

# Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

## Table des matières

<b>11 Fonctions vectorielles, arcs paramétrés</b>	<b>1</b>
11.1 Fonctions de I dans $\mathbb{R}^m$	1
11.1.1 Limite, continuité	1
11.1.2 Dérivabilité	2
11.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	6
11.1.4 Développements limités et formule de Taylor-Young <b>Hors programme</b>	6
11.1.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$	7
11.1.6 Extremum d'une fonction dérivable	7
Théorème de Rolle	7
Égalité des accroissements finis	8
Inégalité des accroissements finis	9
Application : Variations d'une fonction	10
Application aux suites définies par récurrence : majoration de l'erreur	10
Condition suffisante de dérivabilité en un point	11
11.1.7 Formules de Taylor	12
Formule de Taylor avec reste intégral	12
Inégalité de Taylor-Lagrange	13
Formule de Taylor-Young	14
Utilisation des trois formules de Taylor	15
11.1.8 Méthode des rectangles, Sommes de Riemann	17
11.2 Arcs paramétrés	20
11.3 Étude d'une courbe paramétrée plane	21
11.3.1 Étude locale en un point stationnaire <b>Hors programme</b>	21
11.3.2 Branches infinies des courbes paramétrées <b>Hors programme</b>	22
11.3.3 Étude d'une courbe paramétrée	25

## 11.1 Fonctions de I dans $\mathbb{R}^m$

Dans toute la suite I est un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $E = \mathbb{R}^m$  est muni de la norme euclidienne  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ . On considère des fonctions  $f : I \rightarrow E$ . Une telle application est définie par ses applications composantes  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . On note  $\mathcal{F}(I, E)$  l'ensemble formé par de telles applications. On muni facilement  $\mathcal{F}(I, E)$  d'une addition (addition des fonctions) et d'une multiplication par un scalaire (multiplication d'une fonction par un scalaire). Ces deux opérations en font un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### 11.1.1 Limite, continuité

On commence par quelques rappels du chapitre ?? auquel on renvoie aussi pour les preuves.

**DÉFINITION 11.1 ♡ Limite d'une fonction en un point**

On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow E$  admet une limite  $l = (l_1, \dots, l_m) \in E$  quand  $x \rightarrow a \in \bar{I}$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

On écrit dans ce cas  $\lim_{x \rightarrow a} f = l$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

**Remarque 11.1** Cela revient à dire que  $\|f(x) - l\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

**DÉFINITION 11.2 ♡ Limite d'une fonction en un point**

On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow E$  admet une limite  $l = (l_1, \dots, l_m) \in E$  quand  $x \rightarrow a \in \bar{I}$  si et seulement si chacune de ses applications composantes  $f_i$  admet  $l_i$  pour limite quand  $x \rightarrow a$ . On écrit dans ce cas  $\lim_{x \rightarrow a} f = l$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

**DÉFINITION 11.3 ♡ Continuité d'une fonction en un point**

On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow E$  est continue en  $a \in I$  si et seulement si  $f$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  et que de plus cette limite est  $f(a)$ .

**DÉFINITION 11.4 ♡ Continuité d'une fonction sur un intervalle**

On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow E$  est continue sur  $I$  si et seulement si elle est continue en chaque point de  $I$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(I, E)$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $I$  et à valeurs dans  $E$ .

**PROPOSITION 11.1**

Soit  $f : I \rightarrow E$ . On a équivalence entre :

- 1 la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .
- 2 chaque application coordonnée  $f_i$  de  $f$  est continue sur  $I$ .

**PROPOSITION 11.2 Opérations sur les fonctions continues**

Une combinaison linéaire de deux fonctions continues définies sur  $I$  et à valeurs dans  $E$  est encore continue.  
Autrement dit,  $\mathcal{C}^0(I, E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

**11.1.2 Dérivabilité****DÉFINITION 11.5 Dérivabilité**

Une fonction  $f \in \mathcal{F}(I, E)$  avec  $E = \mathbb{R}^m$  est dite dérivable en  $a \in I$  si et seulement si

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite  $l \in E$  quand  $x \rightarrow a$ .

Si cette limite existe, on la note  $f'(a)$  et on l'appelle (vecteur) dérivée de  $f$  au point  $a$ .

**Remarque 11.2** Tout comme dans le cas des fonctions réelles à valeurs réelles, on pourrait définir la dérivée à droite et la dérivée à gauche d'une fonction  $f \in \mathcal{F}(I, E)$ .

**DÉFINITION 11.6 Fonction dérivée**

On dit que  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si elle est dérivable en chaque point de  $I$ .

Dans ce cas, on note  $f'$  la fonction qui à tout  $a$  de  $I$  associe  $f'(a)$ . Cette fonction est la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**PROPOSITION 11.3 Dérivabilité des applications coordonnées**

Soient  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  et  $a \in I$ . On a équivalence entre :

- 1  $f$  est dérivable en  $a$ .
- 2 chacune des applications composantes de  $f$  est dérivable en  $a$ .

De plus, dans ce cas,  $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$

**Démonstration** Le taux d'accroissement  $\Delta$  est une fonction de  $I \setminus \{a\}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . La fonction est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\Delta$  admet une limite quand  $x \rightarrow a$ . C'est équivalent à dire que les fonctions coordonnées du taux d'accroissement ont toutes une limite en  $a$ , ou encore que chacune des fonctions coordonnées de  $f$  est dérivable en  $a$ .

**DÉFINITION 11.7 ♡ Négligeabilité**

On dit que la fonction  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  est négligeable devant la fonction scalaire  $\varphi$  au voisinage du point  $a$ , et l'on note  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\varphi(x))$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap A, \|f(x)\| \leq \varepsilon |\varphi(x)|$$

Lorsque la fonction  $\varphi$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  privé de  $a$ , c'est équivalent à dire que  $\frac{1}{\varphi(x)} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0_{\mathbb{R}}$ .

**PROPOSITION 11.4 Développement limité à l'ordre 1**

Soient  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  et  $a \in I$ . On a équivalence entre :

- $f$  est dérivable en  $a$ ;
- $f$  admet un DL(a,1) :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)v + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

où  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Dans ce cas,  $v = f'(a)$ .

**Démonstration**

⇒ Si  $f$  est dérivable en  $a$ , on pose

$$\Theta : \begin{cases} I & \rightarrow E \\ x & \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \end{cases}$$

Alors pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$ ,

$$\frac{\Theta(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

d'où le résultat.

⇐ Réciproquement, si  $f(x) = f(a) + (x - a)v + o_{x \rightarrow a}(x - a)$  alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} v$  et  $f$  est dérivable en  $a$ . De plus,  $f'(a) = v$ .

**Remarque 11.3 Interprétation cinématique** Si  $m = 2$  ou  $3$ , l'ensemble des points  $f(t)$  décrit la trajectoire (ou le support) du mouvement d'un mobile dans le plan ou dans l'espace. Le vecteur  $f'(t)$  correspond alors au vecteur vitesse et il est tangent à la trajectoire en le point  $f(t)$ .

**COROLLAIRE 11.5 ♡♡♡ Dérivabilité en un point implique continuité en ce point**

Soient  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  et  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors elle admet un DL(a,1) : pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

et donc  $\lim_a f = f(a)$ . Alors  $f$  est continue en  $a$ .

On a donc :

**COROLLAIRE 11.6 ♡♡♡ Dérivabilité implique continuité**

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ . Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**THÉORÈME 11.7 ♡ Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable**

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ . Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  alors pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f + \beta g$  est dérivable sur  $I$ . De plus,

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

**Démonstration** Soit  $a \in I$ . Comme  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a$  alors pour tout  $x \in I$ ,

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(a) + \beta g(a) + \alpha f'(a) + \beta g'(a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)$$

alors  $\alpha f + \beta g$  est dérivable en  $a$  et  $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$ .

**THÉORÈME 11.8 ♡ Quelques opérations**

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(I, E)$  avec  $E = \mathbb{R}^m$ ,  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $F = \mathbb{R}^m$  et  $B : E \times F \rightarrow G$  bilinéaire et enfin  $\varphi : J \rightarrow I$  dérivable sur  $J$ . Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  alors

1.  $L \circ f$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$(L \circ f)'(x) = L(f'(x)).$$

2.  $B(f, g)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,

$$(B(f, g))'(x) = B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x)).$$

3.  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $J$  et pour tout  $t \in J$ ,

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t)).$$

**Démonstration**

1. On a

$$L(f(x)) = L(f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)) = L(f(a)) + (x-a)L(f'(a)) + (x-a)L(\underset{x \rightarrow a}{o}(x-a))$$

où  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $\lim_a \varepsilon = 0$ . Comme  $L$  est une application linéaire définie sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $L$  est continue et  $\tilde{\varepsilon}(x) = L(\varepsilon(x-a)) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Alors

$$L(f(x)) = L(f(a)) + (x-a)L(f'(a)) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)$$

et  $L \circ f$  est dérivable en  $a$  de dérivée  $L(f'(a))$ .

2. De même,

$$\begin{aligned} & B(f(x), g(x)) \\ &= B\left(f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a), g(a) + (x-a)g'(a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)\right) \\ &= B(f(a), g(a)) + (x-a)\left(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\right) + B\left(f(a) + (x-a)f'(a) + g(a) + g'(a)(x-a), \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)\right). \end{aligned}$$

Mais

$$B\left(f(a) + (x-a)f'(a) + g(a) + g'(a)(x-a), \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)\right) = (x-a)B\left(f(a) + (x-a)f'(a) + g(a) + g'(a)(x-a), \varepsilon(x-a)\right)$$

avec  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_a \varepsilon = 0$ . Comme  $B$  est bilinéaire sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et  $\lim_{x \rightarrow a} B\left(f(a) + (x-a)f'(a) + g(a) + g'(a)(x-a), \varepsilon(x-a)\right) = 0$ . Alors

$$B(f(x), g(x)) = B(f(a), g(a)) + (x-a)\left(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\right) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x-a)$$

et  $x \mapsto B(f, g)$  est dérivable en  $a$  avec  $(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$ .

3. Enfin, en utilisant que  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)$ , c'est-à-dire que  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$  avec  $\lim_0 \varepsilon = 0$ , on calcule que :

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(x) &= f \left( \underbrace{\varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0)}_{=h} \right) \\ &= f(\varphi(t_0)) + \left( (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0) \right) f'(\varphi(t_0)) + h\varepsilon(h) \\ &= f(\varphi(t_0)) + (t-t_0)\varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0)) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0)f'(\varphi(t_0)) + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} h\varepsilon(h) &= \left( (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0) \right) \varepsilon \left( (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0) \right) \\ &= (t-t_0) \left( \varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(1) \right) \varepsilon \left( (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0) \right). \end{aligned}$$

Comme  $\left( \varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(1) \right) \varepsilon \left( (t-t_0)\varphi'(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0) \right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ , on peut écrire  $h\varepsilon(h) = \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0)$ . Il vient finalement que :

$$f \circ \varphi(x) = f(\varphi(t_0)) + (t-t_0)\varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0)) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}(t-t_0)$$

ce qui prouve que  $f \circ \varphi$  est dérivable en  $t_0$  et que  $(f \circ \varphi)' = \varphi' f' \circ \varphi$ .

