_2(t)}$, ce qu'on vérifie facilement. En conclusion, on doit avoir :
  $\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{(t+1)}{2} \end{array} \right.$
- Enfin, ζ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier que la fonction que nous venons de construire est bien dérivable en 1, ce qui est ici évident.

$\boxed{\text{Synthèse}}$ On vérifie enfin qu'une telle fonction est bien solution de (E) en s'assurant qu'elle vérifie bien (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (1-t)\zeta'(t) - \zeta(t) &= -\frac{1}{2}(1-t) + \frac{(t+1)}{2} \\ &= t \end{aligned}$$

La seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ est donc ζ.

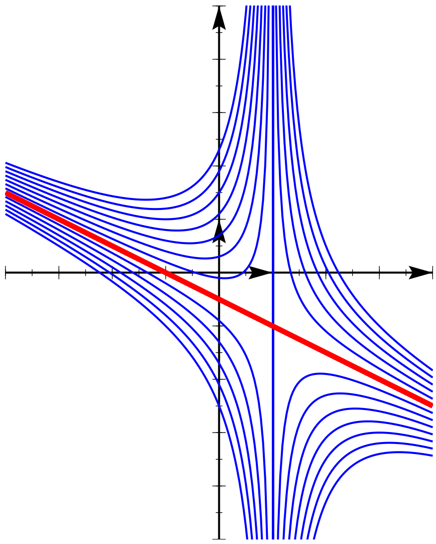

FIGURE 12.1 – Quelques courbes intégrale de (E). On remarquera celle associée à ζ

12.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 vectorielles

12.2.1 Généralités

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie n ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

DÉFINITION 12.2 ♡ **Équation différentielle linéaire d'ordre 1 vectorielle**
Soient

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \simeq \mathbb{K}^{n^2} \end{array} \right. \qquad B : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & b(t) \simeq \mathbb{K}^{n} \end{array} \right.$$

deux fonctions vectorielles continues sur I. Une fonction $x : I \mapsto F$ est solution de l'équation différentielle

$$\boxed{(E)\ : X' = A(t)X + B(t)}$$

si :

1. X est une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
2. $\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

Remarque 12.4 Une solution de (E) définit une courbe paramétrée $X : I \mapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$. On dit qu'une telle courbe est une *courbe intégrale* du système différentiel. L'espace F en mécanique s'appelle l'*espace des phases* du système.

Exemple 12.2 Résolvons le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' &= ty \\ y' &= -tx \end{cases}.$$

Solution : *En posant $z = x + iy$, $z' = t(y - ix) = -it(x + iy) = -itz$. Donc $z(t) = \mathrm{C}e^{-it^2/2}$. Les courbes intégrales sont des arcs de cercle centrés à l'origine.*

DÉFINITION 12.3 ♡ **Problème de Cauchy**
Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que $X : I \mapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une *solution du problème de Cauchy* lorsque X est une solution de l'équation différentielle (E) $: X' = A(t)X + B(t)$ et vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$. On écrit

$$(C)\ : \begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

THÉORÈME 12.3 ♡ **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**
Soient $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications continues sur I. Pour toute condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le problème de Cauchy

$$(C) : \begin{cases} X' & = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Démonstration *Admis*

COROLLAIRE 12.4 ♡ **Structure des solutions de l'équation homogène**
On considère l'équation homogène associée à (E) (sans second membre) :

$$(H) : X' = A(t)X$$

où $t \mapsto A(t) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur I. On note $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).
Alors $\mathscr{S}_H$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n :

$$\boxed{\dim \mathscr{S}_H = n}.$$

Démonstration

1. *$\mathscr{S}_H$ sev de $\mathscr{D}(I, F)$: vérification facile.*
2. *Soit $t_0 \in I$. Posons*

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{S}_H & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & X(t_0) \end{cases}$$

On vérifie facilement que Φ est linéaire. Soit $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une et une seule solution de $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de (H) telle que $X(t_0) = X_0$ c'est-à-dire telle que $\Phi(X) = X_0$. Alors Φ est bijective.

COROLLAIRE 12.5 ♡ **Structure des solutions de l'équation** (E)
L'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de l'équation avec second membre

$$(E) : X' = A(t)X + B(t)$$

(avec $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications continues sur I) est donné par

$$\mathscr{S}_E = \{X + X_0 \mid X \in \mathscr{S}_H\}$$

où x_0 est une solution particulière de $\mathscr{S}_E$ et où $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $x' = A(t)X$ associée à E.
L'ensemble $\mathscr{S}_E$ est un *espace affine non-vide de dimension n dirigé par* $\mathscr{S}_H$.

