Chapitre 7

Séries entières

Table des matières

7.1 Rayon de convergence

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 7.1 ♡ **Série entière**
Soit une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle *série entière* une série de la forme $\sum a_n z^n$ avec $z \in \mathbb{K}$.

Remarque 7.1

1. La suite (a_n) peut n'être définie qu'à partir du rang n_0. On note alors $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$ la série entière correspondante.
2. Si z est fixé, on a affaire avec une série numérique.
3. Un exemple déjà rencontré est la somme géométrique.

Remarque 7.2 Les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions polynomiales :

$$\mathrm{S}_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{cases}$$

Les fonctions polynomiales sont des cas particulier de séries entières.
Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$, on définit la *somme* de la série entière :

$$\mathrm{S} : \begin{cases} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

Une telle fonction S généralise en quelque sorte les fonctions polynomiales et nous verrons qu'elle en partage certaines propriétés de « rigidité ». Pour une série de fonctions $\sum f_n(z)$ quelconque, le domaine de convergence peut être compliqué. Pour une série entière, nous allons voir que le domaine de convergence est très simple.

Exemple 7.1

— Considérons la série entière $\sum z^n$. C'est une série géométrique qui converge pour $|z| < 1$, sa somme est la fonction :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{1-z} \end{array} \right.$$

— La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, est sa somme est la fonction exponentielle :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array} \right.$$

THÉORÈME 7.1 ♡ **Lemme d'Abel**
On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\rho \geqslant 0$. On suppose que :

(H1) la *suite* $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée*.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration *Supposons $\rho \neq 0$ (sinon le résultat est évident). Comme la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n\rho^n| \leqslant M$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| = a_n\rho^n\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leqslant Mk^n$$

où $k = \dfrac{|z|}{\rho} < 1$. On a majoré la série par une série géométrique convergente. D'après le critère de majoration, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

DÉFINITION 7.2 ♡ **Rayon de convergence**
On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des réels positifs $\rho \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n\rho^n)$ soit bornée :

$$\boxed{R = \sup\{\rho \geqslant 0 \mid (a_n\rho^n) \text{ est bornée }\}}$$

Remarque 7.3

1. La rayon de convergence d'une série entière est bien défini. En effet, si $\mathscr{A} = \left\{\rho \geqslant 0 \mid (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\right\}$ alors comme $0 \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ est non vide. Si A est majoré alors il possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Si $\mathscr{A}$ n'est pas majoré, sa borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $+\infty$.
2. Si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors $\forall \rho < R$, $a_n\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Si $R \in \overline{\mathbb{R}}$ est la borne supérieure de $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités 0 et R fermé en 0. En effet, si ρ_1, $\rho_2 \in \mathscr{A}$, $\rho_1 < \rho_2$ alors tout élément $\rho \in \left[\rho_1, \rho_2\right]$ est encore élément de A.

Exemple 7.2

— La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet $\left(\rho^n\right)$ est bornée si et seulement si $\rho \leqslant 1$.

— Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet, $n^\alpha\rho^n = \frac{n^\alpha}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $1/\rho > 1$ car $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n)$ si $a > 1$. Donc la suite $\left(n^\alpha\rho^n\right)$ est bien bornée si $\rho < 1$. Par ailleurs, si $\rho > 1$ alors $n^\alpha\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $R = 1$.

— La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. En effet, pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $R = +\infty$.

— La série entière $\sum n! z^n$ a pour rayon de convergence $R = 0$. En effet, $n!\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ donc $R = 0$.

