Chapitre 10

Espaces euclidiens

Table des matières

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les sections **??**, **??**,**??** et **??** sont des rappels de première année.

10.1 Définitions et règles de calcul

10.1.1 Produit scalaire

DÉFINITION 10.1 ♡♡♡ **Produit scalaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur E, une application : $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. φ est une *forme bilinéaire* : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z),$$
$$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(y, z).$$
2. φ est *symétrique* :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$
3. φ est *définie* :
$$\forall x \in E, \quad (\varphi(x, x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0).$$
4. φ est *positive* :
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0.$$

✎ *Notation 10.1* On note $\left(x \mid y\right) = \varphi(x, y)$ le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.

DÉFINITION 10.2 ♡♡♡ **Espace préhilbertien, Espace euclidien**
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.

10.1.2 Norme

Dans toute la suite, on considère un préhilbertien réel $(E, (\cdot \mid \cdot))$.

DÉFINITION 10.3 ♡♡♡ **Norme euclidienne associée à un produit scalaire**
On définit la *norme euclidienne* associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ par :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}.$$

Remarque 10.1 $\|\cdot\|$ est bien définie car $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire positive et donc pour tout vecteur $x \in E$, $(x \mid x) \geqslant 0$.

THÉORÈME 10.1 ♡ **Règles de calcul**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda.x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
2. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$;
3. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$;
4. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (*égalité du parallélogramme*) ;
5. $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (*identité de polarisation*).

Pour des vecteurs $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left(x_i \mid y_j\right),$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j \left(x_i \mid x_j\right).$$

Démonstration *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique :*

1. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda| \, \|x\|$.
2. $\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$.
3. $\|x-y\|^2 = (x-y \mid x-y) = (x \mid x) - 2(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$;
4. *En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'égalité du parallélogramme.*
5. *Enfin, par soustraction de ces deux mêmes égalités, on obtient l'identité de polarisation.*

Les deux dernières formules sont conséquence de la bilinéarité du produit scalaire.

THÉORÈME 10.2 ♡♡♡ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\boxed{\left|(x \mid y)\right| \leqslant \|x\| \, \|y\|}$$

et on a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires : $\left|(x \mid y)\right| = \|x\| \, \|y\| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad (y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y)$.

Démonstration *Soient $x, y \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons :*

$$P(\lambda) = \left(x + \lambda y \mid x + \lambda y\right).$$

D'après les règles de calcul précédentes, on obtient

$$P(\lambda) = (y \mid y)\lambda^2 + 2(x \mid y)\lambda + (x \mid x) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda (x \mid y) + \|x\|^2.$$

Si $\|y\| \neq 0$ alors P est un trinôme du second degré en λ. Par ailleurs $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) \geqslant 0$. Donc P admet au plus une racine réel et son discriminant réduit est négatif ou nul, ce qui s'écrit : $\left((x \mid y)\right)^2 - \|y\|^2 \|x\|^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\left|(x \mid y)\right| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.
Si x et y sont colinéaires, on vérifie facilement que $\left|(x \mid y)\right| = \|x\| \, \|y\|$. Réciproquement, si cette égalité est vraie, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a donc $\left(x + \lambda_0 y \mid x + \lambda_0 y\right) = 0$ ce qui n'est possible que si $x + \lambda_0 y = 0$ c'est-à-dire que si $x = \lambda_0 y$.
Si $\|y\| = 0$, c'est-à-dire si $y = 0$ alors l'inégalité ainsi que le cas d'égalité sont trivialement vérifiés.

THÉORÈME 10.3 ♡♡♡ **Inégalité de Minkowski**
Pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$, on a *l'inégalité de Minkowski*

$$\boxed{\left|\|x\| - \|y\|\right| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$$

et on a égalité dans la majoration de droite si et seulement si les deux vecteurs x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine : $\exists \lambda \geqslant 0 : \quad y = \lambda x$.

Démonstration *Soient $x, y \in \mathrm{E}$.*

- *On applique les régles de calcul avec le produit scalaire* **??** *et l'inégalité de Cauchy-Schwarz* **??** *:*

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

  On a donc : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- *Si x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine, on vérifie facilement que cette dernière inégalité est une égalité. Réciproquement, supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors, en reprenant le calcul précédent, on obtient $(x \mid y) = \|x\|\,\|y\|$ et on est dans le cas d'égalité de la la formule de Cauchy-Schwarz. Donc x et y sont colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = \alpha x$. On injecte cette égalité dans celle de départ, on trouve $(1+\alpha)\,x = \|x\| + \|\alpha x\|$, c'est-à-dire : $(1+\alpha)\,x = (1+|\alpha|)\,\|x\|$. Si le vecteur x est nul alors il en est de même de y et la propriété est prouvée. Si x est non nul alors $\alpha = |\alpha|$ et α est bien positif.*
- *Par ailleurs :*

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

  et

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\|$$

  et comme $\|y-x\| = \|x-y\|$, on obtient : $\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$ et $\|x-y\| \geqslant \|y\| - \|x\|$, ce qui s'écrit aussi : $\|x-y\| \geqslant \left|\|x\| - \|y\|\right|$.

De manière plus générale :

DÉFINITION 10.4 ♡♡♡ **Norme**
On appelle norme sur E une application : $\|\cdot\| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$.
2. $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*Inégalité triangulaire*).

PROPOSITION 10.4 ♡ **Norme associée au produit scalaire**
La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E est une norme sur E.

Démonstration *Les propriétés 2 et 3 ont déjà été prouvées dans les théorèmes* **??** *et* **??***. Démontrons la première. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|x\| = 0$ alors $(x \mid x) = 0$ mais comme $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire définie, $x = 0$.*

Exemple 10.2 Quelques exemples de produits scalaires et leur norme associée (à retenir) :

- Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: Si $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n), \mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\|\mathrm{X}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- Sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, $\mathrm{E} = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, $f, g \in \mathrm{E}$:

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\, dt}.$$

- Sur l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, $E = \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f, g \in E$:

$$\left(f \mid g\right) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(f(t)\right)^2 dt}.$$

- Sur l'espace des matrices carrées $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$< A, B >= \mathrm{Tr}\,(A^T.B),$$

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^T.A)}.$$

Voir l'exercice **??** page **??**. Remarquons que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors $< A, B >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}$ ce qui permet d'apparenter ce produit scalaire au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ en identifiant les matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à des vecteurs de taille n^2 et à coefficients réels.

DÉFINITION 10.5 ♡ **Vecteur unitaire**
Soit x un vecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que x est *unitaire* si et seulement si $\|x\| = 1$.

10.2 Orthogonalité

On considère dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel $(E, (. \mid .))$.

DÉFINITION 10.6 ♡ **Vecteurs orthogonaux**
Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* lorsque $\left(x \mid y\right) = 0$.

THÉORÈME 10.5 ♡ **Identité de Pythagore**
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$\left(x \mid y\right) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration *D'après la formule* **??** *:*

$$\left\|x + y\right\|^2 = \|x\|^2 + 2\left(x \mid y\right) + \left\|y\right\|^2,$$

et il vient immédiatement :

$$\left(x \mid y\right) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

THÉORÈME 10.6 ♡ **Des vecteurs non nuls orthogonaux 2 à 2 forment un système libre**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \left(x_i \mid x_j\right) = 0.$$

Alors la famille S est libre.

Démonstration *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Du fait de la bilinéarité du produit scalaire et que les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux :*

$$0 = \left(x_i \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left(x_i \mid x_j\right) = \alpha_i \left(x_i \mid x_i\right)$$

Comme $x_i \neq 0$, $\left(x_i \mid x_i\right) \neq 0$ et il vient que $\alpha_i = 0$. Cette égalité est vraie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On montre ainsi que la famille S est libre.

DÉFINITION 10.7 ♡ **Sous-espaces orthogonaux**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad (x \mid y) = 0.$$

DÉFINITION 10.8 ♡ **Orthogonal d'une partie**
Soit $A \subset E$ une partie de E. On définit l'orthogonal de A comme étant le sous-ensemble de E noté $A^{\perp}$ et donné par :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

THÉORÈME 10.7 ♡ **Propriétés de l'orthogonal**
Soient $A, B \subset E$ deux parties de E.

1. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
3. $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.
4. $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Démonstration

1. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de* A *donc* $0 \in A^{\perp}$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in A^{\perp}$ *et* $a \in A$. *Alors* $(\alpha x + \beta y \mid a) = \alpha (x \mid a) + \beta (y \mid a) = 0$ *donc* $\alpha x + \beta y \in A^{\perp}$. $A^{\perp}$ *est donc bien un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Supposons que* $A \subset B$. *Soit* $x \in B^{\perp}$. *Montrons que* $x \in A^{\perp}$. *Soit* $a \in A$. *Comme* $A \subset B$, $a \in B$ *et* $(x \mid a) = 0$. *Donc* $x \in A^{\perp}$.
3. *On a* $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ *donc d'après la propriété précédente :* $(\mathrm{Vect}(A))^{\perp} \subset A^{\perp}$. *Réciproquement, si* $x \in A^{\perp}$ *et si* $y \in \mathrm{Vect}(A)$ *montrons que* $(x \mid y) = 0$. *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *et* $a_1, \dots, a_n \in A$ *tels que :* $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ *et*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x \mid a_i) = 0$$

   car $x \in A^{\perp}$. *Voilà qui termine la démonstration du troisième point.*
4. *Enfin, si* $a \in A$ *et si* $x \in A^{\perp}$ *alors* $(a \mid x) = 0$ *et donc* $a \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ *ce qui prouve la dernière inclusion.*

⚠ *Attention 10.3* En général, l'égalité $\mathrm{Vect}(A) = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ n'est vraie qu'en dimension finie, voir théorème **??** page **??**.