**Remarque 11.4** Le point 2. du théorème précédent se généralise à une application multilinéaire  $B : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow G$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $E_i = \mathbb{R}^{m_i}$  et où  $G = \mathbb{R}^n$ . On introduit des applications  $f_i : I \rightarrow E_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Si chacune de ces applications est dérivable sur  $I$  alors  $B(f_1, \dots, f_p) : I \rightarrow G$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$  :

$$GBp f_1, \dots, f_p'(t) = \sum_{i=1}^p B(f_1(t), \dots, f_i'(t), \dots, f_p(t)).$$

En particulier, l'application déterminant

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto \det(C_1, \dots, C_n) \end{cases}$$

est multilinéaire et si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dérivable sur  $I$  alors il en est de même de  $t \mapsto \det(C_1(t), \dots, C_n(t))$ . De plus, pour tout  $t \in I$  :

$$\det(C_1, \dots, C_n)'(t) = \sum_{i=1}^n \det(C_1(t), \dots, C_i'(t), \dots, C_n(t)).$$

**COROLLAIRE 11.9** ♥ **Dérivation du produit scalaire et du déterminant en dimension 2**

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)$  et soit  $e$  une base de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $(f_1, f_2)$  les fonctions composantes de  $f$  dans la base  $e$  et  $(g_1, g_2)$  celles de  $g$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ . Alors  $(f|g)$  et  $\det(f, g)$  sont aussi dérivables sur  $I$ . De plus, pour tout  $x \in I$ ,

$$(f|g)'(x) = (f'(x)|g(x)) + (f(x)|g'(x)) = f_1'(x)g_1(x) + f_2'(x)g_2(x) + f_1(x)g_1'(x) + f_2(x)g_2'(x);$$

$$(\det(f, g))'(x) = \det(f'(x), g(x)) + \det(f(x), g'(x)) = f_1'(x)g_2(x) - f_2'(x)g_1(x) + f_1(x)g_2'(x) - f_2(x)g_1'(x).$$

**Démonstration** Comme le produit scalaire et le déterminant de  $\mathbb{R}^2$  sont des formes bilinéaires, ces résultats sont une conséquence directe du théorème précédent.

**PROPOSITION 11.10** ♥ **Dérivation d'un produit vectoriel, d'un produit scalaire en dimension 2 ou 3** **Hors programme en PC**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications définies sur  $I$ , dérivables en  $t_0 \in I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors les applications

$$\langle f|g \rangle : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle f(t)|g(t) \rangle \end{cases} \quad \text{et} \quad f \wedge g : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t) \wedge g(t) \end{cases}$$

sont dérivables en  $t_0$  et

$$\langle f|g \rangle'(t_0) = \langle f'(t_0)|g(t_0) \rangle + \langle f(t_0)|g'(t_0) \rangle$$

$$((f \wedge g))'(t_0) = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0)$$

**Démonstration** Notons  $f = (f_1, f_2)$  et  $g = (g_1, g_2)$ . Comme  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $t_0$ , d'après le théorème ??, il en est de même des fonctions  $f_1, f_2, g_1, g_2$ . Soit  $t \in I$ . Remarquons que

$$\langle f|g \rangle(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t)$$

et la fonction  $\langle f|g \rangle$  est donc dérivable en  $t_0$  par opérations sur les fonctions dérivables en  $t_0$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus :

$$\begin{aligned} (\langle f|g \rangle)'(t_0) &= (f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2)'(t_0) \\ &= f_1'(t_0)g_1(t_0) + f_1(t_0)g_1'(t_0) + f_2'(t_0)g_2(t_0) + f_2(t_0)g_2'(t_0) \\ &= \langle \vec{f}'(t_0)|\vec{g}(t_0) \rangle + \langle \vec{f}(t_0)|\vec{g}'(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

La deuxième formule se prouve de même.

**PROPOSITION 11.11** ♡ **Dérivation de la norme**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application dérivable sur  $I$  qui ne s'annule pas sur  $I$  et soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'application

$$h : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \|f(t)\| \end{cases}$$

est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ , on a :

$$h'(t) = \frac{\langle f'(t)|f(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

**Démonstration** Pour tout  $t \in I$ ,  $h(t) = \sqrt{\langle f(t)|f(t) \rangle}$ . Comme  $f$  est dérivable sur  $I$ ,  $t \mapsto \langle f(t)|f(t) \rangle$  est dérivable sur  $I$  et comme  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , cette application est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Mais la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est justement dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc par composition,  $h$  est dérivable sur  $I$ . De plus, pour tout  $t \in I$ , on a :

$$h'(t) = \frac{\langle f'(t)|f(t) \rangle + \langle f(t)|f'(t) \rangle}{2\sqrt{\langle f(t)|f(t) \rangle}} = \frac{\langle f'(t)|f(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

**11.1.3 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$**

On définit par récurrence la dérivée  $k^{\text{ème}}$ , quand elle existe, d'une fonction  $f : I \rightarrow E$  par :

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(1)} = f' \\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \end{cases}.$$

**DÉFINITION 11.8** **Fonction vectorielle de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$**

Une fonction  $f : I \rightarrow E$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si :

1.  $f$  est dérivable  $k$  fois sur  $I$ .
2. la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $f$  est continue sur  $I$ .

On note  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

La fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

**PROPOSITION 11.12**  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un sous-espace vectoriel

L'ensemble  $\mathcal{C}^k(I, E)$  des fonctions de classes  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ .

**Démonstration** Exercice.

**Remarque 11.5** Une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  est de façon équivalente de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 11.6** Si  $f : I \rightarrow E$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  alors le produit  $\lambda f$  définit une fonction de  $I$  dans  $E$ . En effet, pour tout  $x \in I$ ,  $(\lambda f)(x) = \lambda(x)f(x)$  est le produit du vecteur  $f(x)$  par le scalaire  $\lambda(x)$ .

**PROPOSITION 11.13 Dérivée du produit d'une fonction vectorielle par une fonction scalaire, formule de Leibniz**  
Soit  $f : I \rightarrow E$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

(H1)  $f$  et  $\lambda$  sont dérivables sur  $I$

alors  $\lambda f$  est dérivable sur  $I$

Plus généralement,

(H1) si  $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$  et que  $\lambda \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

alors  $\lambda f \in \mathcal{C}^n(I, E)$  et on a la formule de Leibniz :

$$(\lambda f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{(n-k)} f^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

**Démonstration** Vérification facile avec les fonctions composantes.

**Remarque 11.7** En prenant  $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^3)$ , les deux applications de la proposition 11.10 sont elles-aussi de classe  $\mathcal{C}^n$  et de plus

$$\langle f | g \rangle^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle f^{(k)}(t) | g^{(n-k)}(t) \rangle,$$

$$(f \wedge g)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) \wedge g^{(n-k)}(t).$$

## 11.1.4 Développements limités et formule de Taylor-Young **Hors programme**

**DÉFINITION 11.9**

On dit qu'une fonction  $f \in \mathcal{F}(I, E)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a \in I$  si c'est le cas de chacune de ses composantes.

**Remarque 11.8** On a les mêmes opérations sur les DLs qu'avec les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**THÉORÈME 11.14 Formule de Taylor-Young**

Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  admet un DL  $(a, n)$  donné par

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)}{n!} f^{(n)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

**Démonstration** On le vérifie pour chaque composante de  $f$ .

**Attention 11.1** Les quantités  $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$  sont des vecteurs de  $E$ . De plus  $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$  est une fonction vectorielle de  $I$  dans  $E$ .

## 11.1.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

On rappelle ici brièvement quelques propriétés fondamentales des fonctions dérivables définie sur  $I$  à valeurs réelles.

## 11.1.6 Extremum d'une fonction dérivable

**PROPOSITION 11.15 ♡ Condition nécessaire d'un extremum relatif**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $a$  un point de  $I$  tel que

- (H1) Le point  $a$  est *intérieur* à l'intervalle, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]a - \alpha, a + \alpha[ \subset I$ .
- (H2) Le point  $a$  est un extremum local de la fonction  $f$  sur  $I$ .
- (H3) La fonction  $f$  est dérivable au point  $a$ .

alors  $f'(a) = 0$ .

**Démonstration** Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f$  possède un maximum local en  $a$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $\forall x \in [a - \beta, a + \beta] \cap I, f(x) \leq f(a)$ . Posons  $r = \min(r_1, r_2)$ .

- Si  $a - r < x < a$ ,  $[f(x) - f(a)] / (x - a) \leq 0$ . Puisque  $[f(x) - f(a)] / (x - a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'_g(a)$ , par passage à la limite dans l'inégalité, on tire que  $f'_g(a) \leq 0$ .
- Si  $a < x < a + r$ ,  $[f(x) - f(a)] / (x - a) \geq 0$  et puisque  $[f(x) - f(a)] / (x - a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'_d(a)$ , par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient que  $f'_d(a) \geq 0$ .

Puisque  $f$  est dérivable en  $a$ , on obtient que  $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a) = 0$ .

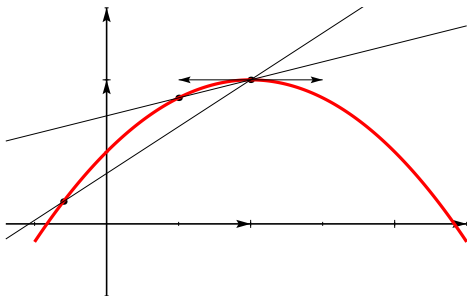


FIGURE 11.1 – Les pentes à gauche sont positives

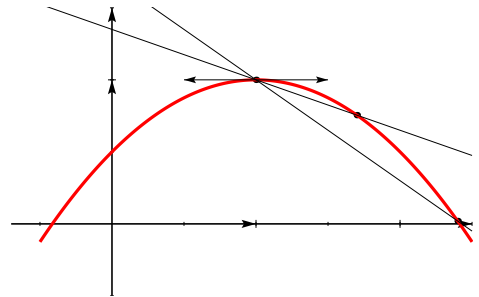


FIGURE 11.2 – Les pentes à droite sont négatives

**⚠ Attention 11.2**

- La condition  $f'(a) = 0$  n'est pas une condition suffisante d'extremum, (penser à  $f : x \mapsto x^3$  en  $x = 0$ .)
- La condition  $a$  est *intérieur* à l'intervalle est fondamentale dans ce théorème. Si le point  $a$  est une borne de l'intervalle, on ne peut obtenir qu'une inégalité sur la dérivée à gauche ou à droite au point  $a$ .

**Théorème de Rolle**

**THÉORÈME 11.16 ♡♡♡ Théorème de Rolle**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ ,
- (H3)  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Démonstration** Comme  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , l'image de ce segment, par application du théorème ?? est un segment  $[m, M]$  avec  $m \leq M$ .