Démonstration

$\boxed{\subset}$ *Soit $\tilde{X} \in \mathscr{S}_E$. Alors $\tilde{X} - X_0$ est solution de $\mathscr{S}_H$ et donc $X \in \{X + X_0 \mid X \in \mathscr{S}_H\}$.*
$\boxed{\supset}$ *Réciproquement, on vérifie que pour tout $X \in \mathscr{S}_H$ alors $X + X_0$ est solution de (E), c'est-à-dire que $X + X_0 \in \mathscr{S}_E$.*

12.2.2 Équations d'ordre 1 vectorielles à coefficients constants

On considère maintenant $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \mapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et

$$(E) : X' = AX + B(t) \quad (H) : X' = AX$$

qui s'écrit composantes par composantes :

$$(E) : \begin{cases} x_1'(t) & = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}.$$

Cas où A **est diagonalisable**

On suppose la matrice A diagonalisable dans $\mathbb{K}$,

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \qquad \text{où } \mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

En posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, l'équation différentielle (H) $: \mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ devient $(\tilde{\mathrm{H}}) : \mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$ et chaque ligne de ce système est une équation $y_i' = \lambda_i y_i$ d'où $y_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ où $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

PROPOSITION 12.6 ♡ **Calcul pratique de** $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$
Si $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est une base de vecteurs propres de A (les colonnes de la matrice P), l'ensemble des solutions de l'équation homogène $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ s'écrivent :

$$\boxed{\mathrm{X}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathrm{X}_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\mathrm{X}_n}.$$

Démonstration *Soit* X *une solution de* (H). *Alors* $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ *est une solution de* $(\tilde{\mathrm{H}})$ *et s'écrit* $\mathrm{Y}(t) = \left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right)^{\mathrm{T}}$ *avec* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. *Donc* $\mathrm{X}(t) = \mathrm{P}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right)^{\mathrm{T}} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathrm{X}_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\mathrm{X}_n$.
Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de (H).

Exemple 12.3 1 Résolvons le système

$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + 2y \end{cases}$$

Solution : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est symétrique réelle donc diagonalisable.* $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$,

$$\mathrm{X}(t) = \alpha e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) &= \alpha e^{t} + \beta e^{3t} \\ y(t) &= -\alpha e^{t} + \beta e^{3t} \end{cases}$$

Cas où A **est trigonalisable**

Lorsque le polynôme caractéristique de A est scindé, la matrice A est trigonalisable : il existe $\mathrm{T} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$. En posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, on se ramène à résoudre un système

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{TY} + \mathrm{B}_1(t)$$

où $\mathrm{B}_1(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(t)$. On commence par résoudre la dernière ligne, et en reportant dans les lignes supérieures, on résout de proche en proche toutes les équations différentielles.

Exemple 12.4 1 Résoudre

$$\begin{cases} x' &= x + y + t \\ y' &= -x + 3y + 1 \end{cases}$$

Solution :

$$\chi_A(X) = (X-2)^2$$

On trigonalise A. $E(2) = \mathrm{Vect}(1,1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} u' &= 2u - v + 1 \\ v' &= 2v + t + 1 \end{cases}$$

En cherchant une solution particulière polynômiale ($\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' - 2P \end{cases}$ *est un isomorphisme),*

$$\begin{cases} u(t) &= Be^{2t} - Ate^{2t} - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{2} \\ v(t) &= Ae^{2t} - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} -te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix};\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

12.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et des fonctions $\alpha, \beta, \gamma, g : I \mapsto \mathbb{K}$ continues ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère l'équation différentielle

$$(E)\ : \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = g(t)$$

DÉFINITION 12.4 ♡ **Solution d'une équation différentielle du second ordre linéaire**
Une fonction $x : I \mapsto \mathbb{K}$ est une solution de l'équation (E) si :

1. x est deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $\alpha(t)x''(t) + \beta(t)x'(t) + \gamma(t)x(t) = g(t)$.

PROPOSITION 12.7 ♡ **Équation normalisée**
Si α ne s'annule pas sur I, les solutions de (E) sont les mêmes que celles de l'équation normalisée

$$(E_N)\ : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t)$$

où $a(t) = \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}$, $b(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ et $f(t) = \dfrac{g(t)}{\alpha(t)}$.