THÉORÈME 7.2 ♡ **Disque de convergence**
Si R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$,

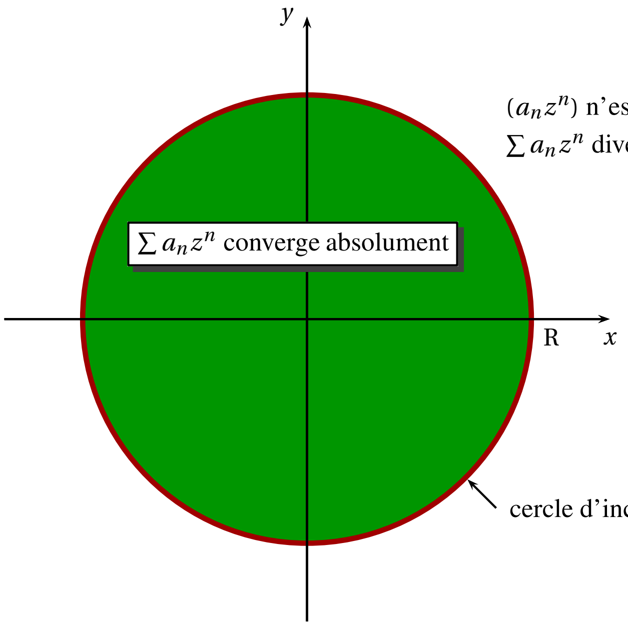
1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
3. Pour $|z| = R$, on ne peut rien dire en général.

Le disque ouvert $D(0, R)$ s'appelle le *disque de convergence* de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle d'incertitude* de la série entière.

Démonstration

1. *Le premier point est une conséquence directe du lemme d'Abel.*
2. *Le second aussi. En effet si $|z| > R$ alors $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée, ainsi que la suite $(a_n z^n)$. Donc la série diverge grossièrement.*



Remarque 7.4

— Si l'on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$. En effet, $(a_n z_0^n)$ tend vers 0 et est donc bornée. Donc $R \geqslant |z_0|$

— Si l'on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$. En effet, si $R > |z_0|$ alors $\sum a_n z_0^n$ converge. En considérant la contraposée, on obtient que si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.

— Si pour $z_0 \neq 0$, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $R = |z_0|$. En effet, on sait d'après le premier point que $R \geqslant |z_0|$. Pour tout $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Comme ce n'est pas le cas pour $z = z_0$, il vient que $R \leqslant |z_0|$. Donc $R = |z_0|$.

Exemple 7.3 Les exemples suivants montrent qu'on ne peut rien dire en général sur la convergence en un point du cercle d'incertitude :

1. $\sum z^n$: $R = 1$ et la série diverge sur le cercle d'incertitude. Voir le cours de première année.
2. $\sum \dfrac{z^n}{n}$: $R = 1$. La série converge pour tout z sur le cercle d'incertitude, sauf pour $z = 1$. En effet, si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, la convergence de la série est une conséquence de l'exercice **??** page **??**. Si $z = 1$, on reconnaît la série harmonique qui est divergente.
3. $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$: $R = 1$. La série converge pour tout z sur le cercle d'incertitude. En effet, pour $|z| = 1$, on a $\sum \dfrac{|z|^n}{n^2} = \sum \dfrac{1}{n^2}$.

DÉFINITION 7.3 ♡ **Somme d'une série entière**

On appelle *somme* de la série entière $\sum a_n z^n$, la fonction

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

THÉORÈME 7.3 ♡ **Modes de convergence d'une série entière[Hors programme en PC]**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Alors, la série de fonctions $\sum f_n$ (où $f_n(z) = a_n z^n$) :

1. converge *absolument* sur le disque de convergence $D(0,R)$;
2. converge *normalement sur tout compact* K inclus dans le disque de convergence (en pratique, sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ avec $r < R$).