- Si  $m = M$  alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$  et sa dérivée est nulle sur  $]a, b[$ .
- Sinon, alors  $m < M$ . Comme  $f(a) = f(b)$  l'un des deux est différent de  $m$  ou  $M$ . On peut supposer que  $f(a) \neq m$ . Le minimum de  $f$  sur  $[a, b]$  est donc atteint en un point  $c \in ]a, b[$  différent de  $a$  et de  $b$ , donc en un point intérieur de l'intervalle  $[a, b]$ . D'après la proposition précédente, on a  $f'(c) = 0$ .

**Interprétation graphique**

**Interprétation cinématique**

Un point mobile sur un axe qui revient à sa position de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.



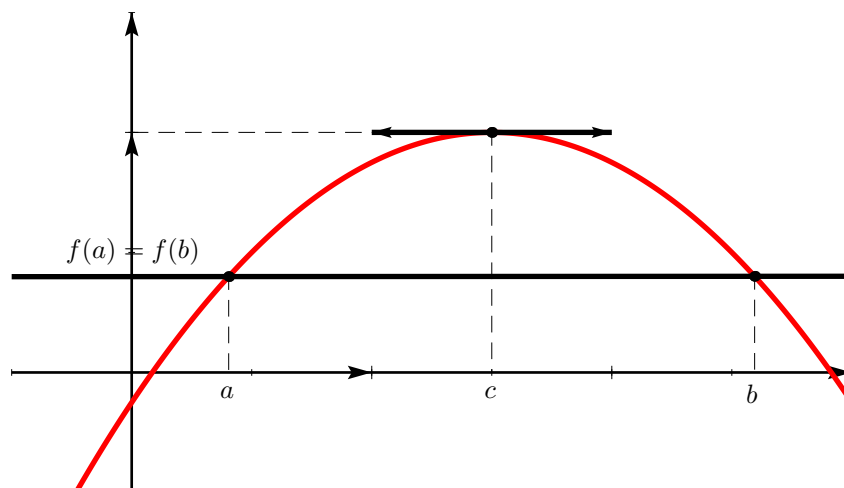


FIGURE 11.3 – Théorème de Rolle

### Égalité des accroissements finis

#### THÉORÈME 11.17 ♡♡♡ Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ .

Alors il existe un point intérieur  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

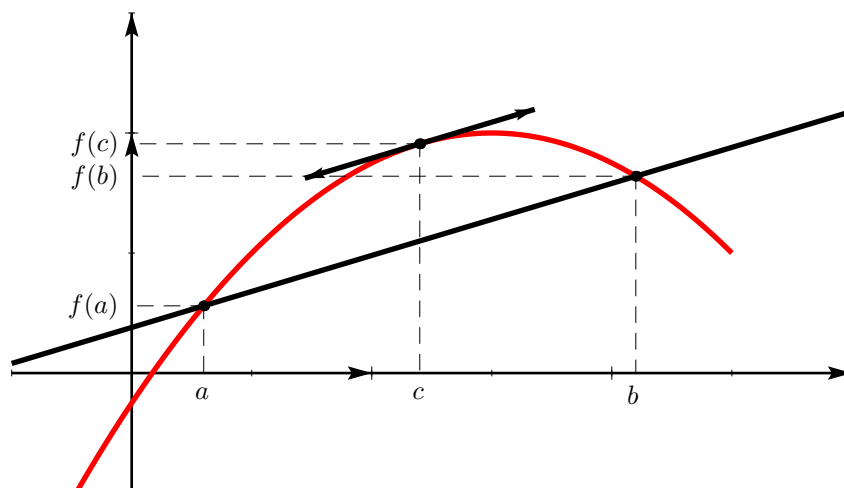


FIGURE 11.4 – Théorème des accroissements finis

Nous allons donner deux preuves typiques dont on s'inspire dans les exercices. L'idée consiste à appliquer le théorème de Rolle à une bonne fonction auxiliaire pour obtenir l'existence du réel  $c$  vérifiant la propriété qui nous intéresse. La première preuve consiste à voir sur un dessin un problème d'extremum.

**Démonstration** ♡ En examinant la figure ci-dessus, on voit que le point  $c$  correspond au maximum de l'écart vertical entre la corde  $[A, B]$  et le point  $(x, f(x))$ . Définissons donc la mesure algébrique de cet écart :

$$\varphi : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  est continue sur le segment  $[a, b]$  (théorèmes généraux), dérivable sur l'intervalle  $]a, b[$  (théorème généraux sur les dérivées) et on calcule  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe un point intérieur  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ .

La deuxième preuve est plus « taupinale » et peu naturelle, mais fournit une recette qui fonctionne bien dans les exercices lorsque la formule à démontrer est compliquée.

- Dans la formule à démontrer, regrouper tous les  $c$  à un endroit et les remplacer par une constante  $K$ .
- Remplacer l'une des bornes (par exemple  $b$ ) par une variable  $t$ , ce qui fournit une fonction auxiliaire  $\varphi$  définie sur  $[a, b]$ .
- Déterminer la constante  $K$  de telle sorte que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .
- Appliquer le théorème de Rolle à cette fonction auxiliaire.

**Démonstration** ♡ Appliquons cette « recette » à notre problème. La formule à montrer s'écrit  $f(b) - f(a) - f'(c)(b - a) = 0$ .

Définissons donc une fonction auxiliaire  $\varphi : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - f(a) - K(x - a) \end{cases}$  où  $K$  est une constante que nous choisissons de telle sorte que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . On trouve que  $K = [f(b) - f(a)] / (b - a)$  ce qui conduit à la fonction auxiliaire de la première preuve.

**Remarque 11.9** Cette méthode d'un usage très courant est employée dans les exercices ??, ??, ??, ??, ...

**Remarque 11.10** Quand un mobile se déplace sur un axe et part d'un point A au temps  $t_1$ , arrive en B au temps  $t_2$  et si  $f$  est la fonction position de ce mobile sur l'axe, alors il existe un instant  $t \in ]t_1, t_2[$  tel que la vitesse instantanée en  $t$  :  $f'(t)$  de ce mobile soit égale à sa vitesse moyenne  $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ .

### Inégalité des accroissements finis

**THÉORÈME 11.18 Inégalité des accroissement finis (IAF)**  
 Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ ,
- (H3) il existe deux réels  $(m, M) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ .

Alors on a

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

**Démonstration** Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $f$  sur le segment  $[a, b]$ . Il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . Puisque  $m \leq f'(x) \leq M$ , on en déduit que  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .

**THÉORÈME 11.19 Dérivée bornée implique lipschitzienne**  
 Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $\overset{\circ}{I}$ ,
- (H3) la fonction  $f$  est bornée sur l'intervalle ouvert  $\overset{\circ}{I} : \exists K \geq 0$ , tel que  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq K$ .

Alors la fonction  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur l'intervalle  $I$ .

**Démonstration** Soit  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Puisque  $[x, y] \subset I$ , la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[x, y]$  et dérivable sur l'intervalle ouvert  $]x, y[$ , d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . On en déduit que  $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq K|y - x|$ .

### Application : Variations d'une fonction

Le résultat suivant, utilisé depuis le lycée est une conséquence du théorème des accroissements finis.

**PROPOSITION 11.20 Caractérisation des fonctions constantes, monotones**  
 Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- (H1)  $f$  est dérivable sur  $I$ .

Alors on a les résultats suivants :

1.  $[\forall x \in I, f'(x) \geq 0] \iff f$  est croissante sur  $I$ .
2.  $[\forall x \in I, f'(x) > 0] \implies f$  est strictement croissante sur  $I$ .
3.  $[\forall x \in I, f'(x) \leq 0] \iff f$  est décroissante sur  $I$ .
4.  $[\forall x \in I, f'(x) < 0] \implies f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
5.  $[\forall x \in I, f'(x) = 0] \iff f$  est constante sur  $I$ .

**Démonstration** Démontrons la première équivalence. Les trois suivantes se démontrent de même.

$\Rightarrow$  Supposons que :  $\forall x \in ]a, b[ \subset I, f'(x) \geq 0$  et montrons que  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ . Soient  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tels que  $x_1 < x_2$ .  $f$  est continue sur  $[x_1, x_2]$  et dérivable sur  $]x_1, x_2[$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tel que  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$  et donc  $f(x_2) \geq f(x_1)$  ce qui prouve que  $f$  est croissante.

$\Leftarrow$  Réciproquement, supposons que  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ . Alors, pour tout  $x_0 \in ]a, b[$  le taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$ ,  $\Delta_{x_0, f}$  est une fonction positive sur  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ . Puisque la fonction  $f$  est dérivable au point  $x_0$ ,  $\Delta_{x_0, f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$ .

Par passage à la limite dans l'inégalité, on en tire que  $f'(x_0) \geq 0$ .

La dernière équivalence est conséquence du fait qu'une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.

**Remarque 11.11** La réciproque de (2) est fautive : la fonction  $x \mapsto x^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , dérivable et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

### Application aux suites définies par récurrence : majoration de l'erreur

#### DÉFINITION 11.10 Fonction $k$ -Lipschitzienne

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $k$ -Lipschitzienne sur  $I$  si :

$$\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$$

#### Exercice 11.1.1

Prouver que si  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

#### DÉFINITION 11.11 Fonction contractante

Une fonction  $k$ -Lipschitzienne est dite *contractante de rapport  $k$*  si  $k \in ]0, 1[$ .

Le théorème qui vient ainsi que sa démonstration sont à connaître parfaitement. Il s'agit d'un grand classique des sujets de concours.

#### THÉORÈME 11.21 Théorème du point fixe

Soit  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1)  $I = [a, b]$  est stable pour  $f$ .
- (H2)  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- (H3)  $\exists k \in ]0, 1[, \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k$

alors :

1.  $f$  est contractante de rapport  $k$  sur  $[a, b]$ .
2. L'équation  $f(x) = x$  admet une et une seule solution dans  $[a, b]$ . Soit  $l$  cette solution (autrement dit  $f$  possède un unique point fixe dans  $[a, b]$ ).
3. La suite  $(u_n)$  donnée par 
$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
 converge vers  $l$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$$

**Démonstration**

- Soient  $x, x' \in [a, b]$ . Comme  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , par application de l'inégalité des accroissements finis, on a :  $|f(x) - f(x')| \leq \sup_{c \in [a, b]} |f'(c)| |x - x'| \leq k |x - x'|$  ce qui prouve que  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne.
- Soit  $\theta : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) - x \end{cases}$ . Comme  $I = [a, b]$  est stable pour  $f$ , on a :  $f(a) \geq a$ , c'est à dire  $\theta(a) \geq 0$  et  $f(b) \leq b$ , c'est à dire  $\theta(b) \leq 0$ .  $f$  étant dérivable sur  $[a, b]$ , elle est continue sur  $[a, b]$  et il en est donc de même de  $\theta$ . Appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\theta(c) = 0$  c'est à dire tel que  $f(c) = c$ .  $f$  possède donc bien un point fixe dans  $[a, b]$ .
- Démontrons la dernière propriété par récurrence : L'inégalité est trivialement vérifiée au rang 0. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'inégalité est vraie au rang  $n$  et montrons là au rang  $n + 1$ . On a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| &= |f(u_n) - f(l)| \\ &\leq k |u_n - l| \text{ car } f \text{ est } k\text{-Lipschitzienne sur } [a, b] \\ &\leq k \times k^n |u_0 - l| \text{ par application de l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq k^{n+1} |u_0 - l| \end{aligned}$$

La propriété est alors prouvée par application du théorème de récurrence. Comme  $0 \leq k < 1$ ,  $(k^n)$  est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1 et elle converge donc vers 0. Appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ .

**Condition suffisante de dérivabilité en un point**

**THÉORÈME 11.22 ♡♡♡ Théorème du prolongement dérivable**

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et un réel  $a \in I$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ ,
- (H3)  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \mathbb{R}$ .

Alors la fonction  $f$  est dérivable au point  $a$  et  $f'(a) = l$ .

**Démonstration** Soit  $x \in I \setminus \{a\}$ . La formule des accroissements finis appliquée au segment  $[a, x]$  nous assure de l'existence de  $c_x \in ]a, x[$  tel que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ . Comme  $c_x \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{}$ , on en déduit que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{}$   $l$  et donc que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et que  $f'_d(a) = l$ . On fait de même à gauche de  $a$ .

**PROPOSITION 11.23**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On suppose que

- (H1) la fonction  $f$  est continue sur  $I$ ,
- (H2) la fonction  $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ ,
- (H3)  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} +\infty$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ . En d'autres termes, la courbe représentative de  $f$  possède une tangente verticale au point  $a$ .

**Démonstration** Laissée au lecteur en s'inspirant par exemple de la preuve de la proposition précédente.

**Remarque 11.12** La réciproque du théorème de prolongement dérivable est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$  car

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$$

La fonction  $f$  est dérivable en tout point  $x \neq 0$  avec  $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  et  $f'$  n'admet pas de limite lorsque  $x \rightarrow 0$ . En effet, la suite  $(f'(1/(n\pi)))_{n \geq 1}$  admet deux sous-suites, une convergant vers 1 et l'autre vers  $-1$ .

## 11.1.7 Formules de Taylor

### Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . Partons du théorème fondamental deuxième forme pour écrire pour  $x \in I$ ,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , on peut effectuer une intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = f'(t) & u'(x) = f''(t) \\ v'(x) = 1 & v(x) = t \end{cases} \quad u, v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1$$

$$f(x) = f(a) + \left[ t f'(t) \right]_a^x - \int_a^x t f''(t) dt = f(a) + x f'(x) - a f'(a) - \int_a^x t f''(t) dt$$

On se rend compte qu'il est plus intéressant de considérer la primitive de 1 qui s'annule en  $x$  de telle façon à ne faire intervenir que les valeurs de  $f$  en  $a$  :

$$\begin{cases} u(x) = f'(t) & u'(x) = f''(t) \\ v'(x) = 1 & v(x) = -(x-t) \end{cases} \quad u, v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1$$

$$f(x) = f(a) + \left[ -(x-t) f'(t) \right]_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) dt = f(a) + (x-a) f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt$$

Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , on peut effectuer  $n$  intégrations par parties successives pour trouver la formule suivante.

#### THÉORÈME 11.24 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(a, x) \in I^2$ . Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

— Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé *polynôme de Taylor de  $f$  de degré  $n$* .

— La fonction définie sur  $I$  par

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

est appelée *reste intégral*.

**Démonstration** C'est une simple récurrence. Pour  $n=0$ , la formule est le théorème fondamental deuxième forme et pour passer de  $n$  à  $n+1$ , il suffit d'effectuer une intégration par partie de  $R_{n-1}(x)$  en primitivant  $(x-t)^n/n!$  en  $-(x-t)^{n+1}/(n+1)!$ .

**Remarque 11.13** Lorsque nous demandons à nos étudiants l'idée de la démonstration de la formule de Taylor intégrale, toute la classe s'exclame : « par récurrence » ! Une récurrence n'est pas une idée de démonstration, simplement une technique de rédaction. Ici, les idées sont :

1. Le théorème fondamental deuxième forme.
2. Intégrer par parties en primitivant 1 pour que les primitives successives s'annulent en  $x$ .

Les examinateurs de concours se plaignent chaque année des candidats qui sont incapables de retrouver cette formule sans se tromper. En cas de doute, faites le calcul de l'introduction en intégrant par parties le théorème fondamental,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \int_a^x (x-a) f''(t) dt$$

et à partir de là vous retrouvez sans problème la forme générale.

### Exemple 11.3

— Formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t) dt$$

— Formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle à l'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t) dt$$

**Remarque 11.14** Effectuant le changement de variable  $t = a + (x-a)u$ , on peut exprimer le reste intégral de la façon suivante

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \int_0^1 (x-a)^{n+1} \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(x-a)u) du \\ &= (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(x-a)u) du \end{aligned}$$

## Inégalité de Taylor-Lagrange

### THÉORÈME 11.25 ♡♡♡ Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $a \in I$ . Si  $x \in I$ , on peut, d'après le théorème précédent 11.24, écrire  $f(x)$  sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= T_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

On a alors

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

où  $M_{n+1}$  est un majorant de  $|f^{(n+1)}|$  sur  $[a, x]$  (qui existe car  $f^{(n+1)}$  est continue sur le segment  $[a, x]$ )

**Démonstration** Par application de la formule de Taylor avec reste intégral 11.24, on a, pour tout  $a, x \in I$ , si  $a \leq x$ ,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)| \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \\ &\leq M_{n+1} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &\leq M_{n+1} \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x \\ &\leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

La démonstration est similaire lorsque  $x \leq a$  (ne pas oublier d'inverser les bornes).

BIO 1 **Brook Taylor**, né le 18 août 1685 à Edmonton en Angleterre et mort le 29 décembre 1731 à Londres

Mathématicien Anglais. Brook Taylor est issu d'une famille aisée. Il reçoit sa première éducation de précepteurs puis intègre l'université de Cambridge dont il ressort diplômé en 1709 après des études en mathématiques. C'est à John Machin, dont il fut l'élève, qu'il doit son entrée en 1712 à la Royal Society. Son premier travail concernait l'étude de la deuxième loi de Kepler sur le mouvement des planètes. Il devient secrétaire de la Royal Society en 1714 et participe au comité chargé de départager Newton et Leibniz à propos de la paternité de l'invention du calcul infinitésimal. On mesurera l'impartialité de ce comité à l'admiration que Taylor portait à Newton ... Il publia deux livres de mathématiques la même année 1715 "*Methodus incrementorum directa and reversa*" et "*Linear Perspective*". On trouve dans le premier la formule qui porte son nom mais sans mention du reste et sans que ne soit abordé les problèmes de convergence. Bien que Taylor ait découvert cette formule de manière indépendante, d'autres mathématiciens l'avaient mise en évidence auparavant comme Grégory, Newton, Leibniz et Johann Bernouilli. L'importance de cette formule ne fut perçue que bien plus tard, en 1772 par Lagrange qui la promulgua comme principe de base du calcul différentiel. Dans ce même livre, Taylor découvre la formule d'intégration par parties et invente le calcul aux différences finies. La vie de Taylor ne fut pas heureuse. Son premier mariage, désapprouvé par son père, se termine par la mort de son épouse lors de sa grossesse et de l'enfant qu'elle portait. Son second mariage se termine de manière identique si ce n'est que le bébé survivra. Taylor, très ébranlé, ne survécut que deux ans à sa seconde femme. Ces différents problèmes, ajoutés à l'aridité de ces textes mathématiques, ont fait que le génie de Taylor n'a pas été perçu à sa juste valeur par ses contemporains.



### Formule de Taylor-Young

#### THÉORÈME 11.26 ♥♥♥ Formule de Taylor-Young

Soient  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Autrement dit,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

**Démonstration** Supposons dans un premier temps que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ . Considérons un segment inclus dans l'intervalle  $I$  contenant le point  $a$ ,  $a \in [\alpha, \beta]$ . La fonction  $f^{(n+1)}$  étant continue sur ce segment, elle est bornée. Notons  $M = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)|$ . D'après la formule de Taylor-Lagrange, on majore alors

$$|R_n(x)| \leq |x-a|^n \underbrace{\frac{M|x-a|}{(n+1)!}}_{\varepsilon(x)}$$

et on a bien  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Dans le cas où la fonction  $f$  est uniquement de classe  $\mathcal{C}^n$ , la démonstration est plus technique. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n-1$  :

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \text{ où } R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

Lorsque  $x$  est proche de  $a$ , pour  $t \in [a, x]$ ,  $f(t)$  est proche de  $f(a)$ . Mettons en évidence cette approximation :

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(a) dt + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f(t) - f(a)] dt = \frac{(x-a)^n}{n!} f(a) + \theta(x)$$

Il ne reste qu'à vérifier que  $\theta(x) = o((x-a)^n)$  au voisinage du point  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f^{(n)}$  est continue au point  $a$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $t \in I$ ,  $|t-a| \leq \eta \implies |f(t) - f(a)| \leq \varepsilon$ . Soit  $x \in I$  tel que  $|x-a| \leq \eta$ . Puisque  $\forall t \in [a, x]$ ,  $|t-a| \leq \eta$ , on majore l'intégrale (prenons  $x > a$  pour simplifier)

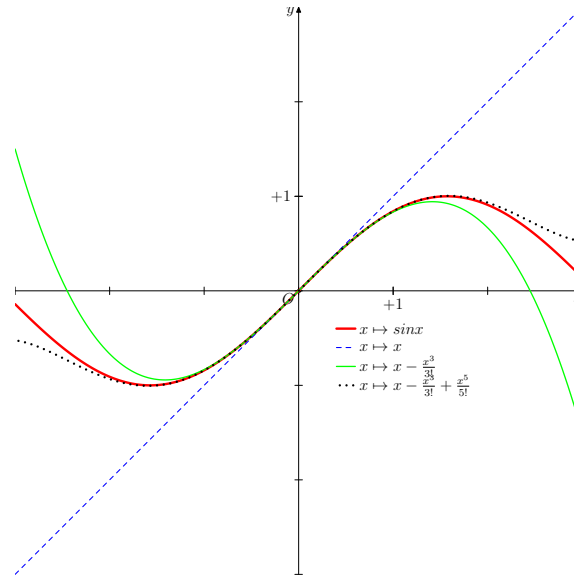
$$|\theta(x)| \leq \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f(t) - f(a)| dt \leq \varepsilon \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \varepsilon \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Nous avons donc montré que  $|\theta(x)/(x-a)^n| \leq \varepsilon$  et donc que  $\theta(x)/(x-a)^n \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

**Exemple 11.4** Cette formule, appliquée à l'ordre 5 en 0 pour la fonction sin permet d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

On approxime ainsi, dans un voisinage de 0 la fonction sin par un polynôme de degré 5. Plus l'ordre utilisé est élevé, meilleure est l'approximation obtenue. On s'en convaincra en étudiant les graphes ci dessous.