Démonstration *Par un calcul direct.*

Remarque 12.5 Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à une équation normalisée

$$(E)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

et l'équation homogène associée :

$$(H)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

PROPOSITION 12.8 ♡ **Système différentiel d'ordre** 1 **associé**
Soit $x : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On pose

$$X : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors x est solution de (E) si et seulement si X est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$(\tilde{\mathrm{E}}) : \quad \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que x est solution de* (E). *Posons* $\mathrm{X} = \left(x, x'\right)^{\mathrm{T}}$. *Alors pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a :*

$$\mathrm{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -a(t)x'(t) - b(t)x(t) + f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

et donc X *est solution de* $(\tilde{\mathrm{E}})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement si* $\mathrm{X} = \left(x, x'\right)^{\mathrm{T}}$ *est solution de* $(\tilde{\mathrm{E}})$ *alors pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x''(t) + a(t)x' + b(t)x = f(t)$ et x est solution de* (E).

Remarque 12.6 Plus généralement, si l'on considère une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$(\mathrm{E}) \ : x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = f(t)$$

où $a_1, \ldots, a_n : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ sont des fonctions continues, en posant

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

la fonction $x : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ (n fois dérivable sur I) est une solution de (E) si et seulement si la fonction $\mathrm{X} : \mathrm{I} \mapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \quad \text{où } \mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & -a_{n-1}(t) & -a_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice compagnon du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})\,[\mathrm{X}]$ et, par la proposition **??** page **??**, on sait que $\chi_{\mathrm{A}(t)}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

THÉORÈME 12.9 ♡ **Cauchy-Lipschitz linéaire**

Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$, soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution x du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = f \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

Démonstration *Considérons le problème de Cauchy pour le système d'ordre 1 :*

$$\begin{cases} \mathrm{X}' & = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{X}(t_0) & = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. *Soit x une solution de* (C). *On montre que* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ *est solution du problème de Cauchy* (C′) *d'où l'unicité grâce à l'unicité du problème de Cauchy (C')*
2. *Le problème de Cauchy (C') possède une solution* $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. *Posons $x(t) = x_1(t)$. Comme x_1 et x_2 sont dérivables sur* I, *et que $x_1' = x_2$, $x = x_1$ est deux fois dérivable sur* I. *De plus, x vérifie bien l'équation différentielle et les conditions initiales.*

Remarque 12.7 De même pour une équation linéaire d'ordre n, le problème de Cauchy admet une unique solution avec les conditions initiales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, ..., $x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

12.3.1 Équation homogène

COROLLAIRE 12.10 ♡ **Structure de $\mathscr{S}_\mathrm{H}$**

1. L'ensemble $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. L'application
$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathscr{S}_\mathrm{H} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0)) \end{cases}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration

1. *Vérifier que $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ est un sev de $\mathscr{D}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.*
2. *Vérifier que Φ_{t_0} est linéaire.*
3. *D'après Cauchy-Lipschitz, Φ_{t_0} est un isomorphisme d'où $\dim \mathscr{S}_\mathrm{H} = 2$.*

Remarque 12.8 Pour une équation différentielle linéaire d'ordre n, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

12.3.2 Résolution de l'équation avec second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle avec second membre :

$$(\mathrm{E}) \; : x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

THÉORÈME 12.11 ♡ **Structure de $\mathscr{S}_\mathrm{E}$**
L'ensemble $\mathscr{S}_\mathrm{E}$ des solutions de (E) est un plan affine. Si l'on connaît une solution particulière $\widetilde{x}$ de E, alors

$$\mathscr{S}_\mathrm{E} = \{t \mapsto \widetilde{x}(t) + \mathrm{A}x_1(t) + \mathrm{B}x_2(t);\; (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{K}^2\}$$

où (x_1, x_2) est une base de $\mathscr{S}_\mathrm{H}$.

Démonstration *Par une double inclusion facile.*

PROPOSITION 12.12 ♡ **Superposition des solutions**
On considère une équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \; : x'' + a(t)x' + b(t)x = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)$$

Si x_i est une solution particulière de l'équation

$$(\mathrm{E}_i) \; : x'' + a(t)x' + b(t)x = f_i(t)$$

alors la fonction $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est une solution particulière de (E).

Démonstration *Facile.*

Remarque 12.9 On peut trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre quand on connaît une solution ne s'annulant pas de l'équation homogène associée.
Soit l'équation différentielle avec second membre :

$$(\mathrm{E}) \; : x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

où $a, b, f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. On suppose que :

HI $y_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une solution de (H) $: x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ qui ne s'annule pas sur I.

On peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y = y_1 z$ où $z \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
On a alors équivalence entre :

1. y est solution de (E) ;
2. z est solution de

$$y_1 z'' + (2y_1' + a(t) y_1) z' = f$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

La fin de cette section est hors programme et est donnée à titre de compléments.

THÉORÈME 12.13 ♡ **Variation des constantes**
Soit (x_1, x_2) une base de $\mathscr{S}_\mathrm{H}$. On cherche une solution particulière $\tilde{x}$ de l'équation avec second membre :

$$(\mathrm{E}) \ : x'' + a(t)x' + b(t)x = f$$

sous la forme

$$\begin{cases} \boxed{\tilde{x}(t) = \lambda(t)x_1(t) + \mu(t)x_2(t)} \\ \tilde{x}'(t) = \lambda(t)x_1'(t) + \mu(t)x_2'(t) \end{cases}$$

où λ, μ sont deux fonctions dérivables sur I. La fonction x est une solution particulière de (E) si et seulement si $\forall t \in \mathrm{I}$,

$$\boxed{\begin{cases} \lambda'(t)x_1(t) + \mu'(t)x_2(t) & = 0 \\ \lambda'(t)x_1'(t) + \mu'(t)x_2'(t) & = f(t) \end{cases}}$$

Démonstration *On se ramène au système différentiel* $(\mathscr{S})$ *associé à l'équation différentielle* (E) *:*

$$(\mathscr{S}) \ : \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) + \mathrm{B}(t) \ \text{avec}\ \mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

On sait que l'espace des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}_1(t), \mathrm{X}_2(t))$ *avec* $\mathrm{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \end{pmatrix}$ *pour* $i = 1, 2$.
On cherche alors une solution particulère de $\mathscr{S}$ *sous la forme* $\mathrm{X}_0 : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{X}_1(t) + \mu(t)\mathrm{X}_2(t)$ *avec* λ, μ *dérivables sur* I.
On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} & \mathrm{X}_0 \text{ est solution particulière de } \mathscr{S} \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{X}_0'(t) = \mathrm{A}\mathrm{X}_0(t) + \mathrm{B} \\ \Longleftrightarrow & \lambda'(t)\mathrm{X}_1(t) + \mu'(t)\mathrm{X}_2(t) + \lambda(t)\mathrm{X}_1'(t) + \mu(t)\mathrm{X}_2'(t) = \mathrm{A}(t)\big(\lambda(t)\mathrm{X}_1(t) + \mu(t)\mathrm{X}_2(t)\big) + \mathrm{B}(t) \\ \Longleftrightarrow & \lambda'(t)\mathrm{X}_1(t) + \mu'(t)\mathrm{X}_2(t) = \mathrm{B}(t) \end{aligned}$$

car X_1 *et* X_2 *sont solutions du système homogène* $\mathrm{X}' = \mathrm{A}\mathrm{X}$.
On en tire que $x_0 = \lambda(t)x_1(t) + \mu(t)x_2(t)$ *est solution particulière de* (E) *si et seulement si* $\begin{cases} \lambda'(t)x_1(t) + \mu'(t)x_2(t) & = 0 \\ \lambda'(t)x_1(t) + \mu'(t)x_2(t) & = f(t) \end{cases}$.

Remarque 12.10 Pour tout $t \in \mathrm{I}$, le système précédent d'inconnues $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$ possède une unique solution, puisque le déterminant de ce système est le wronskien $w(t) \neq 0$. On peut donner une forme explicite de la solution particulière :

$$y(t) = \int_0^t \frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w(s)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

PLAN 12.3 : Pour résoudre une équation (E) : x" + a(t) x' + b(t) = f(t)

Pour résoudre une équation

$$(\mathrm{E}) \ : x'' + a(t)x' + b(t) = f(t)$$

1. *Résoudre d'abord l'équation homogène associée*

$$(\mathrm{H}) \ : x'' + a(t)x' + b(t) = 0$$

2. *Chercher une solution particulière de l'équation avec second membre*
   — *Y a-t-il une solution évidente ?*

— *Peut-on appliquer le principe de superposition des solutions ?*
— *Si on ne voit pas de solution évidente, appliquer la méthode de la variation de la constante.*

DÉFINITION 12.5 ♡ **Système fondamental de solutions**

On appelle *système fondamental* de l'équation différentielle (E), toute base de $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$.

DÉFINITION 12.6 ♡ **Wronskien**
Soient $(x_1,\dots,x_n)$ n solutions de l'équation homogène (H) et f une base de F.