10.3 Espaces euclidiens

On considère dans toute la suite de ce chapitre un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

10.3.1 Bases orthogonales, orthonormales

DÉFINITION 10.9 ♡ **Bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est une base

1. *orthogonale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies (e_i \mid e_j) = 0.$$

2. *orthonormale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}.$$

Remarque 10.2 Si on se donne un système $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension n alors d'après la proposition **??**, ce système est libre. Comme il est libre de rang maximal c'est une base (orthogonale) de E.

Remarque 10.3 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

THÉORÈME 10.8 ♡ **Calculs dans une base orthonormale**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont données par les produits scalaires :
$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i}.$$
2. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors
$$\boxed{\left(x \mid y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}.$$
3. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,
$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Démonstration *Ces formules se prouvent facilement en utilisant les règles de calcul avec le produit scalaire* **??** *et le fait que :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad \left(e_i \mid e_j\right) = \delta_{ij}$.

10.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

BIO 1 Erhard Schmidt, né le 13 janvier 1876 à Dorpat (Estonie), mort le 06 décembre 1959 à Berlin)

Mathématicien allemand. Il fait ses études dans différentes universités allemandes et les termine à Berlin. Il soutient sa thèse en 1905 sous la direction de David Hilbert. Elle porte sur les équations intégrales. Après avoir enseigné successivement dans les universités de Bonn, Zurich, Erlangen et Breslau, il est nommé en 1917 comme professeur à l'Université de Berlin où il occupe le poste laissé vacant par Schwarz. Dans les années 1930, il subit la montée du nazisme et alors que ses collègues juifs (Schur, von Mises) doivent quitter l'Université, il est sommé de prendre des résolutions contre les juifs. Il s'acquitte de cette tâche avec si peu de zèle que les nazis diront de lui à l'époque qu'« il ne comprend pas le problème juif » et qu'il ne sera pas critiqué par la suite.
Erhard Schmidt est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il a beaucoup contribué à la théorie des espaces de Hilbert et a simplifié et généralisé un certain nombre de résultats d'Hilbert. C'est dans un article de 1907 sur les équations intégrales qu'il expose le procédé d'orthonormalisation. Notons que ce procédé avait été découvert au préalable par Laplace mais c'est Schmidt qui su en donner le premier un exposé clair.

THÉORÈME 10.9 ♡ **Théorème de Schmidt**
Soit E un espace euclidien et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe $\boxed{\textit{une et une seule famille orthonormale}}$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$;
2. $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad (e_i \mid \varepsilon_i) > 0$.

Démonstration *La preuve est constructive et par récurrence sur la taille n de la famille libre e.*

- $\boxed{\textit{Initialisation}}$ *: La famille* $e = (e_1)$ *est libre par hypothèse et donc* e_1 *est non nul. Le vecteur* $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ *est alors le seul vecteur unitaire de* E *vérifiant que* $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ *ainsi que* $(e_1 \mid \varepsilon_1) = \|e_1\| > 0$.
- $\boxed{\textit{Hérédité}}$ *Soit* $k \in [\![1, n-1]\!]$. *Supposons construite la famille* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ *répondant à l'énoncé. Construisons un vecteur* ε_{k+1} *répondant au problème. Comme* $\varepsilon_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1})$ *(voir la figure* **??***), on cherche* ε_{k+1} *sous la forme* $\varepsilon_{k+1} = \lambda\left(e_{k+1} - \alpha_1 \varepsilon_1 - \dots - \alpha_k \varepsilon_k\right)$ *où : pour tout* $i \in [\![1,k]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *et où* $\lambda \in \mathbb{R}$.

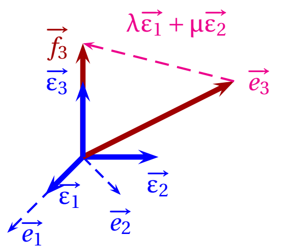

FIGURE 10.1 – Algorithme de Schmidt : redressement de e_3

La condition d'orthogonalité de la famille est équivalente à, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$:

$$(\varepsilon_i \mid \varepsilon_{k+1}) = 0 = \lambda\left((\varepsilon_i \mid e_{k+1}) - \alpha_i\,(\varepsilon_i \mid \varepsilon_i)\right)$$

, c'est-à-dire $\alpha_i = (\varepsilon_i \mid e_{k+1})$.
La constante λ est strictement positive. En effet :

$$\lambda\,(e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) = \left(\varepsilon_{k+1} + \lambda\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varepsilon_i \mid \varepsilon_{k+1}\right) = \|\varepsilon_{k+1}\|^2$$

et est donc entièrement déterminée par le fait que ε_{k+1} est unitaire.
On obtient ainsi un unique vecteur ε_{k+1} satisfaisant l'énoncé. Il est donné par

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k+1}}{\|\tilde{\varepsilon}_{k+1}\|} \text{ où } \tilde{\varepsilon}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(\varepsilon_i \mid e_{k+1})\,\varepsilon_i.$$

Remarque 10.4 L'algorithme de construction de la base orthonormale est aussi important que l'énoncé du théorème.

En appliquant le théorème précédent à une base e de E, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 10.10 ♡
Soit E un espace euclidien de dimension n et $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe *une et une seule base orthonormale* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$;
2. $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (e_i \mid \varepsilon_i) > 0$.

Remarque 10.5 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

PLAN 10.1 : Pour orthonormaliser une famille de vecteurs

On souhaite appliquer l'algorithme de Schmidt à la base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Pour ce faire :

1. *On pose* $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. *On suppose $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$ construits. On calcule le vecteur* $\boxed{\tilde{\varepsilon}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i \mid e_{k+1})\,\varepsilon_i}$ *et on pose* $\boxed{\varepsilon_{k+1} = \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{k+1}}{\|\tilde{\varepsilon}_{k+1}\|}}$.
3. *Si $(e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) < 0$ alors on remplace ε_{k+1} par $-\varepsilon_{k+1}$.*

Remarque 10.6
— La troisième étape du procédé d'orthonormalisation est facultative. Si on ne l'effectue pas, la base construite est encore orthonormale.
— On peut aussi ne pas normaliser le vecteur $\tilde{\varepsilon}_i$ dans la deuxième étape de l'algorithme. Dans ce cas la base construire n'est pas orthonormale mais orthogonale et la formule donnant ε_{k+1} en fonction de e_{k+1}, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$ est légérement changée (exercice !).

Remarque 10.7 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

Exemple 10.4 Soit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1 = (2,0,0)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,2)$. Construisons une base orthonormale à partir de $e = (e_1, e_2, e_3)$. D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt :

1. On pose $\boxed{\varepsilon_1 = (1,0,0)}$.
2. On a $\tilde{\varepsilon}_2 = e_2 - (\varepsilon_1 \mid e_2)\varepsilon_1 = (0,1,1)$ donc $\boxed{\varepsilon_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)}$.
3. De même $\tilde{\varepsilon}_3 = e_3 - (\varepsilon_1 \mid e_3)\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 \mid e_3)\varepsilon_2 = (0,-1,1)$ donc $\boxed{\varepsilon_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,-1,1)}$.

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de E.

10.3.3 Conséquences

COROLLAIRE 10.11 **Théorème de la base orthonormale incomplète**
Toute famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'un espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ de dimension n ($p \leqslant n$) peut être complétée par des vecteurs $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n$ de E en sorte que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base orthonormale de E.

Démonstration *En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille orthonormale (et donc libre)* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ *par des vecteurs* $e_{k+1}, \dots, e_n$ *en une base* $e = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ *de* E. *On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base, on peut construire des vecteurs* $\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n$ *de* E *tels que la famille* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *soit orthonormale et tel que* $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = E$. *Cette famille est donc libre et génératrice et forme une base orthonormale de* E.

COROLLAIRE 10.12 **Existence d'une base orthonormale**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Démonstration *Soit* e *une base de* E. *En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette famille, on construit une famille orthonormale* ε *telle que* $\mathrm{Vect}(\varepsilon) = \mathrm{Vect}(e) = E$. *Cette famille est donc libre et génératrice. Elle forme une base orthonormale de* E.

THÉORÈME 10.13 ♡ **Propriétés de l'orthogonal en dimension finie**
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors

1. $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$;
2. $\dim F^{\perp} = n - p$;
3. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration *Montrons que* F *et* $F^{\perp}$ *sont supplémentaires dans* E.

- *On a :* $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. *En effet, si un vecteur* x *est à la fois dans* F *et dans l'orthogonal de* F, *il vérifie* $(x \mid x) = 0$ *et donc* $x = 0$.
- *Montrons maintenant que* $E = F + F^{\perp}$. *Comme* F *est de dimension* p, *par application du théorème précédent, on peut trouver une base orthonormale* $(e_1, \dots, e_p)$ *de* F. *Soit* $x \in E$ *et soit* $x' = \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k)\, e_k$. *On vérifie facilement que* $x' \in F$ *et que* $x - x' \in F^{\perp}$. *Donc* $x = x + (x - x') \in F + F^{\perp}$ *et on a bien* $E = F + F^{\perp}$.

Ainsi : $E = F \oplus F^{\perp}$. *D'après le théorème* **??**, *on obtient* $\dim F + \dim F^{\perp} = n$ *qui entraîne la seconde égalité du théorème. Enfin, on a prouvé dans la proposition* **??** *que* $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. *Mais comme* $\dim (F^{\perp})^{\perp} = n - \dim F^{\perp} = n - (n - \dim F) = \dim F$, *on peut affirmer que* $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

⚠ *Attention 10.5* Nous avons utilisé dans cette preuve uniquement le fait que F est de dimension finie. Aussi, ce théorème reste vrai si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien.