Multimédia : Tracé de sin, des polynômes de Taylor  $T_n$  en fonction de  $n$  et voir que l'approximation est locale en 0.

### Utilisation des trois formules de Taylor

Il est important dans les exercices de savoir choisir son outil. Quand utiliser une formule de Taylor-Young ? Une inégalité de Taylor-Lagrange ?

- La formule de Taylor-Young fournit une approximation *locale* d'une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $a$  par un polynôme  $T_n$ , le polynôme de Taylor.
- L'inégalité de Taylor-Lagrange fournit une majoration *globale* du reste  $R_n$  de cette approximation sur un segment  $[a, x]$ , même lorsque  $x$  est éloigné de  $a$ .
- La formule de Taylor-intégrale est la plus précise et donne explicitement le reste  $R_n$  sous forme d'une intégrale. Les deux autres formules en sont une conséquence. En première année, on ne l'utilise pas beaucoup, mais elle est importante en deuxième année.

**Exemple 11.5** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x) - \sin(x)}{x^3}$ . Les équivalents usuels ne suffisent pas ici puisque  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\text{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et on ne peut pas sommer ces équivalents. Nous avons besoin du comportement *local* des fonctions sh et sin au voisinage du point 0. Utilisons la formule de Taylor-Young à l'ordre 3. Les dérivées successives de ces fonctions en zéro sont simples à calculer et on obtient

$$\text{sh}(x) = x + x^3/3! + o(x^3) \quad \sin(x) = x - x^3/3! + o(x^3)$$

Ces formules sont des *égalités* et on peut les sommer pour trouver que

$$\text{sh}(x) - \sin(x) = x^3/3 + o(x^3)$$

d'où  $[\text{sh}(x) - \sin(x)]/x^3 = 1/3 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1/3$ .

**Exemple 11.6** Soit une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+h)f(x-h) = (f(x))^2$$

Montrons qu'alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)f(x) = (f'(x))^2$ .



Écrivons la formule de Taylor-Young pour la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x + \theta$ .

$$f(x + \theta) = f(x) + \theta f'(x) + \frac{\theta^2}{2} f''(x) + \theta^2 \varepsilon(\theta) \quad (\varepsilon(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0)$$

Si  $h \neq 0$ , en prenant  $\theta = h$  et  $\theta = -h$ , on trouve que

$$f(x)^2 = f(x+h)f(x-h) = \left[ f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + h^2 \varepsilon(h) \right] \left[ f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + h^2 \varepsilon(-h) \right]$$

En développant et en ordonnant par rapport aux puissances de  $h$ , on trouve que

$$0 = h^2 \left[ -(f')^2(x) + f(x)f''(x) \right] + h^2 \varphi(h)$$

avec  $\varphi(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . En divisant par  $h^2$  et en faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient le résultat. L'idée était d'utiliser la relation de l'énoncé en faisant tendre  $h$  vers 0, d'où l'utilisation de la formule de Taylor-Young.

*Exemple 11.7* Étudier la limite en 0 de la fonction définie par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Il nous faut une approximation de la fonction définie par  $f(t) = \cos t$  au voisinage de zéro. Utilisons une formule de Taylor à l'ordre 2.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + R_2(t)$$

On en tire que  $(1 - \cos t)/t^2 = 1/2 - R_2(t)/t$ . Puisque  $R_2(t) = \cos t - 1 + t^2/2$ , la fonction  $R_2$  est continue sur  $[x, 2x]$  et on peut intégrer :

$$F(x) = \underbrace{\frac{1}{2x} \int_x^{2x} dt}_{=1/2} - \underbrace{\frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{R_2(t)}{t} dt}_{\theta(x)}$$

Il nous faut traiter le reste  $\theta(x)$  de notre approximation. Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, on sait que

$$|R_2(t)| \leq \frac{t^3}{3!} \sup_{u \in [0, t]} |f^{(3)}(u)| \leq \frac{t^3}{6}$$

(puisque  $|f^{(3)}(t)| = |\cos t| \leq 1$ ). Alors,

$$|\theta(x)| \leq \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{|R_2(t)|}{t^2} dt \leq \frac{1}{6x} \int_x^{2x} t dt = \frac{x}{4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Par conséquent,  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1/2$ .

*Exemple 11.8* Trouvons deux réels  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$u_n = \int_0^1 (1+x^2)^{1/n} dx = a + \frac{b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Écrivons pour  $x \in [0, 1]$ ,  $(1+x^2)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(1+x^2)}$ . Lorsque  $n$  devient grand, le terme dans l'exponentielle tend vers 0 à  $x$  fixé. On pourrait utiliser une formule de Taylor-Young pour l'exponentielle, mais le reste s'écrirait à l'aide d'une fonction  $\varepsilon$  qui dépendrait à la fois de  $x$  et de  $n$  sur laquelle nous n'avons pas d'information suffisante pour l'intégrer. Utilisons plutôt l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle à l'ordre 1 entre 0 et  $X$  :

$$e^X = 1 + X + R_1(X) \text{ avec } |R_1(X)| \leq \frac{X^2}{2} \sup_{t \in [0, X]} e^t \leq \frac{X^2}{2} e^X$$

On en tire que

$$u_n = \underbrace{\int_0^1 dx}_{a=1} + \underbrace{\frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx}_b + \underbrace{\int_0^1 R_1\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^2)\right) dx}_{\theta_n}$$

On calcule  $b$  par parties

$$b = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{4}}$$

et il nous reste à majorer grossièrement le reste.

$$|\theta_n| \leq \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x^2)}{2} e^{\ln(1+x^2)/n} dx \leq \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln^2 2}{2} e^{\ln(2)} \leq \frac{C}{n^2}$$

**Exemple 11.9** Soit une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe deux constantes  $C, k > 0$  telles que

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0,$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq Ck^n n!$

Montrons que  $f$  est la fonction nulle.

— Nous pouvons écrire une formule de Taylor à tout ordre  $n : f(x) = R_n(x)$ . Notre hypothèse permet de majorer  $|f^{(n+1)}|$ , utilisons donc l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq C|xk|^{n+1}$$

- Si  $x \in ]-1/k, 1/k[$ , en notant  $K = |xk|$ ,  $|K| < 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \leq CK^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $f$  est nulle sur l'intervalle  $] -1/k, 1/k[$ .
- Considérons la fonction translatée, définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x - 1/k)$ . Puisque  $f$  ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en  $1/k$ , pour tout  $n$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$  et comme  $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x - 1/k)$ , la fonction  $g$  vérifie les mêmes hypothèses que  $f$ . Elle est nulle sur  $] -1/k, 1/k[$  ce qui montre que  $f$  est nulle sur  $] -1/k, 2/k[$ . On recommence avec d'autres translattées pour prouver que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  en entier.

### 11.1.8 Méthode des rectangles, Sommes de Riemann

#### THÉORÈME 11.27 Méthode des rectangles

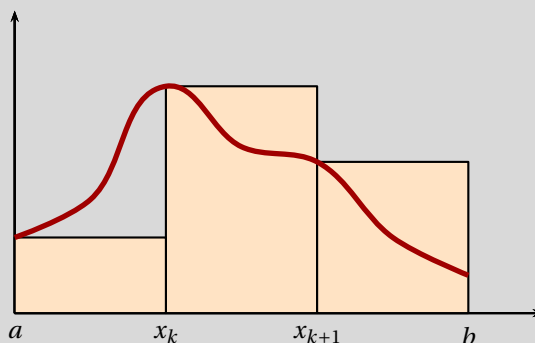
Soit une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$ . On effectue une subdivision du segment  $[a, b]$  de pas constant  $h = (b - a)/n$ . On pose pour un entier  $k \in [0, n]$ ,  $x_k = a + k \frac{b-a}{n} = a + kh$ . Posons pour un entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

On obtient une majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale  $I$  de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  par  $R_n$  :

$$|I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$$

où  $M_1 = \|f'\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f'(t)|$  (la fonction  $f'$  étant continue sur un segment, elle est bornée).



**Démonstration** Commençons par estimer l'erreur sur un petit segment  $[x_k, x_{k+1}]$  :

$$\varepsilon_{n,k} = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)] dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt$$

Puisque la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut utiliser le théorème fondamental deuxième forme. Pour  $t \in [x_k, x_{k+1}]$ ,

$$|f(t) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^t f'(t) dt \right| \leq \int_{x_k}^t |f'(t)| dt \leq M_1(t - x_k)$$

En intégrant cette inégalité, on trouve que

$$|\epsilon_{n,k}| \leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = M_1 \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

On en déduit une majoration de l'erreur globale en sommant ces erreurs  $\epsilon_{n,k}$

$$|I - R_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)] dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k \leq \frac{(b-a)^2}{2n}$$

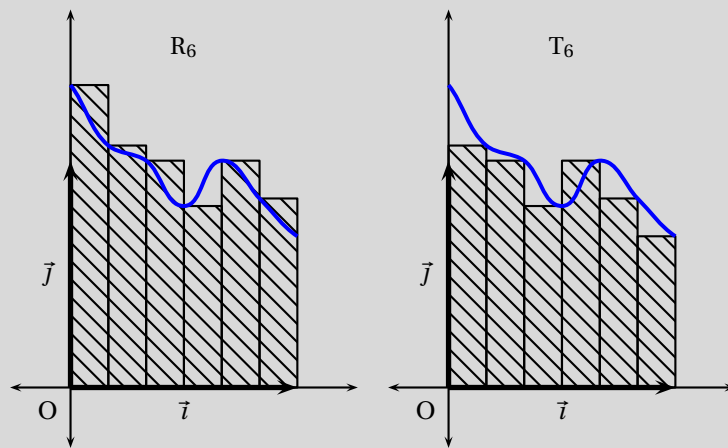
Dans le cas du segment  $[0, 1]$ , on obtient le résultat suivant, intéressant pour étudier certaines suites.