1. On appelle matrice wronskienne du système de solutions, la matrice
$$\mathrm{W}(t) = \mathrm{Mat}_f\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)$$
2. Le déterminant de cette matrice s'appelle le Wronskien du système de solutions :
$$w(t) = \det_f\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)$$

THÉORÈME 12.14 ♡ **Liberté d'un système de solutions**
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de fonctions $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{E}$ solutions de l'équation homogène (H) et $w(t)$ le Wronskien de ce système.

1. $\big(\exists t_0 \in \mathrm{I},\ w(t_0)=0\big) \Longleftrightarrow \big(\forall t \in \mathrm{I},\ w(t)=0\big)$
2. $(x_1,\dots,x_n)$ est un système fondamental de solutions si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

Démonstration

1. *$(ii) \implies (i)$ est évident. Si $w(t_0)=0$, $\big(x_1(t_0),\dots,x_n(t_0)\big)$ est lié dans F donc il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que*
$$\lambda_1 x_1(t_0) + \dots + \lambda_n x_n(t_0) = 0_{\mathrm{F}}$$
Posons $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. $y \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ et $y(t_0)=0$. Par unicité de la solution du pb de Cauchy, y est la fonction nulle. Donc $\forall t \in \mathrm{I}$,
$$\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) = 0$$
et donc $\forall t \in \mathrm{I}$, $w(t)=0$.
2. *S'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $w(t_0)=0$, on a vu que $(x_1,\dots,x_n)$ était lié dans F^{I} et la réciproque est immédiate. Donc $(x_1,\dots,x_n)$ est un système fondamental si et seulement si $\forall t \in \mathrm{I}$, $w(t) \neq 0$ ce qui est équivalent à dire qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $w(t_0) \neq 0$.*

LEMME 12.15 ♡
Dérivation d'un déterminant Soient $x_1,\dots,x_n : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{F}$ n fonctions vectorielles dérivables. La fonction
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \det_f(x_1(t),\dots,x_n(t)) \end{array} \right.$$
est dérivable sur I et $\forall t \in \mathrm{I}$,
$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det_f\big(x_1(t),\dots,x_{j-1}(t), x_j'(t), x_{j+1}(t),\dots,x_n(t)\big)$$

Démonstration *Comme* $\det(\mathrm{A}(t)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}([)n]} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}(t)\dots a_{\sigma(n),n}(t)$ *On utilise la dérivation d'un produit :*
$$(a_1\dots,a_n)' = \sum_{j=1}^{n} a_1 \dots a_j' \dots a_n$$

LEMME 12.16 ♡♡
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{F})$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{F}^n$.
$$\sum_{j=1}^{n} \det_f(x_1,\dots,x_{j-1},u(x_j),x_{j+1},\dots,x_n) = \mathrm{Tr}(u)\det_f(x_1,\dots,x_n)$$

Démonstration $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \det_e(x_1,\dots,u(x_i),\dots,x_n) \end{array} \right.$ *est une forme n-linéaire alternée. Si $x_k = x_l$,*

$$\varphi(x_1,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,u(x_k),\dots,x_l,\dots,x_n) + \det_e(x_1,\dots,x_k,\dots u(x_l),\dots,x_n) = 0$$

Il existe une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x_1,\dots,x_n)$, $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,x_n)$. En prenant $(x_1,\dots,x_n) = (e_1,\dots,e_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \det_e(e_1,\dots,u(e_i),\dots,e_n) = \operatorname{Tr}(u)$$

THÉORÈME 12.17 ♡ **Expression du Wronskien**
Soient $(x_1,\dots,x_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène $x' = a(t)(x)$. On note $w(t) = \det_f(x_1(t),\dots,x_n(t))$ le wronskien. Alors si $t_0 \in I$,

$$\forall t \in I, \quad \boxed{w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(a(s))\,\mathrm{d}s}}$$

Démonstration $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \det_e(x_1,\dots,u(x_i),\dots,x_n) \end{array} \right.$ *est une forme n-linéaire alternée. Si $x_k = x_l$,*

$$\varphi(x_1,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,u(x_k),\dots,x_l,\dots,x_n) + \det_e(x_1,\dots,x_k,\dots u(x_l),\dots,x_n) = 0$$

Il existe une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x_1,\dots,x_n)$, $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,x_n)$. En prenant $(x_1,\dots,x_n) = (e_1,\dots,e_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \det_e(e_1,\dots,u(e_i),\dots,e_n) = \operatorname{Tr}(u)$$

12.3.3 Résolution de l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants dans $\mathbb{C}$

On considère dans tout le reste de cette section l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$(E) : \quad ax'' + bx' + cx = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ qui s'écrit vectoriellement $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$.
On rappelle que :

DÉFINITION 12.7 ♡ **Équation caractéristique**
L'équation complexe $a\,X^2 + b\,X + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle (E).