Remarque 10.8 Un sous-espace vectoriel F d'un espace E de dimension finie possède, en général, une infinité de supplémentaires. Si E est un espace euclidien, F n'admet qu'un et un seul supplémentaire orthogonal : $F^{\perp}$. Pour cette raison, on dira que $F^{\perp}$ est $\boxed{\text{le}}$ supplémentaire orthogonal de F dans E.

✎ *Notation 10.6* Si G est le supplémentaire orthogonal de F dans E, on écrit $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

THÉORÈME 10.14 ♡♡♡ **Théorème de Riesz Hors programme en PC mais instructif**
Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $z_f \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (z_f \mid x)$$

Démonstration *Pour tout $z \in \mathrm{E}$, posons :*

$$\varphi_z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (z \mid x) \end{array} \right. .$$

Pour tout $z \in \mathrm{E}$, φ_z est une forme linéaire. En effet, fixons $z \in \mathrm{E}$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in \mathrm{E}$: $\varphi_z(\alpha x + \beta y) = (z \mid \alpha x + \beta y) = \alpha (z \mid x) + \beta (z \mid y) = \alpha \varphi_z(x) + \beta \varphi_z(y)$. L'application Φ donnée par

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}^* \\ z & \longmapsto & \varphi_z \end{array} \right.$$

est alors bien définie. Montrons que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- $\boxed{\Phi \text{ est linéaire :}}$ *si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathrm{E}$ alors $\Phi(\alpha x + \beta y) = \varphi_{\alpha x + \beta y} = (\alpha x + \beta y \mid \cdot) = \alpha (x \mid \cdot) + \beta (y \mid \cdot) = \alpha \varphi_x + \beta \varphi_y = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y)$.*
- $\boxed{\Phi \text{ est injective :}}$ *soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\Phi(x) = 0$. Alors : $\forall y \in \mathrm{E}, \quad (x \mid y) = 0$, et en particulier $(x \mid x) = 0$ ce qui n'est possible, par définition du produit scalaire que si $x = 0$.*
- $\boxed{\Phi \text{ est surjective :}}$ *comme $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}^*$ (voir l'exercice **??** page **??**), d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes **??**, sachant que Φ est injective, il vient que Φ est aussi surjective.*

Toute forme linéaire $f \in \mathrm{E}^*$ sur E est donc image d'un vecteur z de E par Φ. Posons $z_f = z$. On a alors : $f = \Phi(z_f) = (z_f \mid \cdot)$ et le théorème est prouvé.

Remarque 10.9 Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, si l'on considère un hyperplan H d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Alors cet hyperplan est orthogonal au vecteur $n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $\mathrm{H} = \{n\}^\perp$.

10.4 Projecteurs et symétries orthogonaux

10.4.1 Projecteurs orthogonaux

DÉFINITION 10.10 ♡ **Projecteur orthogonal**

Soit $p \in \mathrm{L(E)}$ un projecteur (c'est-à-dire une endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$). On dit que p est un *projecteur orthogonal* si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} p, \ \forall y \in \operatorname{Im} p, \quad (x \mid y) = 0$$

Remarque 10.10 Soit p un projecteur orthogonal et soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $(p(x) \mid x - p(x)) = 0$. En effet, $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p^\perp$

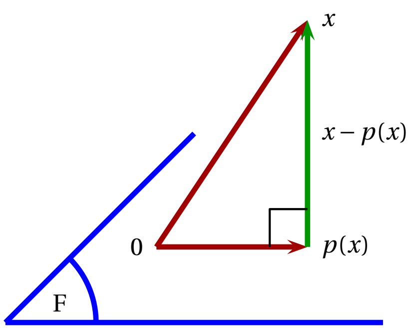

FIGURE 10.2 – Projecteur orthogonal

THÉORÈME 10.15 ♡ **Calcul du projeté orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $x \in \mathrm{E}$. On suppose que

H1 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F

alors le projeté orthogonal $p(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F vaut :

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i)\,\varepsilon_i}.$$

Démonstration *D'après le théorème* **??** *appliqué à $p(x) \in \mathrm{F}$ et à la base orthonormale ε de F donnée :*

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{p} \left(p(x) \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(x \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{p} \left(x - p(x) \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(x \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \end{aligned}$$

car $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = \mathrm{F}^{\perp}$ et donc :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \left(x - p(x) \mid \varepsilon_i\right) = 0.$$

THÉORÈME 10.16 ♡ **Le projeté orthogonal $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par des vecteurs de F**
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose :

$$d(x,\mathrm{F}) = \inf_{f \in \mathrm{F}} \|x - f\|.$$

Alors :

1. $d(x,\mathrm{F})$ est bien défini ;
2. $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
3. Si $f \in \mathrm{F}$, $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.

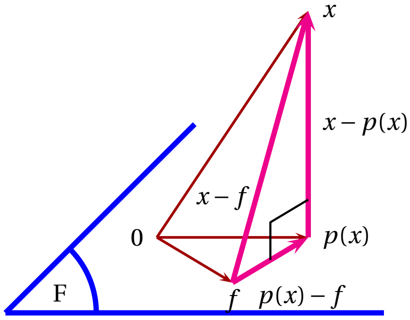

FIGURE 10.3 – Meilleure approximation

Démonstration

1. *Soit $x \in \mathrm{F}$. Notons $\mathscr{F} = \left\{\left\|x - f\right\| \mid f \in \mathrm{F}\right\}$. $\mathscr{F}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure et $d(x,\mathrm{F})$ est bien défini.*
2. *D'après le théorème de Pythagore* **??***, pour tout $f \in \mathrm{F}$:*

$$\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \geqslant \|x - p(x)\|^2.$$

Donc $\left\|x - p(x)\right\|$ est un minorant de $\mathscr{F}$. Mais comme $p(x) \in \mathrm{F}$, $\left\|x - p(x)\right\| \in \mathscr{F}$ et est donc la borne inférieure de $\mathscr{F}$. Il vient alors : $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p(x)\|$.

3. *On a de plus montré que si $f \in \mathrm{F}$, alors $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ et on a égalité si et seulement si $\left\|p(x) - f\right\|^2 = 0$ c'est-à-dire $f = p(x)$.*

10.4.2 Symétries orthogonales, réflexions

DÉFINITION 10.11 ♡ **Symétrie orthogonale, réflexion**
Soit $s \in L(E)$ une symétrie vectorielle (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}$).

- On dit que s est une symétrie orthogonale si et seulement si les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont orthogonaux.

- On dit de plus que s est une *réflexion* si l'ensemble des vecteurs invariants de s, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ est un hyperplan de E.

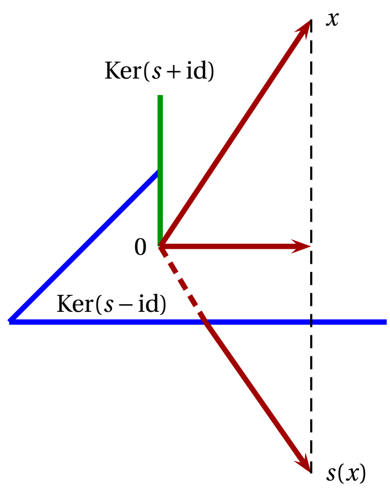

FIGURE 10.4 – Symétrie vectorielle orthogonale

10.5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

10.5.1 Rappels

PROPOSITION 10.17 **Calculs dans une base orthonomale**
Soit $(E, (.\mid.))$ un espace euclidien de dimension n, soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, et soit $u \in \mathfrak{L}(E)$.
On note $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_e(y)$ et $A = \mathrm{Mat}_e(u) = (a_{i,j})$. Alors :

1. $\left(x \mid y\right) = X^T Y$;
2. $\left(x \mid u(y)\right) = X^T A Y$;
3. $\left(u(x) \mid y\right) = X^T A^T Y$;
4. $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \left(e_i \mid u(e_j)\right) = a_{i,j}$;
5. $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \left(u(e_i) \mid e_j\right) = a_{j,i}$.
6. $\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A Y = 0 \implies A = 0$.

Démonstration

1. *On a* $\left(x \mid y\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \left(e_i \mid e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *car* e *est une bon et donc* $\left(x \mid y\right) = X^T Y$.
2. *On applique la première formule :* $\left(x \mid u(y)\right) = X^T A Y$.
3. *De le même façon :*$\left(u(x) \mid y\right) = (AX)^T Y = X^T A^T Y$.
4. *Soient* $i,j \in [\![1,n]\!]$, *on a*
$$\left(e_i \mid u(e_j)\right) = \begin{pmatrix}0 & \dots & 1 & \dots & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j}\end{pmatrix} = a_{i,j}.$$
5. *De même, on a*
$$\left(u(e_i) \mid e_j\right) = \begin{pmatrix}a_{1,i} & \dots & a_{j,i} & \dots & a_{n,i}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = a_{j,i}.$$

6. *Si pour tout* $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad X^T AY = 0$ *alors en particulier si* $E_i = \mathrm{Mat}_e(e_i)$, *on a pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = {E_i}^T AE_j = 0$ *et donc* $A = 0$.

10.5.2 Endomorphismes orthogonaux

On considère dans toute la suite un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.\mid.)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

DÉFINITION 10.12 ♡ **Endomorphismes orthogonaux, isométries vectorielles**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que u est un *endomorphisme orthogonal* ou *une isométrie vectorielle* si

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Exemple 10.7

1. L'application id_E est trivialement une isométrie de E.
2. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles. En effet, si s est une symétrie orthogonale par rapport $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ alors $G = F^{\perp} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ et si $x \in E$, comme $E = F \oplus_{\perp} G$, $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Comme $(x_F \mid x_G) = 0$, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|s(x)\|^2 = \|x_F - x_G\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 = \|x_F + x_G\|^2 = \|x\|^2$$

et donc $\|s(x)\| = \|x\|$.
En particulier, les réflexions sont des isométries.