**THÉORÈME 11.28** ♥♥♥ **Convergence d'une somme de Riemann**

Soit une fonction  $f$  continue sur le segment  $[0, 1]$ . On définit les suites de termes généraux

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx \text{ et } T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$



**Démonstration**

- Si la fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le théorème précédent donne le résultat.
- Supposons que la fonction  $f$  est uniquement continue. On remarque que  $R_n$  représente l'intégrale de la fonction en escalier  $\varphi_n$  définie par  $\forall x \in [k/n, (k+1)/n[$ ,  $\varphi_n(x) = f(k/n)$  et  $\varphi_n(1) = f(1)$ . Le terme  $T_n$  représente l'intégrale d'une autre fonction en escalier  $\psi_n$  définie par  $\psi_n(x) = f((k+1)/n)$  lorsque  $x \in [k/n, (k+1)/n[$  et  $\psi_n(1) = f(1)$ .
- Montrons que  $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle est uniformément continue (théorème de Heine). Il existe donc  $\eta > 0$  tel que  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ . Posons  $N = E(1/\eta) + 1$ . Alors pour  $n \geq N$ , si  $x \in [0, 1]$ , il existe  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $k/n \leq x < (k+1)/n$  et alors  $|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(k/n)| \leq \epsilon$  puisque  $|x - k/n| \leq 1/n \leq \eta$ . De même, on montre que  $\|f - \psi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Alors,  $|I - R_n| = \left| \int_0^1 [f(t) - \varphi_n(t)] dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - \varphi_n(t)| dt \leq \|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . La même majoration montre que  $|I - T_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Remarque 11.15** Plus généralement, si  $f$  est une fonction continue sur le segment  $[a, b]$ , et si

$$u_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

où les points  $\xi_k$  sont dans l'intervalle  $[a + kh, a + (k+1)h]$ , avec  $h = \frac{b-a}{n}$ , on a

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

On se sert en pratique uniquement des sommes de Riemann du théorème précédent pour une fonction  $f$  continue sur le segment  $[0, 1]$  pour étudier la limite de certaines suites.

PLAN 11.1 : Pour étudier la limite d'une suite  $(u_n)$  faisant intervenir une somme et le groupement  $k/n$

Essayer d'écrire  $u_n$  sous la forme  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$  et utiliser les sommes de Riemann.

**Exemple 11.10** Considérons la suite de terme général  $u_n = \sum_{p=0}^{n-1} p - 1 \frac{\sqrt{n^2 + p^2}}{n^2}$ . On peut faire apparaître le groupement  $p/n$  dans  $u_n$  en factorisant par  $n^2$  dans la racine :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sqrt{1 + (p/n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(p/n)$$

où la fonction  $f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{1 + x^2} \end{cases}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . D'après le théorème précédent,

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ . Le plus rapide pour calculer cette intégrale consiste à intégrer par parties.

$$I = \left[ x\sqrt{1 + x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{2} - I + \left[ \operatorname{argsh}(x) \right]_0^1$$

d'où l'on tire  $I = \sqrt{2}/2 + \ln(\sqrt{2} + 1)/2$ .

**Exemple 11.11** Considérons la suite de terme général  $u_n = \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{2p+1}$ . Avec le changement d'indice  $k = p - n$ ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k/n) + 1/(2n)}$$

On n'obtient pas exactement une somme de Riemann, mais cela y ressemble fort ! Lorsque  $n$  est grand, on se dit que le terme  $1/(2n)$  devient négligeable. Encadrons  $u_n$  par deux sommes de Riemann :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + p/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k+1)/n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + k/n} = \beta_n$$

Les deux suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont des sommes de Riemann qui convergent vers la même limite,  $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(2)$ .

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)/2$ .

## 11.2 Arcs paramétrés

Dans ce paragraphe,  $E$  est un evn de dimension finie, essentiellement  $E$  est le plan euclidien muni d'un repère orthormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ou l'espace euclidien muni d'un repère orthormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**DÉFINITION 11.12** ♡ **Arc paramétré**

On appelle *arc paramétré* un couple  $\gamma = (I, \vec{F})$  où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle et  $\vec{F} : I \rightarrow E$  une application de classe  $\mathcal{C}^k(I, E)$ . Le *support* de l'arc paramétré est la courbe  $\Gamma = \vec{F}(I) \subset E$ .

**Remarque 11.16**

— Á tout  $t \in I$ , on associe le point  $M \in E$  tel que  $\vec{OM} = \vec{F}(t)$ .

— Si  $E = \mathbb{R}^2$ , on écrira  $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  et les coordonnées de  $M$  seront donc  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

— Si  $E = \mathbb{R}^3$ , on écrira  $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  et les coordonnées de  $M$  seront donc  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

— L'ensemble des points  $M$  tel que  $\vec{OM} = \vec{F}(t)$  est appelé le support de l'arc paramétré.

**Remarque 11.17** L'étude d'un arc paramétré peut s'interpréter ainsi :

—  $I$  est un intervalle de temps.

- $M(t)$  est un point mobile du plan dont la position à l'instant  $t \in I$  est donné par  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t)$ .
- Le support de l'arc paramétré  $(I, \vec{F})$  est appelé *trajectoire du mouvement*.
- Les vecteurs  $\vec{F}'(t)$  et  $\vec{F}''(t)$ , si ils existent, sont respectivement appelés *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* du point  $M$  à l'instant  $t$ .

**DÉFINITION 11.13** ♡♡ **Limite d'une famille de droites**

On dit qu'une famille de droites  $(D_t)_{t \in I \setminus \{t_0\}}$  passant par un même point  $M$  admet une limite lorsque  $t \rightarrow t_0$  s'il existe une famille  $(u(t))_{t \in I \setminus \{t_0\}}$  de vecteurs directeurs de ces droites possédant une limite  $l$  non-nulle lorsque  $t \rightarrow t_0$ . La droite  $D = M + \text{Vect}(l)$  s'appelle la limite de  $(D_t)$ .

**DÉFINITION 11.14** ♡ **Tangente à un arc paramétré**

Soit un arc paramétré  $\gamma = (I, \vec{F})$  et  $t_0 \in I$ . On dit que l'arc admet une tangente au point  $M_0 = M(t_0) \in \Gamma$  si la famille de droites  $D_t = (M(t_0), M(t))$  admet une limite lorsque  $t \rightarrow t_0$ . La droite limite s'appelle la tangente à l'arc au point  $M_0$ .

*Remarque 11.18* On définit de la même façon la notion de demi-tangente en un point. La notion de tangente en un point ne dépend pas du paramétrage admissible, c'est une notion géométrique.

**DÉFINITION 11.15** ♡ **Point régulier, stationnaire**

Un point  $M = M(t_0)$  d'un arc paramétré est dit *régulier* lorsque  $\vec{F}'(t_0) \neq 0$ . Sinon, on dit que c'est un point *stationnaire*.

**PROPOSITION 11.29** ♡ **Tangente en un point régulier**

Un arc paramétré possède une tangente en un point régulier  $M(t_0)$ , la droite passant par  $M(t_0)$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(t_0)$ .

*Démonstration* Notons

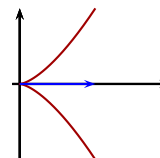
$$\vec{u} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto \frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0} \end{cases}$$

Pour  $t \neq t_0$ , le vecteur  $\vec{u}(t)$  dirige la droite  $(M(t_0), M(t))$  et  $\vec{u}(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ .

*Remarque*

11.19

Il se peut que  $\vec{F}'(t_0) = 0$  et que la courbe admette en  $M(t_0)$  une tangente. Par exemple, si on considère le support de  $\vec{F}(t) = (t^2, t^3)$  en  $t_0 = 0$ , alors il admet en  $t_0 = 0$  un vecteur tangent horizontal. Pourtant ce point est stationnaire. On donne maintenant une méthode pour calculer, quand c'est possible, le vecteur tangent à une courbe en un point stationnaire.



**PROPOSITION 11.30** ♡ **Tangente en un point stationnaire** **Hors programme**

Si  $M(t_0)$  est un point stationnaire d'un arc  $\mathcal{C}^k$  et s'il existe  $p \leq k$  tel que

$$\vec{F}'(t_0) = \dots = \vec{F}^{(p-1)}(t_0) = 0, \vec{F}^{(p)}(t_0) \neq 0$$

alors l'arc possède une tangente au point  $M(t_0)$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ .

*Démonstration* Pour  $t \in I \setminus \{t_0\}$ , notons

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{(t - t_0)^p}$$

Comme précédemment,  $\vec{u}(t)$  dirige la droite  $(M(t_0), M(t))$ . Mais d'après la formule de Taylor-Young pour les applications de  $I$  dans  $E$ , on a :

$$\vec{u}(t) = \frac{(t - t_0)^p \vec{F}^{(p)}(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{o}((t - t_0)^p)}{(t - t_0)^p} = \vec{F}^{(p)}(t_0) + \underset{t \rightarrow t_0}{\underset{o}{\frac{1}{(t - t_0)^p}}} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \vec{F}^{(p)}(t_0).$$

## 11.3 Étude d'une courbe paramétrée plane

### 11.3.1 Étude locale en un point stationnaire **Hors programme**

**THÉORÈME 11.31** ♥ **Étude locale pour une courbe plane**

On suppose que la fonction  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , et qu'il existe deux entiers  $1 \leq p < q \leq k$  tels que :

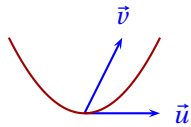
1.  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  est le premier vecteur non-nul parmi  $\vec{F}'(t_0), \dots, \vec{F}^{(p)}(t_0)$ .
2.  $q$  est le premier entier parmi  $p+1, \dots, q$  tel que le système de vecteurs  $(\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$  soit libre

Alors le vecteur  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  dirige la tangente à la courbe au point  $M(t_0)$ , et pour  $t \neq t_0$ , dans le repère  $\mathcal{R} =$

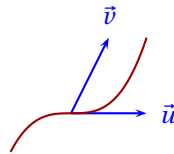
$$(M(t_0), \vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0)) \quad M(t) \begin{cases} X(t) \\ Y(t) \end{cases}$$

$$X(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} (t-t_0)^p, \quad Y(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} (t-t_0)^q$$

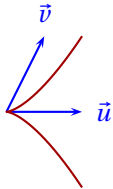
On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de  $t_0$ , en fonction de la parité des entiers  $p$  et  $q$ .



$p$  impair,  $q$  pair : point ordinaire



$p$  impair,  $q$  impair : point d'inflexion



$p$  pair,  $q$  impair : rebroussement de première espèce

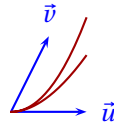


FIGURE 11.5 – Étude locale d'une courbe paramétrée

**Remarque 11.20**

- Si  $p = 1$ , le point  $M_0$  est régulier.
- Si  $p = 1$  et  $q = 2$ ,  $M_0$  est birégulier. La concavité de la courbe est alors dirigée par le vecteur  $\vec{v}$ .
- Si  $p$  est pair, on a toujours un point de rebroussement.
- Le déterminant  $\begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}$  est différent de 0 si et seulement si  $p = 1$  et  $q = 2$ . Le point est alors birégulier.
- Pour avoir un point d'inflexion ou de rebroussement, on doit donc avoir  $\begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} = 0$ . Mais cette condition n'est évidemment pas suffisante. Exemple :  $p = 1, q = 4$ , un tel point régulier est appelé un méplat.