Démonstration

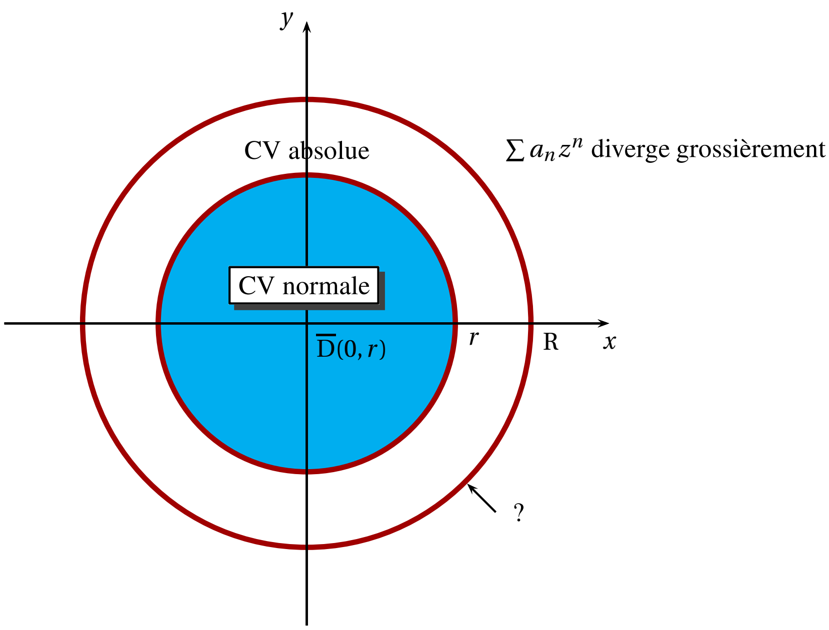
1. *Voir le théorème 7.2.*
2. *Soit un compact $K \subset D(0,R)$, puisque $z \mapsto |z|$ est continue sur le compact K, elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $r \in [0,R[$ tel que*

$$K \subset \overline{B}(0,r) \subset B(0,R)$$

Comme $r < R$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge. Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{z\in K} |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$$

donc la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,K}$ converge.



COROLLAIRE 7.4 **Continuité de la somme**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction somme S est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

Démonstration *[Preuve admise en PC] Considérons $0 < r < R$. Posons $f_n(z) = a_n z^n$. Chaque fonction f_n est continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,r)$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur ce disque fermé. D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction S est continue sur $\overline{D}(0,r)$. Par conséquent, elle est continue sur $D(0,R)$.*

7.2 Calcul du rayon de convergence

THÉORÈME 7.5 ♡ **Comparaison des rayons**
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que :

H1 À partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$.

Alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration *Soit $z \in D(0,R_b)$. On sait que la série $\sum |b_n||z|^n$ converge. Par critère d'inégalité sur séries à terme général positif, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc $z \in D(0,R_a)$. On a montré que $D(0,R_b) \subset D(0,R_a)$ et donc que $R_b \leqslant R_a$.*

COROLLAIRE 7.6 ♡♡ **Utilisation de la domination**
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que

(H1) $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n)$.

Alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration *Il existe* $M > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geqslant N, \quad |a_n| \leqslant M|b_n|$$

Montrons que $D(0,R_b) \subset D(0,R_a)$. *Soit* $z \in D(0,R_b)$. *On sait que la série numérique* $\sum b_n z^n$ *converge absolument. Par comparaison, la série* $\sum a_n z^n$ *converge également absolument ce qui montre que* $z \in D(0,R_a)$.

THÉORÈME 7.7 ♡ **Utilisation des équivalents**
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que :

(H1) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$.

Alors $R_a = R_b$.

Démonstration *Puisque* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n)$ *et* $b_n = \underset{n\to+\infty}{O}(a_n)$. *D'après le corollaire précédent,* $R_a \geqslant R_b$ *et* $R_b \geqslant R_a$ *d'où* $R_a = R_b$.

THÉORÈME 7.8 ♡ **Règle de d'Alembert**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$. Si :

(H1) À partir d'un certain rang N, $a_n \neq 0$.

(H2) $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$;

alors le rayon de convergence de la série entière vaut $R = \dfrac{1}{l}$ (avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).

Démonstration *Soit* $z \in \mathbb{C}^\star$ *et* $n \geqslant N$.