Le théorème suivant permet de caractériser les isométries grâce au produit scalaire.

THÉORÈME 10.18 ♡ **Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire**
On a l'équivalence :

$$u \in O(E) \iff \forall (x, y) \in E^2, \quad \big(u(x) \mid u(y)\big) = \big(x \mid y\big).$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* u *est un endomorphisme orthogonal de* E. *D'après l'identité de polarisation* **??**, *pour tout* $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}\big(u(x) \mid u(y)\big) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= (x \mid y).\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que* u *préserve le produit scalaire alors pour tout* $x \in E$:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x) \mid u(x))} = \sqrt{(x \mid x)} = \|x\|$$

et donc $u \in O(E)$.

PROPOSITION 10.19 **Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes**
Soit $u \in O(E)$ un endomorphisme orthogonal de E alors u est un automorphisme de E et $u^{-1} \in O(E)$.

Démonstration *Soit* $x \in \mathrm{Ker}\, u$ *alors*

$$\|x\| = \|u(x)\| = 0$$

et d'après les propriétés de la norme **??**, *on peut affirmer que* $x = 0$. *Donc* $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ *et* u *est injectif.*

D'après la caractérisation des automorphismes d'un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,*u *est un automorphisme de* E. *Enfin, considérons* $x \in E$ *et notons* $y = u(x)$. u *étant un endomorphisme orthogonal de* E, *on a* $\|x\| = \|y\|$. *Donc, comme* $u^{-1}(y) = x$, *il vient que* $\|u^{-1}(y)\| = \|x\| = \|y\|$ *et* u^{-1} *est bien lui aussi un endomorphisme orthogonal de* E.

Les notions de groupe et à fortiori de sous-groupe ne sont plus au programme. L'ensemble $O(E)$ est néanmoins appelé *groupe orthogonal*. Expliquons pourquoi :

Théorème 10.20 ♡ **Groupe orthogonal HORS PROGRAMME**
Le couple $(O(E), \circ)$ est un groupe. Plus précisément c'est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL(E), \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

Démonstration

1. *L'ensemble* $O(E)$ *est stable pour le produit de composition :si* $u, v \in O(E)$ *alors* $u \circ v \in O(E)$. *En effet, pour tout* $x \in E$ *:*
$$\|u \circ v(x)\| = \|v(x)\| = \|x\|;$$
2. *Le produit de composition dans* $O(E)$ *est associatif. En effet, il est associatif dans* $\mathfrak{L}(E)$ *;*
3. *On a* $\mathrm{id}_E \in O(E)$ *et pour tout* $u \in O(E)$, $u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$ *autrement dit* id_E *est* l'élément neutre *du produit de composition ;*
4. *On sait que tout élément de* $O(E)$ *admet un* inverse *qui est aussi élément de* $O(E)$.

Pour résumer ces quatre points, on dit que $(O(E), \circ)$ *est un* groupe. *On peut vérifier facilement que* $(GL(E), \circ)$ *est aussi un groupe, appelé groupe linéaire. Comme* $O(E) \subset GL(E)$, *on dit que* $O(E)$ *est un* sous-groupe *du groupe linéaire.*

On propose maintenant une seconde caractérisation des isométries vectorielles grâce aux bases orthogonales.

Théorème 10.21 **Une caractérisation pratique des automorphismes orthogonaux**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On a équivalence entre :

1. $u \in O(E)$,
2. $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est encore une base orthonormale de E.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* $u \in O(E)$, *d'après la proposition* **??**, *pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *:*
$$\left(u(e_i) \mid u(e_j)\right) = \left(e_i \mid e_j\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$
ce qui prouve que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ *est une base orthonormale de* E.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si l'image par* u *de la base orthonormale* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *est encore orthonormale alors pour* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ *et par règles de calcul dans une base orthonormale :*
$$\|u(x)\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\right\|^2 = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|^2 = \|x\|^2.$$
Donc $u \in O(E)$.

Proposition 10.22 ♡ **Les seules valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle sont -1 et 1**
Soit $u \in O(E)$ qui admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda = \pm 1$.

Démonstration *Comme* λ *est une valeur propre de* u, *il existe* $x \in E$, $x \neq 0$ *tel que* $u(x) = \lambda x$. *Alors comme* $u \in O(E)$, *de* $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$, *on tire* $\|x\| = |\lambda| \|x\|$ *et comme* $x \neq 0$, *alors* $|\lambda| = 1$, *c'est-à-dire* $\lambda = \pm 1$.

Proposition 10.23 ♡ **Une isométrie vectorielle stabilise l'orthogonal de ses sous-espaces stables**
Soit $u \in O(E)$ et soit F un sev de E stable pour u. Alors :
$$u(F) \subset F \implies u\left(F^\perp\right) \subset F^\perp.$$

Démonstration *Comme* F *est stable pour* u, *on a* $u(F) \subset F$ *mais comme* $u \in O(E)$, u *est un automorphisme de* E *et sa restriction à* F *en est alors un de* F. *Alors* $\dim u(F) = \dim F$ *et forcément* $U(F) = F$. *Donc pour tout* $x \in F$, *il existe* $x_0 \in F$ *tel que* $u(x_0) = x$. *Soit* $y \in u\left(F^\perp\right)$. *Il existe donc* $y_0 \in F^\perp$ *tel que* $y = u(y_0)$ *et*
$$\left(y \mid x\right) = \left(u(y_0) \mid u(x_0)\right) = \left(y_0 \mid x_0\right) = 0$$
car $y_0 \in F^\perp$ *et* $x_0 \in F$. *On montre ainsi que* $u\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

Proposition 10.24 **Matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base adaptée à une décomposition de E en sous-espace stables orthogonaux**
Soit F un sous-espace stable pour $u \in O(E)$ alors dans une base e de E adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, on a :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & 0_{n-p,p} \\ 0_{p,n-p} & B \end{pmatrix}}$$
où $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $B \in GL_{n-p}(\mathbb{R})$ si $p = \dim F$ et $n = \dim E$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du fait que* F *et* $F^{\perp}$ *sont stables par* u *et du fait que la restriction de* u *à ces deux sevs est un automorphisme.*

10.5.3 Matrices orthogonales

DÉFINITION 10.13 ♡ **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$$A^T A = I_n.$$

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 10.11 Une matrice orthogonale est inversible et

$$A^{-1} = A^T.$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$AA^T = I_n.$$

THÉORÈME 10.25 ♡ **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad p \neq q \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ip} a_{iq} = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1.$$

Démonstration *Ces formules sont une conséquence directe de la définition du produit matriciel et de l'égalité :* $AA^T = I_n$

THÉORÈME 10.26 ♡ **La matrice d'une isométrie dans une base orthonormale est orthogonale**
On considère une **base orthonormale** $e = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E, et un endomorphisme $u \in L(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. On a équivalence entre :

1. u est un automorphisme orthogonal.
2. A est une matrice orthogonale.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $u \in L(E)$ *est une isométrie vectorielle de* E. *Alors pour tout* $x, y \in E$, $\big(u(x) \mid u(y)\big) = (x \mid y)$, *et donc matriciellement, pour tout* $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A^T A Y = X^T Y$. *Mais d'après la proposition* **??**, *on a alors* $A^T A = I_n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* A *est orthogonale alors pour tout* $x, y \in E$, *notant* $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ *et* $Y = \mathrm{Mat}_e(y)$, *on a :*

$$\big(u(x) \mid u(y)\big) = X^T A^T A Y = X^T Y = (x \mid y)$$

toujours d'après la proposition **??**. *Et donc d'après la proposition* **??**, u *est une isométrie vectorielle de* E.

Remarque 10.12 Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale.

Remarque 10.13 Dans le programme officiel, les matrices orthogonales sont définies ainsi. Une matrice est dite orthogonale si et seulement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.
La proposition précédente nous garantie que la définition que nous avons retenu pour les matrices orthogonales est strictement équivalente à celle du programme.

THÉORÈME 10.27 ♡ **Caractérisation des matrices de passage entre bases orthonormales**
Soit e une base orthonormale de E et f une base de E. Soit $P = P_{e \to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases. On a équivalence entre :

1. f est une base orthonormale.
2. P est une matrice orthogonale.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que f est orthonormale. Soit u l'endomorphisme de E donné par :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = f_i.$$

*D'après la proposition **??**, u est un automorphisme orthogonal de E. Mais $\mathrm{P}_{e\to f} = \mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{Mat}_e(u)$ et donc, d'après la dernière proposition, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{e\to f}$ est orthogonale.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *De la même façon, si P est orthogonale, alors il en est de même de u et comme l'image d'une base orthonormale par un élément de $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ est orthonormale, f est orthonormale.*

10.6 Étude du groupe orthogonal

THÉORÈME 10.28 ♡ **Groupe orthogonal d'ordre n**
$(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. Plus précisément c'est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal d'ordre n*.

Démonstration *La preuve est identique à celle du théorème **??**.*

Remarque 10.14 Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Comme $\mathrm{A}.\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n$ et que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$, il vient que : $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$.

DÉFINITION - PROPOSITION 10.14 ♡ **Groupe spécial orthogonal $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$**
Soit une matrice orthogonale $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$. On définit les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{A} = +1\} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{A} = -1\}$$

Les matrices de $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ sont appelées *spéciales orthogonales*. L'ensemble $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$. On le note généralement $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration *On procède à nouveau comme dans la preuve de **??** et on montre que $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe inclus dans le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*

Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 10.15 ♡♡♡ **Déterminant d'une famille de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle *déterminant de la famille x relativement à la base e* de E le scalaire noté $\det_e(x)$ et donné par :

$$\det_e(x) = \det(\mathrm{Mat}_e(x)).$$

⚠ *Attention 10.8* Le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base choisie.