**Exemple 11.12** Étudier les points singuliers des courbes suivantes :

$$1. \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - 1/t^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

1. La première admet un point stationnaire en  $t = -1$ . De plus

$$\begin{cases} x(t) = -1 + (t+1)^2 \\ y(t) = -3 - 2(t+1)^2 - 4(t+1)^3 + o_{t \rightarrow -1}((t+1)^3) \end{cases}$$

donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.

2. La seconde admet un point stationnaire en  $t = 1$ . On a

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 1/2(t-1)^2 + 1/2(t-1)^3 + o_{t \rightarrow 1}((t-1)^3) \\ y(t) = -1 + 2(t-1)^2 - 3(t-1)^3 + o_{t \rightarrow 1}((t-1)^3) \end{cases}$$

### 11.3.2 Branches infinies des courbes paramétrées **Hors programme**

On peut étudier l'existence de courbes asymptotes et préciser la position locale de la courbe par rapport à ces asymptotes. Pour cela, on utilise un développement asymptotique des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  par rapport à  $t$  lorsque  $t \rightarrow t_0$  avec un terme *significatif* qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  pour éliminer les termes tendant vers l'infini. Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$

alors on en déduit que la droite  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de  $c$  et de la parité de  $k$ .

*Exemple 11.13* Considérons la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2 - 9} \\ y(t) = \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \end{cases}$$

Elle présente des branches infinies lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $t \rightarrow \pm 3$ .

1.  $t \rightarrow -3$  :  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow -3]{} +\infty$  et  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -3]{} -5/2$  donc la droite d'équation  $y = -5/2$  est asymptote.

2.  $t \rightarrow \pm\infty$  : effectuons un développement asymptotique :

$$x(t) = t + \frac{9}{t} + o(1/t)$$

$$y(t) = t + 1 + \frac{3}{t} + o(1/t)$$

Pour éliminer le terme divergent, il suffit d'effectuer la combinaison linéaire :

$$y(t) - x(t) - 1 = \frac{-6}{t} + o(1/t)$$

On en déduit d'une part que la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote. D'autre part, la quantité  $y(t) - x(t) - 1$  représente la mesure algébrique verticale entre la droite et  $M(t)$ . Par conséquent, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , la courbe est située localement au dessous de l'asymptote et lorsque  $t \rightarrow -\infty$ , elle est située localement au dessus.

3.  $t \rightarrow 3$ ,

$$x(t) = \frac{9}{2(t-3)} + \frac{15}{4} + \frac{7}{8}(t-3) + o((t-3))$$

$$y(t) = \frac{3}{t-3} + 4 + (t-3)$$

Éliminons les termes divergents :

$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{3}{2} + \frac{5}{12}(t-3) + o((t-3))$$

On en déduit que la droite d'équation  $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$  est asymptote à la courbe. Lorsque  $t \rightarrow 3^-$ , la courbe est située localement en dessous de son asymptote. Lorsque  $t \rightarrow 3^+$ , elle est située localement au dessus.

Cette méthode du développement asymptotique permet également de détecter d'autres courbes asymptotes.

*Exemple 11.14*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sin t + 1}{t} \\ y(t) = \frac{\cos t}{t^2} \end{cases}$$

Étudions la branche infinie  $t \rightarrow 0$  en utilisant Maple :

```

MAPLE
> x := (sin(t)+1)/t;
> y := cos(t) / t^2;
> series(x, t = 0, 2);

          -1      2
         t  + 1 + O(t )

> series(y, t = 0, 2);

          -2      2
         t  - 1/2 + O(t )

```

Pour faire disparaître le terme en  $1/t^2$ , considérons  $y(t) - x(t)^2$  :

```

MAPLE
> series(y - x^2, t = 0, 2);

          -1      2
         - 2 t  - 3/2 + 1/3 t + O(t )

```

Pour faire ensuite disparaître le terme en  $1/t$ , réutilisons  $x(t)$  :

```

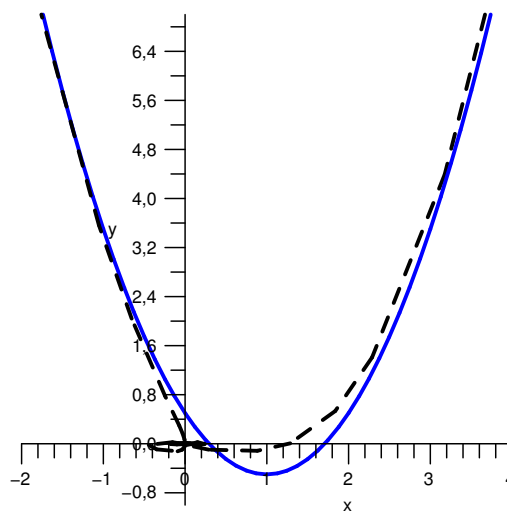
MAPLE
> series(y - x^2 + 2*x, t = 0, 2);

          2
         1/2 + 1/3 t + O(t )

```

Puisque

$$y(t) - x(t)^2 + 2x(t) - \frac{1}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{3},$$



on en déduit que la parabole d'équation  $y = x^2 - 2x + 1/2$  est asymptote à notre courbe. Lorsque  $t \rightarrow 0^+$ , la courbe est située localement au dessus de la parabole et lorsque  $t \rightarrow 0^-$ , elle est située localement en dessous.

FIGURE 11.6 – En trait pointillé le support de la courbe paramétrée, en trait plein le graphe de la parabole asymptote.

Sinon, plus simplement, on peut appliquer la méthode de première année :

PLAN 11.2 : Pour déterminer la droite asymptote à une branche infinie

• Une seule des deux applications coordonnées de  $f$  tend vers l'infini en valeur absolue quand  $t$  tend vers  $t_0$  :

- 1 Si  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} l \in \mathbb{R}$  et  $|y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$  alors la droite d'équation  $x = l$  est asymptote à la courbe et le signe de  $x(t) - l$  détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
- 2 Si  $|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$  et  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} l \in \mathbb{R}$  alors la droite d'équation  $y = l$  est asymptote à la courbe et le signe de  $y(t) - l$  détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.



- **Les deux applications coordonnées de  $f$  tendent vers l'infini en valeur absolue quand  $t$  tend vers  $t_0$  :**  
Si  $|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$  et  $|y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$ , on forme le quotient  $\frac{y(t)}{x(t)}$  et on cherche la limite de ce quotient quand  $t$  tend vers  $t_0$ .

- 1 Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}^*$  : on forme alors  $y(t) - ax(t)$  et si cette quantité tend vers une limite finie  $b$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe en  $t_0$ . La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de  $y(t) - ax(t) - b$ .

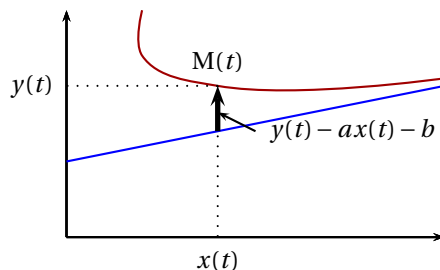


FIGURE 11.7 – Signe de  $y(t) - ax(t) - b$

- 2 Si  $\left| \frac{y(t)}{x(t)} \right| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$ , on dit que la courbe possède une branche parabolique (Oy).
- 3 Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ , on dit que la courbe possède une branche parabolique (Ox)

**Exemple 11.15** Étudions les branches infinies de la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2/t \\ y(t) = t + 1/t^2 \end{cases}$$

La courbe présente des branches infinies quand  $t \rightarrow \pm\infty$  et  $t \rightarrow 0^\pm$ .

**En  $+\infty$**  On a  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ . On forme  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc la courbe présente une branche parabolique de direction Ox. On fait la même étude en  $-\infty$ .

**En  $0^+$**  On forme à nouveau le quotient  $y(t)/x(t)$  :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{t^3 + 1}{t(t^2 + 2)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

et on a à nouveau une branche parabolique mais de direction Oy cette fois.

**Exemple 11.16** Intéressons nous à la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^2 + 1}{t-1} \end{cases}$$

Elle présente des branches infinies quand  $t \rightarrow 1^\pm$  et quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Si  $t \rightarrow +\infty$ .** Comme  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  et  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  alors la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Si  $t \rightarrow -\infty$ .** On montre de même que la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe quand  $t \rightarrow -\infty$ .

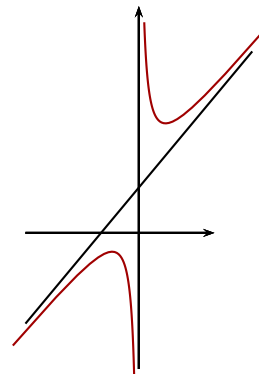
**Si  $t \rightarrow 1^+$ .** 1 On forme le quotient  $y(t)/x(t)$  et on cherche sa limite quand  $t \rightarrow 1^+$  :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t^2 + 1 \xrightarrow{t \rightarrow 1} 2$$

- 2 On cherche maintenant la limite de  $y(t) - 2x(t)$  quand  $t \rightarrow 1$  :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2 - 1}{t-1} = t + 1 \xrightarrow{t \rightarrow 1} 2$$

donc la droite d'équation  $y = 2x + 2$  est asymptote à la courbe quand  $t \rightarrow 1^+$ .



- 3 On cherche la position de la courbe relativement à l'asymptote. Pour ce faire, on étudie le signe de :

$$y(t) - 2x(t) - 2 = t - 1 \geq 0 \text{ si } t \geq 1.$$

Donc la courbe est au dessus de l'asymptote quand  $t \rightarrow 1^+$ .

Si  $t \rightarrow 1^-$ . La même étude montre que la droite d'équation  $y = 2x + 2$  est asymptote à la courbe quand  $t \rightarrow 1^-$  et que la courbe est en dessous de l'asymptote dans ce cas.

### 11.3.3 Étude d'une courbe paramétrée

PLAN 11.3 : Plan d'étude d'une courbe paramétrée

- 1 Déterminer le domaine de définition des deux fonctions  $x$  et  $y$ .
- 2 Étudier les symétries éventuelles.
- 3 Dresser le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  et repérer dans ce tableau les points stationnaires, les points à tangente horizontale ou verticale et les branches infinies.
- 4 Étudier les points stationnaires.
- 5 Étudier les branches infinies.
- 6 Tracé sommaire de la courbe. Il est inutile d'utiliser la calculatrice pour reporter des points, il suffit de placer les asymptotes éventuelles, de mettre en évidence les points stationnaires et d'avoir l'allure globale de la courbe.