On remarque que l'équation caractéristique de E s'écrit exactement $\chi_A(X) = 0$ où χ_A est le polynôme caractéristique de A.
Les racines de l'équation caractéristique de (E) sont les valeurs propres de A.
On a alors le théorème :

THÉORÈME 12.18 ♡♡♡ **Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$**
Considérons $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ ainsi que (E) l'équation différentielle donnée par :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{array} \right.}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\alpha t + \beta)\, e^{rt} \end{array} \right.}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration
On peut utiliser le fait que l'espace des solutions de l'équation différentielle est de dimension 2 et remarquer que les deux fonctions :

— $t \mapsto e^{r_1 t}$ *et* $t \mapsto e^{r_2 t}$ *dans le cas* $\Delta \neq 0$ *;*
— $t \mapsto e^{rt}$ *et* $t \mapsto te^{rt}$ *dans le cas* $\Delta \neq 0$ *;*

sont linéairement indépendantes et forment donc une base de l'espace des solutions.
On peut aussi procéder plus directement comme suit (ce qui présente l'avantage de ne pas utiliser le théorème portant sur la dimension de l'espace des solutions qui est conséquence du théorème de Cauchy pour les systèmes linéaires que nous avons admis) :

— *Si* $\Delta \neq 0$ *alors* χ_A *admet deux valeurs propres distinctes* r_1, $r_2 \in \mathbb{C}$ *et, par condition suffisante de diagonalisabilité,* A *est diagonalisable. Il existe donc* $P \in GL_2(\mathbb{C})$ *telle que* $\operatorname{Diag}(r_1, r_2) = P^{-1}AP$. *Par la proposition 12.6 page 6, on sait que si* X_1 *et* X_2 *sont les vecteurs colonnes de* P *(c'est-à-dire les vecteurs propres de* A*) alors les solutions de l'équation homogène* $X'(t) = AX(t)$ *s'écrivent* $X(t) = \tilde{\alpha}_1 e^{r_1 t} X_1 + \tilde{\alpha}_2 e^{r_2 t} X_2$ *où* $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathbb{C}$. *On en déduit que* $x(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t}$ *où* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ *est solution de* (E). *On vérifie réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de* (E)..
— *Si* $\Delta = 0$ *alors* χ_A *admet une unique racine double* $r \in \mathbb{C}$. *Comme* χ_A *est scindé sur* $\mathbb{C}$, A *est trigonalisable et il existe* $T = \begin{pmatrix} r & \gamma \\ 0 & r \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *où* $\gamma \in \mathbb{C}$ *et* $P \in GL_2(\mathbb{C})$ *telles que* $T = P^{-1}AP$. *Nécessairement,* $\gamma \neq 0$ *car sinon* A *serait semblable à* I_2 *ce qui n'est pas le cas. Posons* $\tilde{X} = P^{-1}X$. *L'équation différentielle* $X' = AX$ *est alors équivalente à* $\tilde{X}' = T\tilde{X}$ *et si* $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$, *cette dernière équation différentielle s'écrit :*
$$\begin{cases} \tilde{x}_1' &= r\tilde{x}_1 + \gamma \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2' &= r\tilde{x}_2 \end{cases}.$$
Il vient alors $\tilde{x}_2 = \alpha e^{rt}$ *et* $\tilde{x}_1' = r\tilde{x}_1 + \alpha\gamma e^{rt}$. *On résout cette équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre et on trouve* $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha} e^{rt} + \tilde{\beta} t e^{rt}$ *où* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{C}$. *On note* X_1 *et* X_2 *les deux vecteurs colonnes de* P. *Alors* X *est solution de* $X' = AX$ *si et seulement si il existe* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{C}$ *tels que* $X = \tilde{\alpha} e^{rt} X_1 + \tilde{\beta} t e^{rt} X_2$ *et* x *est solution de* (E) *si et seulement si il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $x(t) = (\alpha t + \beta) e^{rt}$.

Prouvons alors le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

PROPOSITION 12.19 ♡ **Théorème de Cauchy**
Soient $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$
Il existe une unique solution φ de (E) vérifiant les conditions initiales (t_0, y_0, y_1), c'est-à-dire telle que à la fois $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_1$.