PROPOSITION 10.29 ♡ **Formule de changement de base pour le déterminant d'une famille de vecteurs**
Soient e et e' deux base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n et soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :

$$\boxed{\det_{e'}(x) = \det(\mathrm{P}_{e'\to e}) \det_e(x)}$$

où $\mathrm{P}_{e'\to e}$ est la matrice de passage de la base e à la base e'.

Démonstration *On a*

$$\det_{e'}(x) = \det(\mathrm{Mat}_{e'}(x)) = \det(\mathrm{P}_{e'\to e}\mathrm{Mat}_e(x)) = \det(\mathrm{P}_{e'\to e}) \det(\mathrm{Mat}_e(x)) = \det(\mathrm{P}_{e'\to e}) \det_e(x).$$

Remarque 10.15 Si e et e' sont deux bases orthonormales du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n alors $\mathrm{P}_{e\to e'} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(\mathrm{P}_{e\to e'}) = \pm 1$.

On introduit alors la notion d'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

DÉFINITION 10.16 ♡♡♡
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On dit que *deux bases e et e' ont la même orientation* si et seulement si $\det(\mathrm{P}_{e\to e'}) > 0$. Elles sont d'*orientations contraires* sinon.
2. *Fixer l'orientation* de E revient à fixer une base e de E. Une autre base e' de E est alors dite *directe* si elle a la même orientation que e et elle est dite *indirecte* sinon.
3. *L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$* est l'orientation choisie pour $\mathbb{R}^n$ quand on fixe la base canonique.

DÉFINITION 10.17 ♡ **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ d'un espace euclidien E. Alors $\det(u) = \pm 1$. On dit que u est une *isométrie directe* de E lorsque $\det(u) = +1$, et une isométrie indirecte lorsque $\det(u) = -1$. On note $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ l'ensemble des isométries directes, et $\mathrm{O}^-(\mathrm{E})$ l'ensemble des isométries indirectes de E. L'ensemble $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(\mathrm{E}), \circ)$.

Remarque 10.16 Si ε est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de l'isométrie u dans la base ε, alors

$$u \text{ est une isométrie directe} \iff \mathrm{U} \in \mathrm{O}_n^+(\mathbb{R}).$$

PROPOSITION 10.30 ♡ **Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté est directe si et seulement si elle transforme une base orthonormale directe en une base orthonormale directe**
Soit $(\mathrm{E}, (.\,|\,.))$ un espace euclidien orienté et soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. On a alors équivalence entre :

1. l'endomorphisme u de E est une isométrie directe de E.
2. l'endomorphisme u de E envoie une base orthonormale directe de E sur une base orthonormale directe de E.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Comme u envoie une base orthonormale de E sur une autre, u est une isométrie vectorielle de E. L'espace vectoriel E a été orienté par la choix d'une de ses bases e. Soit f une base orthonormale directe de E envoyée par u sur une base orthonormale f' de E. Alors $\mathrm{Mat}_f(f') = \mathrm{Mat}_f(u) \in \mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ car u est une isométrie directe. Comme f est directe, il vient que $\det(\mathrm{P}_{e\to f}) > 0$ mais alors par propriétés des matrices de changement de base :*

$$\det\left(\mathrm{P}_{e\to f'}\right) = \det\left(\mathrm{P}_{e\to f} \times \mathrm{P}_{f\to f'}\right) = \det\left(\mathrm{P}_{e\to f}\right)\det\left(\mathrm{P}_{f\to f'}\right) = \det\left(\mathrm{P}_{e\to f}\right)$$

car $\det\left(\mathrm{P}_{f\to f'}\right) = 1$. Donc $\det\left(\mathrm{P}_{e\to f'}\right) > 0$ et f' est une base orthonormale directe.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Comme u envoie une base orthonormale f de E sur une autre f', u est une isométrie vectorielle de E. Comme de plus $\mathrm{Mat}_f(f') \in \mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$, on a :*

$$\det(u) = \det\left(\mathrm{Mat}_f(u)\right) = \det\left(\mathrm{Mat}_f(f')\right) = 1$$

et donc u est une isométrie directe.

Remarque 10.17 Dans un espace vectoriel euclidien orienté,

1. une isométrie indirecte transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée indirecte.
2. une isométrie directe transforme une base orthonormée indirecte en une base orthonormée indirecte.

10.6.1 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 2.

THÉORÈME 10.31 ♡ **Etude de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont de la forme
$$\mathrm{R}_\theta = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$
où $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $$\boxed{\mathrm{R}_\theta \times \mathrm{R}_{\theta'} = \mathrm{R}_{\theta+\theta'}}.$$
3. $$\boxed{\mathrm{R}_\theta^{-1} = \mathrm{R}_{-\theta}}.$$
4. L'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{R}_\theta \end{array} \right.$$
est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} & A \in O_2^+(\mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow \quad & AA^T = 1 \quad \text{et} \quad \det A = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \\ ac+bd &= 0 \\ ad-bc &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Des deux premières équations, on tire l'existence de θ *et* $\theta' \in \mathbb{R}$ *tels que :* $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\theta'$ *et* $d = \sin\theta'$. *La quatrième équation devient alors* $\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = 1$ *c'est-à-dire* $\sin(\theta'-\theta) = 1$ *et la troisième devient* $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0$ *c'est-à-dire* $\cos(\theta'-\theta) = 0$. *Il vient alors* $\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$ *et on obtient :*

$$A \in O_2^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

2. *Cette formule est une conséquence directe du premier point et des formules d'addition pour le cosinus et le sinus.*

3. *D'après la formule précédente, on a :* $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$ *donc* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

4. *Soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\varphi(\theta+\theta') = R_{\theta+\theta'} = R_\theta \times R_{\theta'} = \varphi(\theta)\varphi(\theta')$$

donc φ *est bien un morphisme de groupe. On a par ailleurs les équivalences :*

$$\varphi(R_\theta) = I_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\theta &= 1 \\ \sin\theta &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \theta = 0 \ [2\pi]$$

donc $\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 10.18 Comme $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta'} \times R_\theta$, $\boxed{\text{le groupe } SO_2(\mathbb{R}) \text{ est commutatif}}$.

THÉORÈME 10.32 ♡ **La matrice d'une isométrie directe est indépendante de la base orthonormale directe choisie**

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in O^+(E)$ une isométrie directe. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour *toute base orthonormale directe* e de E,

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème* **??**. *On sait que dans une base orthonormale directe* e *de* E, *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\operatorname{Mat}_e(u) = R_\theta \in O_2^+(\mathbb{R})$. *Si* e' *est une autre base orthonormale directe de* E *alors* $P_{e \to e'}, P_{e' \to e} \in O_2^+(\mathbb{R})$ *et comme* $O_2^+(\mathbb{R})$ *est commutatif, on trouve par la formule de changement de base :*

$$\operatorname{Mat}_{e'}(u) = P_{e' \to e} \operatorname{Mat}_e(u) P_{e \to e'} = P_{e' \to e} P_{e \to e'} \operatorname{Mat}_e(u)$$

et donc la matrice de u *est indépendante de la base orthonormale directe choisie.*

COROLLAIRE 10.33 ♡ **Les seules isométries directes d'un espace euclidien de dimension 2 diagonalisables sont** $\pm\mathrm{id}_E$

Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit u une isométrie directe de E alors u n'est pas diagonalisable à moins que $u = \pm\mathrm{id}_E$.

Démonstration *Laissée en exercice. Il faut fixer une orientation de* E *puis calculer le polynôme caractéristique de* u *en utilisant sa matrice dans une base orthonormale directe de* E, *cette dernière étant donnée par la proposition précédente.*

Théorème 10.34 ♡ Angle de deux vecteurs
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(U,V) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls. On définit

$$u = \frac{U}{\|U\|}, \quad v = \frac{V}{\|V\|}.$$

Alors il existe une unique rotation $r \in O_2^+(\mathbb{R})$ telle que $v = r(u)$. Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0, 2\pi[$, on note

$$\widehat{(U,V)} = \theta$$

l'angle orienté des vecteurs (U,V). On a alors dans toute base orthonormale directe e de E :

$$\boxed{\operatorname{Det}_e(U,V) = \|U\| \|V\| \sin\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{(U \mid V) = \|U\| \|V\| \cos\theta}.$$

Démonstration

- Existence: *On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt* **??** *et on complète les vecteurs u et v en deux bases $e = (u, u')$ et $e' = (v, v')$ orthonormales directes du plan. D'après la proposition* **??**, *la matrice de passage A de e à e' est orthogonale. Comme les bases sont directes, on a de plus $\det A = 1$. En résumé : $A \in O_2^+(\mathbb{R})$. Considérons alors l'endomorphisme φ de E tel que $\operatorname{Mat}_{e' \leftarrow e}(\varphi) = A$. D'après la propriété précédente, φ est une rotation du plan. On a de plus $\varphi(u) = v$.*
- Unicité: *Si φ et φ' sont deux rotations du plan envoyant u sur v, alors, avec les notations précédentes, $\varphi(u) = \varphi'(u)$ et comme les rotations conservent le produit scalaire et l'orientation, $\varphi(u') = \varphi'(u')$. Comme les endomorphismes φ et φ' sont égaux sur les vecteurs d'une base de E, ils sont égaux sur E : $\varphi = \varphi'$.*

Enfin, si $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle de la rotation φ, dans la base e les coordonnées de u sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et celles de $v = \varphi(u)$:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

On vérifie alors facilement que

$$\operatorname{Det}(U,V) = \|U\| \|V\| \operatorname{Det}(u,v) = \|U\| \|V\| \sin\theta$$

et que

$$(U \mid V) = \|U\| \|V\| (u \mid v) = \|U\| \|V\| \cos\theta.$$

Remarque 10.19 On utilise ces formules pour déterminer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1,1)$ et $V = (0,1)$?