Le point 2 est très important et permet bien souvent de restreindre l'étude à un intervalle plus petit. Pour cela, on interprète géométriquement la position du point  $M(\varphi(t))$  par rapport au point  $M(t)$  où  $\varphi$  est une certaine transformation. Voyons quelques exemples courants :

- Si  $x(t+T) = x(t)$  et  $y(t+T) = y(t)$ , le point  $M(t+T)$  est le même que le point  $M(t)$ . On aura tracé toute la courbe si on restreint l'étude au paramètre  $t$  qui varie dans un intervalle de la forme  $[a, a+T[$ .
- Si  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , le point  $M(-t)$  est le symétrique orthogonal du point  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Il suffit de tracer la courbe pour  $t \in [0, +\infty[$  et de compléter le dessin final par une symétrie par rapport à  $(Ox)$ .
- Si  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , le point  $M(-t)$  est le symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier la courbe pour  $t \in [0, +\infty[$  et de compléter le tracé par une symétrie de centre l'origine.
- Si  $x(1/t) = -x(t)$  et  $y(1/t) = y(t)$ , les points  $M(1/t)$  et  $M(t)$  sont symétriques par rapport à  $(Oy)$ . Si on trace la portion de courbe pour  $t \in ]0, 1]$ , la portion correspondant à  $t \in [1, +\infty[$  s'en déduit par une symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

Exemple 11.17 Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

- 1 Les fonctions  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$ .
- 2 **Restriction de l'intervalle d'étude.** On remarque que  $x(t+2\pi) = x(t)$  et  $y(t+2\pi) = y(t)$ . Donc  $M(t+2\pi) = M(t)$ . Il suffit de faire l'étude de la courbe sur un intervalle  $[\alpha, \alpha+2\pi]$ . De plus,  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ . Le point  $M(-t)$  est donc le symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'axe  $Oy$ . Il suffit donc de faire l'étude sur  $[0, \pi]$  et de compléter le tracé de la courbe par une symétrie par rapport à la droite  $Oy$ .
- 3 **Variations.** On calcule

$$x'(t) = \frac{\cos^3 t + 1}{\cos^2 t} \quad y'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

D'où le tableau de variations :

$t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$x'(t)$	+		+ 0
$y'(t)$	0 +		+ 0
$x(t)$	0 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ 0
$y(t)$	1 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ -1

On remarque le point  $M(0)$  qui est à tangente horizontale, un point stationnaire  $M(\pi)$  et une branche infinie en  $t = \pi/2$ .

**4 Étude du point stationnaire.**

— Sans les développements limités :

$$\frac{y(t) - y(\pi)}{x(t) - x(\pi)} = \frac{\frac{1}{\cos t} + 1}{\tan t + \sin t} = \frac{1 + \cos t}{\sin t (1 + \cos t)} = \frac{1}{\sin t} \xrightarrow{t \rightarrow \pi^-} +\infty$$

donc la courbe admet une tangente verticale en le point stationnaire de paramètre  $t = \pi$ .

— Avec les développements limités : Posons  $h = t - \pi$ , et faisons un DL(0,3) :

$$\tilde{x}(h) = \frac{h^3}{2} + o(h^3), \quad \tilde{y}(h) = -1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

d'où l'on tire

$$F(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(h^3)$$

Dans le repère  $\mathcal{R} = (M(\pi), \vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{u} = (0, -1)$  et  $\vec{v} = (1, 0)$ , le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $(X(t), Y(t))$  avec  $X(t) \sim (t - \pi)^2/2$  et  $Y(t) \sim (t - \pi)^3/2$  lorsque  $t \rightarrow \pi$ . On en déduit que le point  $M(\pi)$  est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.

**5 Étude de la branche infinie.**

— Sans les développements limités : On forme le quotient

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\sin t (1 + \cos t)} \xrightarrow{t \rightarrow \pi/2} 1.$$

Ensuite, on calcule :

$$y(t) - x(t) = \frac{1 - \sin t}{\cos t} - \sin t \xrightarrow{t \rightarrow \pi/2} -1$$

car  $\sin$  et  $\cos$  sont dérivables en  $\pi/2$  donc pour leurs taux d'accroissements respectifs en  $\pi/2$ , on a :

$$\frac{\sin t - 1}{t - \pi/2} \xrightarrow{t \rightarrow \pi/2} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\cos t}{t - \pi/2} \xrightarrow{t \rightarrow \pi/2} -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

donc

$$\frac{1 - \sin t}{\cos t} = -\frac{\frac{\sin t - 1}{t - \pi/2}}{\frac{\cos t}{t - \pi/2}} \xrightarrow{t \rightarrow \pi/2} 0.$$

Enfin, on étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation  $y = x - 1$  :

$$y(t) - x(t) + 1 = \frac{(1 - \sin t)(1 + \cos t)}{\cos t}$$

qui est du signe de  $\cos t$ . Donc lorsque  $t \rightarrow \pi/2^+$ , la courbe arrive sous l'asymptote, et lorsque  $t \rightarrow \pi/2^-$ , la courbe arrive sur l'asymptote.

— Avec les développements limités : Lorsque  $t \rightarrow \pi/2$ , en posant  $h = t - \pi/2$ , on effectue un développement asymptotique des deux fonctions :

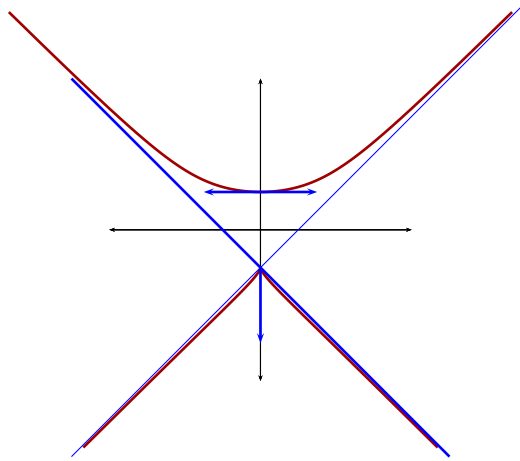
$$\tilde{x}(h) = x(\pi/2 + h) = -\frac{1}{\tan h} + \cos(h) = -\frac{1}{h(1 + h^2/3 + o(h^2))} + 1 + o(h) = -\frac{1}{h} + 1 + \frac{h}{3} + o(h)$$

$$\tilde{y}(h) = -1/\sin h = -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} + o(h)$$

Et alors

$$\tilde{y}(h) - \tilde{x}(h) + 1 = -h/2 + o(h)$$

ce qui montre que  $y(t) - x(t) + 1 \sim -(t - \pi/2)/2$  lorsque  $t \rightarrow \pi/2$ . Par conséquent, la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe. Lorsque  $t \rightarrow \pi/2^+$ , la courbe arrive sous l'asymptote à gauche, et lorsque  $t \rightarrow \pi/2^-$ , la courbe arrive sur l'asymptote à droite.



Exemple 11.18 L'astroïde est la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases}$$

1 Les deux fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

2 **Symétries :**

- $x(t+2\pi) = x(t)$ ,  $y(t+2\pi) = y(t)$  donc  $M(t+2\pi) = M(t)$ . Il suffit de tracer la courbe pour  $t \in [t_0, t_0 + 2\pi]$ .
- $x(t+\pi) = -x(t)$ ,  $y(t+\pi) = -y(t)$  donc le point  $M(t+\pi)$  est le symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'origine. Il suffit de tracer la courbe pour  $t \in [t_0, t_0 + \pi]$  et de compléter le dessin par une symétrie centrale pour obtenir toute la courbe.
- $x(-t) = x(t)$ ,  $y(-t) = -y(t)$  donc  $M(-t)$  est le symétrique de  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Il suffit de faire l'étude sur  $[0, \pi/2]$  puis de compléter par une symétrie.
- $x(\pi/2 - t) = y(t)$ ,  $y(\pi/2 - t) = x(t)$  donc le point  $M(\pi/2 - t)$  est le symétrique du point  $M(t)$  par rapport à la première bissectrice. Il suffit finalement de faire l'étude pour  $t \in [0, \pi/4]$ , de compléter le tracé par des symétries par rapport à la première bissectrice, l'axe  $(Ox)$  et l'origine pour obtenir la courbe complète.

3 **Variations :**

$$\begin{cases} x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases}$$

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	-
$y'(t)$	0	+
$x(t)$	$a$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y(t)$	0	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$

On remarque que le point  $M(0)$  est stationnaire. Il n'y a pas de branche infinie.

4 **Étude du point stationnaire** La première méthode est ici inutilisable car la limite ne peut pas se calculer avec les techniques usuelles. Effectuons un développement limité à l'ordre 3 :

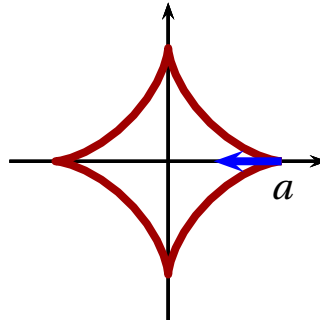
$$\begin{cases} x(t) = a - \frac{3}{2}at^2 + o(t^3) \\ y(t) = at^3 + o(t^3) \end{cases}$$

d'où

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3a/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + o(t^3)$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant indépendants, dans le repère  $(M(0), \vec{u}, \vec{v})$ , le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $X(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$  et  $Y(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^3$ . On en déduit que le point  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce à tangente horizontale.

5 **Tracé :**



**Exemple 11.19** Une roue de rayon  $R > 0$  roule sans glisser sur une route horizontale. Déterminons la trajectoire d'un point situé sur sa périphérie. Notons  $C(t)$  le centre de la roue et  $t$  l'angle entre la verticale et le vecteur  $\overrightarrow{C(t)M(t)}$ . La roue roule sans glisser donc si le centre à l'instant  $t$  se trouve à l'abscisse  $x_C$ , on a  $x_C = Rt$ . On en déduit que  $C(t) \Big|_{\mathbb{R}}$

puis comme  $\overrightarrow{C(t)M(t)} \Big|_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ -R \cos t \end{pmatrix}$  on obtient l'équation paramétrique de la courbe qui s'appelle la *cycloïde* :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

1. Les fonctions  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

2. **Symétries :** puisque  $x(t + 2\pi) = x(t) + 2R\pi$ ,  $y(t + 2\pi) = y(t)$ , le point  $M(t + 2\pi)$  se déduit du point  $M(t)$  par une translation de vecteur  $\vec{V} = (2R\pi, 0)$ . Il suffit donc de tracer la courbe pour  $t \in [0, 2\pi]$  et on complète le tracé par une infinité de translations de vecteur  $\vec{V}$ . Puisque  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ , le point  $M(-t)$  est le symétrique du point  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il suffit donc d'étudier la courbe pour  $t \in [0, \pi]$  et de compléter par une symétrie par rapport à  $(Oy)$ .

3. **Variations :**

$$\begin{cases} x'(t) = R(1 - \cos t) \\ y'(t) = R \sin t \end{cases}$$

$t$	0	$\pi$
$x'(t)$	0	+
$y'(t)$	0	+
$x(t)$	0	$R\pi$
$y(t)$	0	$2R$

On remarque que le point  $M(0)$  est stationnaire et que le point  $M(\pi)$  est à tangente horizontale.

4. **Étude du point stationnaire :** Là encore, la première technique est peu commode car elle aboutit à une limite difficile à calculer avec les méthodes usuelles. On effectue alors un DL à l'ordre 3,

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ R/2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} R/6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + o(t^3)$$

On en déduit que le point  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.

5. **Tracé :**