Démonstration *On va faire la démonstration dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique associée à* (E) *est non nul. Dans le cas où ce discriminant est nul, la démonstration est identique. Les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ *où* r_1 *et* r_2 *sont les deux racines de l'équation caractéristique et où* c_1 *et* c_2 *sont des complexes. Montrons qu'il existe une et une seule solution* φ_0 *vérifiant les conditions initiales :* $\varphi_0(t_0) = y_0$ *et* $\varphi_0'(t_0) = y_1$. *Le couple* (c_1, c_2) *doit être le couple solution du système :*
$$\begin{cases} xe^{r_1 t_0} + ye^{r_2 t_0} = y_0 \\ xr_1 e^{r_1 t_0} + yr_2 e^{r_2 t_0} = y_1 \end{cases}.$$
Ce système possède bien une et une seule solution car son déterminant
$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1 + r_2) t_0} - r_1 e^{(r_1 + r_2) t_0} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) t_0}$$
est non nul. Ce qui prouve la proposition.

12.3.4 Résolution de l'équation différentielle homogène du second ordre dans $\mathbb{R}$

THÉORÈME 12.20 ♡♡♡ **Résolution des équations différentielles du premier ordre dans $\mathbb{R}$**
Considérons $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ ainsi que (E) l'équation différentielle donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$
Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E).

— Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions :
$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{cases}}$$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(\alpha t + \beta\right) e^{rt} \end{array} \right.}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

— Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique de (E) admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\right] e^{rt} \end{array} \right.}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration

— *Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe.*

— *Supposons que le discriminant soit négatif et donc que l'équation caractéristique de* (E) *possèdent deux racines complexes conjuguées : $r \pm i\omega \in \mathbb{C}$. Par application du théorème complexe 12.18 page 13, les solutions de* (E) *sont de la forme $t \mapsto \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Les fonctions $t \mapsto e^{rt} \cos \omega t$ ($\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/2$) et $t \mapsto e^{rt} \sin \omega t$ ($\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = -1/2$) sont donc solutions de* (E) *ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires. Réciproquement, si φ est une solution réelle de* (E)*, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que φ s'écrit $\varphi : t \mapsto \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t}$. Comme f est réelle, elle est égale à sa partie réelle et il vient :*

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{Re}(f) \\ &= \frac{f+\bar{f}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t} + \bar{\lambda}_1 e^{(r+i\omega)t} + \bar{\lambda}_2 e^{(r+i\omega)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t} + \left(\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\right) e^{(r-i\omega)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t} + \overline{\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t}\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Re}\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right)}_{\alpha \in \mathbb{R}} e^{rt} \cos \omega t + \underbrace{\operatorname{Im}\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right)}_{\beta \in \mathbb{R}} e^{rt} \sin \omega t \end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule annoncée.

Remarque 12.11 Dans le cas réel, $S_{\mathbb{R}}$ (E) est encore un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Exemple 12.5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$. Son discriminant réduit est $\omega^2 > 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc $\pm\omega$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $t \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 12.6 Résolvons maintenant, toujours dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$. Son discriminant réduit est $\omega^2 < 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i\omega$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $t \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

12.3.5 Équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre

On considère dans toute la suite une équation différentielle du second ordre à coefficients complexes

$$\forall t \in I \quad ay'' + by'(t) + cy(t) = d(t) \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $d : I \to \mathbb{C}$. On admettra les résultats suivants :

PROPOSITION 12.21 ♡
Toute solution de (E) est somme d'une solution particulière de l'équation homogène associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

PROPOSITION 12.22 **Cas où d est une fonction polynomiale**
On suppose que d est une fonction polynomiale. Alors (E) possède une solution particulière de la forme :
- Q si $c \neq 0$.
- tQ si $c = 0$ et $b \neq 0$
- t^2Q si $b = c = 0$.

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

PROPOSITION 12.23 **Cas où $d = \mathrm{P}e^{mt}$**
On suppose que d est de la forme $d : t \mapsto \mathrm{P}(t)\, e^{mt}$ où P est une fonction polynomiale et où $m \in \mathbb{C}$. Alors (E) possède une solution particulière de la forme :
- $\mathrm{Q}e^{mt}$ si m n'est pas une racine de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$
- $t\mathrm{Q}e^{mt}$ si m est une racine simple de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$
- $t^2\mathrm{Q}e^{mt}$ si m est une racine double de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