Remarque 10.20 Avec les notations du théorème précédent, on a pour tout $x \in E$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(r) = \frac{(x \mid r(x))}{\|x\|^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{\det_e(x, r(x))}{\|x\|^2}}.$$

Théorème 10.35 ♡ Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$
Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in O_2^-(\mathbb{R})$. L'application

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} O_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_2^-(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{array} \right.$$

est une bijection. Toute matrice de $O_2^-(\mathbb{R})$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Démonstration *Laissée en exercice au lecteur.*

Corollaire 10.36 ♡ Les isométries indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 sont diagonalisables et de spectre $\{\pm 1\}$
Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit u une isométrie indirecte de E alors u est diagonalisable et ses valeurs propres sont ± 1.

Démonstration *Laissée en exercice.*

THÉORÈME 10.37 ♡ **Isométries indirectes et réflexions**
Une isométrie indirecte d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, c'est-à-dire une *réflexion*.

Démonstration *Soit u un isométrie indirecte de* E. *On sait que comme* $\mathrm{Sp}(u) = \{\pm 1\}$ *donc* $\mathrm{E} = \mathrm{E}(-1) \oplus \mathrm{E}(1)$. *De plus, si* $(x, y) \in \mathrm{E}(-1) \times \mathrm{E}(1)$ *alors* $\left(x \mid y\right) = \left(u(x) \mid u(y)\right) = \left(-x \mid y\right) = -\left(x \mid y\right)$ *et donc* $\left(x \mid y\right) = 0$. *Alors* $\mathrm{E}(-1)$ *et* $\mathrm{E}(1)$ *sont orthogonaux et on peut écrire* $\mathrm{E} = \mathrm{E}(-1) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{E}(1)$. *Dans une base de* E *adaptée à cette supplémentarité, la matrice de u est* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et on reconnaît que u est une réflexion. Comme* $\mathrm{E}(-1)$ *et* $\mathrm{E}(1)$ *sont orthogonaux, u est une réflexion orthogonale.*
On propose une seconde preuve plus calculatoire.
La matrice d'une isométrie indirecte u dans une base orthonormale $e = (e_1, e_2)$ étant de la forme $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ *et cette matrice vérifiant* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_2$, *on en déduit que u est une symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$. *Déterminons* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$. *On a, dans la base e :*

$$\begin{aligned}
& \mathrm{U} = xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}) \\
\iff & \begin{cases} (\cos\alpha - 1)\,x + \sin\alpha\; y = 0 \\ \sin\alpha\; x - (\cos\alpha + 1)\,y = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\; x - \cos\frac{\alpha}{2}\; y\right) = 0 \\ \cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\; x - \cos\frac{\alpha}{2}\; y\right) = 0 \end{cases} \\
\iff & \sin\frac{\alpha}{2}\; x - \cos\frac{\alpha}{2}\; y = 0
\end{aligned}$$

car on ne peut avoir en même temps $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ *et* $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$. *On en déduit que* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *est la droite vectorielle d'équation polaire* $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

On montrerait de même que $\mathrm{U} = xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$ *si et seulement si* $\sin\frac{\alpha}{2}\; x + \cos\frac{\alpha}{2}\; y = 0$. *Les deux droites vectorielles* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$ *sont bien orthogonales et u est une réflexion du plan.*

THÉORÈME 10.38 ♡ **Décomposition des rotations**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

1. Toute rotation de E s'écrit comme composée de deux réflexions.
2. Réciproquement, tout produit de réflexions est une rotation.

Démonstration

1. *Soit r une rotation et s une réflexion de* E. *Posons* $t = s^{-1} \circ r$. *t est une isométrie de* E *et* $\det t = \det\left(s^{-1}\right)\det u = -1$, *donc t est indirecte. En vertu de la proposition* **??**, *t est une réflexion et $r = s \circ t$ est bien la composée de deux réflexions.*
2. *Réciproquement, si s et t sont deux réflexions de* E *alors $s \circ t$ est une isométrie directe de* E, *c'est-à-dire une rotation.*

Remarque 10.21 Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathrm{E}_2)$. Toute isométrie de E_2 s'écrit comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

On tire de l'étude précédente les théorèmes de classification suivants :

PLAN 10.2 : Classification des isométries d'un espace euclidien de dimension 2 par l'ensemble des vecteurs fixes

Soient $(\mathrm{E}, (.\mid.))$ *un espace euclidien de dimension* 2 *et soit* $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$. *On note* $\mathrm{Fix}(u) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = x\} = \mathrm{E}(1)$.

1. *Si* $\dim \mathrm{Fix}(u) = 0$ *alors u est une rotation de* E *différente de* id_E.
2. *Si* $\dim \mathrm{Fix}(u) = 1$ *alors u est une réflexion de* E.
3. *Si* $\dim \mathrm{Fix}(u) = 2$ *alors* $u = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

PLAN 10.3 : Classification des isométries d'un espace euclidien de dimension 2 par les valeurs propres

Soient $(\mathrm{E}, (.\mid.))$ *un espace euclidien de dimension* 2 *et soit* $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

1. *Si* $\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$ *alors u est une rotation de* E *différente de* $\pm\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$.
2. *Si* $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$ *alors* $u = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.
3. *Si* $\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$ *alors* $u = -\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$.
4. *Si* $\mathrm{Sp}(u) = \{\pm 1\}$ *alors u est une réflexion de* E.

10.6.2 Etude du groupe orthogonal en dimension 3 HORS PROGRAMME

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 3.

Produit mixte, produit vectoriel

PROPOSITION 10.39 **Déterminant dans une base orthonormale directe**
Soit u, v, w trois vecteurs. Le déterminant de ces trois vecteurs exprimé dans une base orthonormale directe ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

Démonstration *On utilise la formule de changement de base :*

$$\det_{e'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{e'}(e_1,\dots,e_n) \times \det_{e}(x_1,\dots,x_n).$$

La matrice de passage $P_{e'\leftarrow e}$ de e vers e' est donc aussi la matrice dans la base e de l'endomorphisme qui transforme e en e', donc qui transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. C'est donc une matrice de $O^+(E)$. Elle a donc un déterminant égal à 1. Donc $\det_{e'}(x_1,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,x_n)$. Ce qu'il fallait vérifier.

La propriété précédente permet d'énoncer la

DÉFINITION 10.18 ♡ **Produit mixte**
Soient u, v, w trois vecteurs. On appelle produit mixte de (u, v, w) le déterminant de (u, v, w) exprimé dans une base orthonormée directe. On le note $[u, v, w]$.

Les propriétés du determinant permettent d'énoncer :

PROPOSITION 10.40 ♡ **Propriétés du produit mixte**
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $[u, v, w] \neq 0$ si et seulement si (u, v, w) est une base de E.
2. $[u, v, w] = -[v, u, w]$.
3. $w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $\forall w \in E, [u, v, w] = (x \mid w)$. D'où la définition :

DÉFINITION 10.19 ♡ **Produit vectoriel**
Soit u et v deux vecteurs. On appelle produit vectoriel de u et v l'unique vecteur noté $u \wedge v$ vérifiant $\forall w \in E, [u, v, w] = (u \wedge v \mid w)$.

Les propriétés du produit mixte permettent d'établir

PROPOSITION 10.41 ♡ **Propriétés du produit vectoriel**
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ et $u \wedge u = 0$.
2. $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$.
3. $u \wedge v = 0$ si et seulement si (u, v) est liée.

ainsi que

PROPOSITION 10.42 ♡ **Expression du produit vectoriel dans une base orthonormale directe**
Soit (i, j, k) une base orthonormale *directe* de E. on a
- $i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j,$

et si $u(x_1, y_1, z_1)$ et $v(x_2, y_2, z_2)$, alors $u \wedge v(L, M, N)$ avec

$$L = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Sous-espaces stables

LEMME 10.43
Soit u une isométrie de E. Il existe un vecteur non nul $\varepsilon \in E$ tel que soit $u(\varepsilon) = \varepsilon$, soit $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.

Démonstration *Intéressons nous au polynôme* $P(X) = \det(u - X\,\mathrm{id}) = 0$ *et montrons que* 1 *ou* -1 *est une de ses racines.* P *est un polynôme à coefficients réels de degré* 3 *et le coefficient de son terme dominant est* -1. *Il vérifie donc* $\lim_{X\to-\infty} P = +\infty$ *et* $\lim_{X\to+\infty} P = -\infty$. P *est de plus continue sur* $\mathbb{R}$. *D'après le théorème des valeurs intermédiaires,* P *admet une racine réelle* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On a alors* $\det(u - \alpha\,\mathrm{id}) = 0$ *et* $\mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{id})$ *n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe donc un vecteur non nul* $\varepsilon \in E$ *tel que* $u(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$. *Mais u étant une isométrie, il vient :* $\|u(\varepsilon)\| = |\alpha|\,\|\varepsilon\| = \|\varepsilon\|$ *et donc* $\alpha = \pm 1$. *On a ainsi prouvé l'existence d'un vecteur* $\varepsilon \in E$ *tel que* $u(\varepsilon) = \varepsilon$ *ou* $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.

LEMME 10.44
Soit u une isométrie de E et soit $\varepsilon \in E$ un vecteur non nul tel que $u(\varepsilon) = \pm\varepsilon$. Considérons $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon)$ et soit H le supplémentaire orthogonale à D. Alors :

1. H est un plan vectoriel.
2. $u(H) \subset H$.
3. La restriction du produit scalaire de E à H est un produit scalaire sur H et pour ce produit scalaire, $u_{|H}$ est une isométrie de H.

Démonstration

1. *Comme* $\dim E = 3$, *que* $\dim D = 1$ *et que* H *et* D *sont supplémentaires dans* E, *il est clair que* $\dim H = 2$.
2. *u étant une isométrie, elle préserve le produit scalaire et si* $x \in H$ *alors*
$$(u(x) \mid \varepsilon) = \pm(u(x) \mid u(\varepsilon)) = \pm(x \mid \varepsilon) = 0$$
car H *et* D *sont des sous-espaces orthogonaux et* $u(H) \subset H$.
3. *Il est clair que la restriction du produit scalaire de* E *à* H *est un produit scalaire sur* H. *Notons* $(\cdot \mid \cdot)_{|H}$ *ce produit scalaire sur* H. *Pour tout* $x, y \in H$, *on a :*
$$\left(u_{|H}(x) \mid u_{|H}(y)\right)_{|H} = \left(u(x) \mid u(y)\right) = (x \mid y) = (x \mid y)_{|H}$$
et u est bien une isométrie de H.

Application 10.9 Avec les notations des deux lemmes précédents, considérons $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$. On fixe ainsi une orientation de D et on a encore $u(\varepsilon_3) = \pm\varepsilon_3$. Le vecteur ε_3 induit une orientation du plan H. Considérons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormale directe de H. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de l'espace E. Comme $u_{|H}$ est une isométrie de H, d'après le travail effectué dans le paragraphe **??**, on a deux possibilités pour $u_{|H}$:

- soit c'une réflexion de H par rapport à la droite vectorielle $D_1 = \mathrm{Ker}\left(u_{|H} - \mathrm{id}_H\right) \subset H$ dont un suplémentaire orhogonal dans H est donné par $D_2 = \mathrm{Ker}\left(u_{|H} + \mathrm{id}_H\right) \subset H$. On peut prendre dans ce cas pour ε_1 un vecteur unitaire qui engendre D_1 et pour ε_2 un vecteur unitaire qui engendre D_2 en sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit directe.
- soit c'est une rotation de H d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

On notera A la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par u.

1. $\boxed{\text{Cas 1 : } u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une rotation :}}$ A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation $u_{|H}$ du plan orienté H. On dit que u est une rotation d'angle θ et d'axe orienté D. Si $\theta \neq 0\,[\pi]$, on a : $E(1) = D$ et sinon $u = \mathrm{id}$ et $E(1) = E$.
2. $\boxed{\text{Cas 2 : } u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une réflexion :}}$ Avec les vecteurs ε_2 et ε_3 précédemment construits, on a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
u est alors une réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. De plus $E(1) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.
3. $\boxed{\text{Cas 3 : } u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une rotation :}}$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et u est la composée de la reflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et d'une rotation. Dans ce cas $E(1) = \{0\}$

4 $\boxed{\text{Cas 4 : } u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \text{ et } u_{|\mathrm{H}} \text{ est une réflexion :}}$ Comme dans le second cas, quitte à bien choisir les vecteurs ε_1 et ε_2, la matrice A est de la forme :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

u est alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$. Remarquons que u est aussi une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et d'angle π. Comme dans le premier cas, $\mathrm{E}(1) = \mathrm{D}$.

Remarque 10.22 Au regard des 4 formes précédentes pour la matrice A, u est une isométrie directe dans les cas 1 et 4 et indirecte dans les cas 2 et 3.

Isométries directes

THÉORÈME 10.45 ♡ **Isométries directes en dimension 3 : rotations vectorielles**
Soit une isométrie directe $u \in \mathrm{O}^+(\mathrm{E}_3)$. On note $\mathrm{E}(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u. On a montré que :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_\mathrm{E}$, E(1) est une droite vectorielle $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1 ;
2. Pour toute base orthonormée directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (le troisième vecteur ε_3 dirigeant l'axe et fixé), la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{M}at_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

On dit que u est la *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'angle θ.

Remarque 10.23 L'angle de la rotation dépend du choix du vecteur d. Si l'on choisit $d' = -d$ pour diriger l'axe, l'angle θ est transformé en son opposé.

Remarque 10.24 Ne pas confondre l'angle θ de la rotation avec l'angle entre les vecteurs x et $r(x)$!

PROPOSITION 10.46 **Détermination de l'angle d'une rotation**
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, r une rotation et ε un vecteur unitaire qui dirige l'axe de cette rotation. Ce vecteur ε définit une orientation du plan $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\, d^\perp$ et donc de l'angle θ de r. Soit $x \in \mathrm{H}$:

$$\boxed{r(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . \varepsilon \wedge x}.$$

Démonstration *Si $x = 0$ le résultat est évident. Supposons que $x \neq 0$. On peut, sans perdre en généralité, supposer de plus que x est unitaire. Posons $y = \varepsilon \wedge x$. y est un vecteur orthogonal à ε et est donc élément de H. La famille (x, y, ε) forme une base orthonormale directe de E et la matrice de r dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de x par r est donc le vecteur :

$$r(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . y = \cos\theta . x + \sin\theta . \varepsilon \wedge x.$$

Remarque 10.25 Cette proposition donne un moyen pratique de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation :

PLAN 10.4 : Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation

1. *Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.*
2. *Chercher un vecteur $d \in \mathrm{D}$ unitaire. Il définit une orientation du plan $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(d)^\perp$.*
3. *Déterminer un vecteur $\varepsilon_1 \in \mathrm{P}$, c'est-à-dire vérifiant $(d \mid \varepsilon_1) = 0$.*
4. *Poser $\varepsilon_2 = d \wedge \varepsilon_1$. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ est une base orthonormale directe de l'espace.*

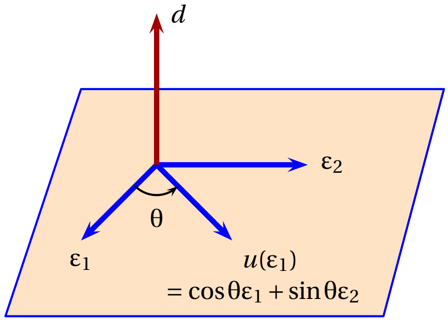

FIGURE 10.5 – Determination de l'angle θ d'une rotation

5. *Calculer $r(\varepsilon_1)$ et le décomposer sur ε_1 et ε_2 :*

$$r(\varepsilon_1) = \cos\theta\varepsilon_1 + \sin\theta\varepsilon_2$$

On en tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et donc l'angle de la rotation.

Remarque 10.26 On peut également utiliser les remarques suivantes pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A dans une base quelconque :

PLAN 10.5 : Pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A

1. *On vérifie que $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ en montrant que la matrice A est orthogonale et que $\det(A) = +1$ (il suffit de comparer a_{11} et Δ_{11}).*
2. *On sait que dans toute base orthogonale directe de la forme $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$,*

$$\mathrm{Mat}_\varepsilon(u) = U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les matrices A et U sont semblables et par conséquent, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U)$ d'où l'on tire

$$\boxed{2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(A)}$$

3. *On détermine l'axe de la rotation en cherchant les vecteurs invariants : $\mathrm{Vect}(d)$ où d est un vecteur unitaire. Cela revient à résoudre un système homogène 3×3.*
4. *On détermine un vecteur ε_1 unitaire orthogonal à d et on calcule*

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)$$

Comme ce produit mixte est indépendant de la base orthonormale directe choisie pour le calculer, en introduisant (sans le calculer) ε_2 tel que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ soit une base orthonormale directe,

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$

5. *On obtient donc :*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)}$$

et l'on en tire l'angle θ de la rotation.

Exemple 10.10 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On va reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques. On flaire une isométrie : On calcule la norme du premier vecteur colonne

$\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(1+2\sqrt{2}+2+2+2-2\sqrt{2}+1)=1$. Itou pour le deuxième $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(2+4+2)=1$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs colonnes égale $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(-\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}+2-\sqrt{2})=0$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs colonnes a pour coordonnées $\frac{2-2(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{-(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, $\frac{2(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2+2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$.
On retrouve bien le troisième vecteur colonne. On a donc une isométrie positive. C'est donc une rotation d'angle θ. Comme la trace égale $\frac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1=1+2\cos\theta$. Donc $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour trouver l'axe, on résout le système $\left\{\begin{array}{rlrlrlcrl}(1+\sqrt{2}) & x & -\sqrt{2} & y & +(\sqrt{2}-1) & z & = & 2\sqrt{2} & x\\ \sqrt{2} & x & +2 & y & -\sqrt{2} & z & = & 2\sqrt{2} & y\\ (\sqrt{2}-1) & x & +\sqrt{2} & y & (1+\sqrt{2}) & z & = & 2\sqrt{2} & z\end{array}\right.$.

Soit $\left\{\begin{array}{rlrlrll}(1-\sqrt{2}) & x & -\sqrt{2} & y & +(\sqrt{2}-1) & z & =0\\ \sqrt{2} & x & +(2-2\sqrt{2}) & y & -\sqrt{2} & z & =0\\ (\sqrt{2}-1) & x & +\sqrt{2} & y & (1-\sqrt{2}) & z & =0\end{array}\right.$. On prend, par exemple, $d=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Le vecteur $j(0,1,0)$ lui est orthogonal et appartient donc au plan de rotation. Son image est $r(j)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$. Enfin $j\wedge r(j)=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}d$. Donc $\sin\theta d=\frac{\sqrt{2}}{2}d$.