PROPOSITION 12.24 **Cas où d est une combinaison linéaire de fonctions** sin **et** cos
Soient $\eta_1, \eta_2, a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall t \in \mathrm{I}, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \boxed{\eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t)} \qquad \text{(E)}$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Soit $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$. On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
& \varphi_0 \text{ est solution de (E)} \\
\iff \quad & \forall t \in \mathrm{I}, \quad a\varphi_0''(t) + b\varphi_0'(t) + c\varphi_0(t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\iff \quad & \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left(\left(1-\omega^2\right)\mu_1 + \omega\mu_2\right)\cos(\omega t) + \left(\left(1-\omega^2\right)\mu_2 - \omega\mu_1\right)\sin(\omega t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\iff \quad & \begin{cases} \left(1-\omega^2\right)\mu_1 + \omega\mu_2 & = \eta_1 \\ -\omega\mu_1 + \left(1-\omega^2\right)\mu_2 & = \eta_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est $\left(1-\omega^2\right) + \omega^2 \neq 0$ et le système possède toujours un couple solution. L'équation (E) *admet donc toujours une solution de la forme indiquée.*

Exemple 12.7 Résolvons (E) : $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + t$ dans $\mathbb{R}$. Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ est 9. Ses deux racines sont -1 et 2. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}$. Cherchons une solution particulière de $\left(\mathrm{E}'\right)$: $y'' - y' - 2y = 3e^{-t}$.Par application du critère 12.23, comme -1 est une racine de l'équation caractéristique, il faut chercher cette solution particulière sous la forme $t \mapsto ate^{-t}$. En injectant cette fonction dans l'équation différentielle $\left(\mathrm{E}'\right)$, on trouve $a = -3/2$. Cherchons maintenant une solution particulière de $\left(\mathrm{E}''\right)$: $y'' - y' - 2y = t$. La forme du second membre nous invite à utiliser le critère 12.22 et à chercher cette solution particulière sous la forme $t \mapsto bt + c$. Par la même méthode que précédemment, on trouve : $b = -1/2$ et $c = 0$. Le principe de superposition nous permet alors d'affirmer que $t \mapsto -1/2t - 3/2e^{-t}$ est une solution particulière de (E). Enfin, les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} - 1/2t - 3/2e^{-t}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

12.3.6 Changement de variables dans les équations différentielles d'ordre 2

On considère une équation différentielle sur un intervalle I :

$$\text{(E)} \ : x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

soit $\varphi : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{J}$ un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme. On pose $y = x \circ \varphi^{-1} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$. La fonction x est solution de (E) si et seulement si la fonction y est solution d'une autre équation différentielle (E$'$) linéaire du second ordre. En choisissant convenablement φ, on peut espérer se ramener à une équation plus simple. Connaissant la fonction y, on retrouve la fonction $x = y \circ \varphi$.

Exemple 12.8 Résoudre sur $\mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[$, l'équation différentielle

$$\text{(E)} \ : x'' + \tan(t)x' - \cos^2 t x = \sin t - \sin^3 t$$

avec le changement de variables $s = \sin(t)$.

Solution : *La fonction* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{J} \\ t & \longmapsto & \sin t \end{array} \right.$ *réalise un* $\mathscr{C}^2$*-difféomorphisme de* $\mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[$ *vers* $\mathrm{J} =]-1, 1[$*. En posant* $y = x \circ \varphi^{-1}$, $\forall t \in \mathrm{I}$, $x(t) = y(\sin t)$, $y(s) = x(\arcsin s)$. *On calcule pour* $t \in \mathrm{I}$,

$$x'(t) = y'(\sin t)\cos t \quad x''(t) = y''(\sin t)\cos^2 t - y'(\sin t)\sin t$$

et y *doit vérifier* $\forall t \in \mathrm{I}$,

$$y''(\sin t)\cos^2 t - \cos^2 t\, y(\sin t) = \sin t - \sin^2 t$$

donc $\forall s \in \mathrm{J}$,

$$y''(s) - y(s) = s$$

On résout sur J *cette équation différentielle et on trouve*

$$y(s) = \mathrm{A}e^{s} + \mathrm{B}e^{-s} - s$$

d'où

$$x(t) = \mathrm{A}e^{\sin t} + \mathrm{B}e^{-\sin t} - \sin t$$

12.4 L'essentiel

1. Savoir résoudre une équation linéaire du premier ordre avec la variation de la constante.
2. Comprendre le raisonnement pour les équations non normalisées.
3. Systèmes différentiels $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$: connaître les propriétés théoriques (structure de $\mathscr{S}$, , variation des constantes).
4. Systèmes $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$: connaître l'expression des solutions dans le cas où A est diagonalisable.
5. Equations différentielles du second ordre