Remarque 10.27 Il n'est pas compliqué de comprendre pourquoi c'est $\sin\theta d$ qui est un invariant de la rotation (et pas $\sin\theta$). Le vecteur d oriente le plan de rotation. Pour faire simple, il donne la direction du "haut". En changeant d en $-d$, on intervertit le "haut" et le "bas", on regarde le plan de l'autre côté, et donc on voit la rotation tourner "dans l'autre sens". Ceci a pour effet de changer $\sin\theta$ en son opposé.

Résumons l'étude précédente :

THÉORÈME 10.47 ♡ **Classification des isométries en dimension 3**
Soit un endomorphisme orthogonal $u\in O(E)$. On note $E(1)=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ le sous-espace formé des vecteurs invariants. Selon la dimension de $E(1)$, on a la classification suivante :

$\dim E(1)$	$\det(u)$	$u\in$	Nature de u
3	1	$O^+(E)$	id
2	-1	$O^-(E)$	Réflexion s_H
1	1	$O^+(E)$	Rotation autour d'un axe r (dont les demi-tours)
0	-1	$O^-(E)$	Composée d'une rotation et d'une réflexion

Dans le dernier cas, $u=r\circ s_H$, où le plan H invariant par la réflexion est orthogonal à l'axe de la rotation r.

Remarque 10.28 Si $A\in O_3^-(\mathbb{R})$, alors $\det(-A)=-\det(A)=1$. Donc la matrice $-A$ est spéciale orthogonale. On se ramène à l'étude précédente. On peut également résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :
- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle. (Les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des rotations d'angle π, et on convient que id_E est une rotation d'angle 0) ;
- Isométries indirectes : elles sont de la forme $-r_{D,\theta}$ où $r_{D,\theta}$ est une rotation par rapport à une droite vectorielle D (avec l'identité). On a alors $u=-r_{D,\theta}=r_{D,\theta+\pi}\circ s_{D^\perp}$.

Remarque 10.29 On montre qu'une rotation vectorielle $r_{D,\theta}$ s'écrit comme produit de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H\cap H'=D$. Alors toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de réflexions. Par conséquent, les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_3)$.

10.7 Endomorphismes symétriques

10.7.1 Définition et propriétés

On considère dans ce paragraphe un espace euclidien E.

DÉFINITION 10.20 ♡ **Endomorphisme symétrique**
Soit $u\in\mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme. On dit que u est *symétrique* si et seulement si

$$\forall(x,y)\in E^2,\quad \big(u(x)\mid y\big)=\big(x\mid u(y)\big).$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est noté $\mathscr{S}(E)$.

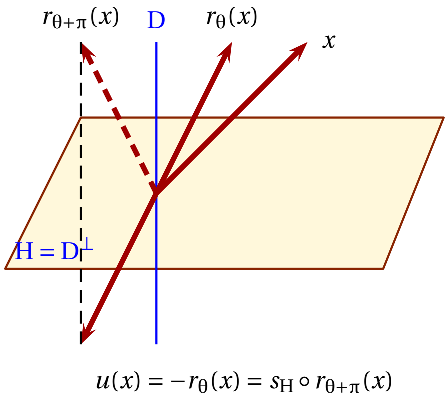

FIGURE 10.6 – Isométrie indirecte avec $\mathrm{E}(1) = \{0_\mathrm{E}\}$

Remarque 10.30 Pour u symétrique, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u)$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\, u$ alors pour tout $y = u(x_0) \in \mathrm{Im}\, u$, on a $\big(x \mid y\big) = (x \mid u(x_0)) = (u(x) \mid x_0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(u)^\perp$ alors pour tout $x_0 \in \mathrm{E}$, on a $0 = (x \mid u(x_0)) = (u(x) \mid x_0)$, donc $u(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, u$. On a montré que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ et donc $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u)$.

THÉORÈME 10.48 ♡ **Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une bon est symétrique**

Soit $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ et soit e *une base orthonormale* de E. On a équivalence entre :

1. u est symétrique ;
2. $\mathrm{Mat}_e(u)$ est symétrique, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{Mat}_e(u)^\mathrm{T} = \mathrm{Mat}_e(u)}.$$

Démonstration *Notons $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ la matrice de u dans la bon e.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si u est symétrique alors pour tout $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big)$ ce qui s'écrit matriciellement d'après la proposition* **??** $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{Y} = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{Y}$ *et toujours d'après cette même proposition, il vient $\mathrm{A}^\mathrm{T} = \mathrm{A}$. Donc A est symétrique.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si A est symétrique alors pour tout $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\big(u(x) \mid y\big) = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{Y} = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{Y} = \big(x \mid u(y)\big)$ où $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_e(y)$. Alors u est symétrique.*

COROLLAIRE 10.49 ♡♡ **Espace des endomorphismes symétriques**

L'ensemble $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ des endomorphismes symétriques est un sous-espace de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'espace des endomorphismes symétriques de E et l'espace des matrices symétriques de taille n.*

THÉORÈME 10.50 ♡ **Caractérisation des projecteurs orthogonaux**

Un endomorphisme $p \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur orthogonal si et seulement si :

1. c'est un projecteur : $p^2 = p$;
2. p est symétrique.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que p est un projecteur orthogonal. Comme p est un projecteur, $p^2 = p$. Comme p est orthogonal, $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, p$. Pour $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, p$, on a alors*

$$\big(p(x) \mid y\big) = \big(x_2 \mid y_1 + y_2\big) = \big(x_2 \mid y_2\big) = \big(x_1 + x_2 \mid y_2\big) = \big(x \mid p(y)\big)$$

et donc p est symétrique.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si $p^2 = p$ alors p est un projecteur et si de plus p est symétrique alors pour tout $(x, y) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$, on a*

$$\big(x \mid y\big) = \big(x \mid p(y)\big) = \big(p(x) \mid y\big) = \big(0 \mid y\big) = 0$$

donc $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux et p est un projecteur orthogonal.

THÉORÈME 10.51 ♡ **Caractérisation des symétries orthogonales**
Un endomorphisme $s \in \mathfrak{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si :

1. c'est une symétrie : $s^2 = \mathrm{id}_E$;
2. s est symétrique.

Démonstration *La démonstration est identique à la précédente.*

10.7.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Dans tout le paragraphe, $(E, (.\,|\,.))$ désigne un espace euclidien.

PROPOSITION 10.52 ♡ **Les valeurs propres d'un endomorphisme symétriques sont réelles**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration *Soit ε une bon de E et $M = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$. Considérons $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$. Il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine complexe de χ_u, c'est une valeur propre complexe de M, donc il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Calculons alors*

$$\overline{X}^T MX = \lambda \overline{X}^T X$$

et en transposant et en conjuguant, on trouve que c'est égal à $\overline{\lambda X}^T X$ ce qui montre puisque $X \neq 0$ que $\lambda = \overline{\lambda}$ donc que $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 10.53 ♡ **Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont en somme directe orthogonale**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

1. Soient deux valeurs propres λ, μ distinctes de u, alors $E(\lambda) \perp E(\mu)$.
2. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E(\lambda)^\perp$ est stable par u.

Démonstration

1. *Soit $x \in E(\lambda)$ et $y \in E(\mu)$,*
$$\lambda\left(x \mid y\right) = \left(u(x) \mid y\right) = \left(x \mid u(y)\right) = \left(x \mid u(y)\right) = \mu\left(x \mid y\right)$$
Par conséquent,
$$(\lambda - \mu)\left(x \mid y\right) = 0$$
d'où $\left(x \mid y\right) = 0$.
2. *Soit $x \in E(\lambda)^\perp$ et soit $y \in E(\lambda)$. Alors*
$$\left(u(x) \mid y\right) = \left(x \mid u(y)\right) = \left(x \mid \lambda y\right) = \lambda\left(x \mid y\right) = 0$$
car $E(\lambda)$ est stable par u. Donc $E(\lambda)^\perp$ est stable par u.

THÉORÈME 10.54 ♡♡♡ **Théorème spectral**
Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

1. u est diagonalisable ;
2. Il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.
3. L'espace est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

Démonstration *On note $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_u(\lambda)$ la somme directe des sous-espaces propres de u. On sait que cette somme est directe orthogonale et que F est stable pour u. Alors $F^\perp$ est aussi stable pour u (en effet, si $x \in F^\perp$ et si $x' \in F$ alors $x' = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$ et $\langle u(x) | x' \rangle = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \langle u(x) | x_\lambda \rangle = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \langle x | u(x_\lambda) \rangle = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \langle x | x_\lambda \rangle = 0)$. Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors la restriction de u à $F^\perp$ est symétrique et admet au moins une valeur propre λ. Si x est un vecteur propre associé alors $x \neq 0$ et $x \in E_u(\lambda)$. Alors $x \in F \cap F^\perp = \{0\}$ et $x = 0$ ce qui est absurde. Donc $F^\perp = \{0\}$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_u(\lambda)$. Alors u est diagonalisable. En choisissant enfin une base orthonormale de chacun des sous-espaces propres on construit une base orthonormale de vecteurs propres de u.*

THÉORÈME 10.55 ♡♡♡ Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique réelle*. Alors :

1. A est diagonalisable ;
2. Il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{T}$$

Démonstration *Soit e une bas orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$, on définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrice A dans la base e. Comme A est symétrique, u est symétrique. Par conséquent, il existe une base ε orthonormale formée de vecteurs propres de u. En notant P la matrice de passage entre la base e et la base ε, comme ces deux bases sont orthonormales, P est une matrice orthogonale et il existe $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^{T}$.*

Remarque 10.31 Attention, une matrice symétrique à coefficients complexes peut ne pas être diagonalisable : par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A et si $e = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$ alors $u(e_2 - ie_1) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(u)$ et $e_2 - ie_1 \in E(0)$. Comme $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$, $\mathrm{Sp}(u) = 0$ et si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle ce qui n'est évidemment pas le cas pour des problèmes de rang. Donc A n'est pas diagonalisable