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$$

- *Si* $|z| < \dfrac{1}{l}$, *alors* $l|z| < 1$ *donc d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument. Donc* $z \in \overline{D}(0,R)$ *et* $R \geqslant \frac{1}{l}$.
- *Si* $|z| > \dfrac{1}{l}$, *alors* $l|z| > 1$ *et d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement. Donc* $|z| \geqslant R$ *et* $\frac{1}{l}$.

On en déduit que $R = \dfrac{1}{l}$.

THÉORÈME 7.9 ♡ **Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques**
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ et $\rho > 0$ un réel positif.
- Si la série numérique $\sum |a_n|\rho^n$ converge, alors $R \geqslant \rho$.
- Si la série numérique $\sum |a_n|\rho^n$ diverge, alors $R \leqslant \rho$.

Pour étudier la convergence de la série numérique à termes positifs, on peut utiliser la règle de d'Alembert.

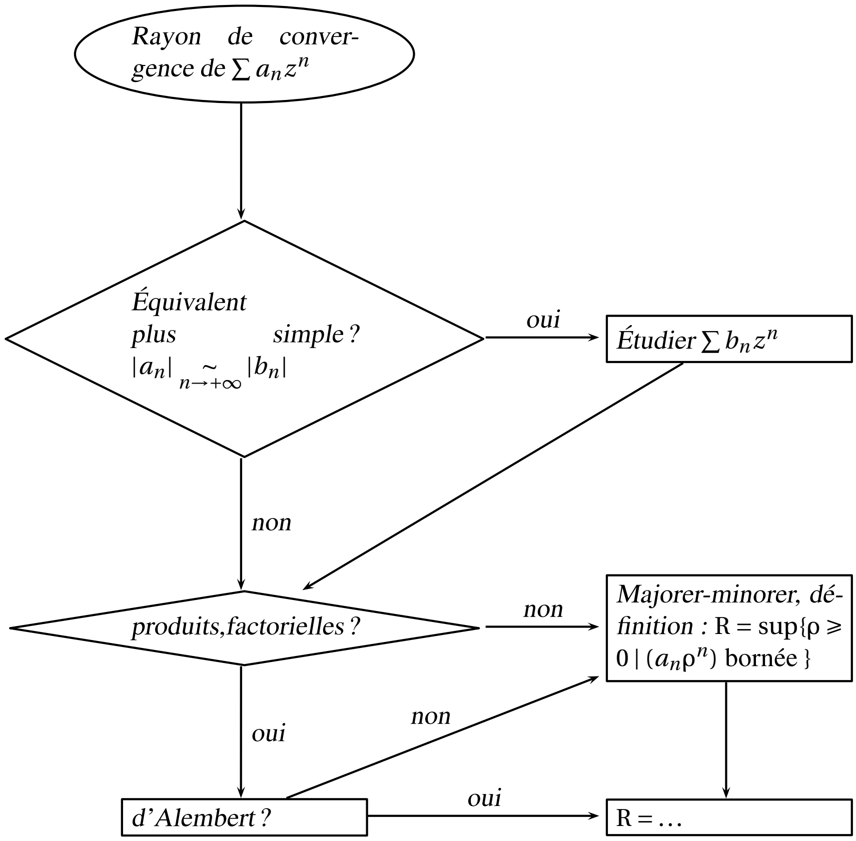
Démonstration
- *Si* $\sum |a_n|\rho^n$ *converge, alors* $(|a_n|\rho^n)$ *est bornée ainsi que* $(|a_n z^n|)$ *pour tout* $z \leqslant \rho$. *Alors* $R \geqslant \rho$.
- *Si* $\rho < R$ *alors* $\sum |a_n|\rho^n$ *converge donc par contraposée, si* $\sum |a_n|\rho^n$ *diverge,* $\rho \geqslant R$.

PLAN 7.1 : Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ *:*

1. *Chercher un équivalent plus simple de* $|a_n|$. *Si* $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, *les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*
2. *Si la suite* (a_n) *ne s'annule pas et si* a_n *est formé de produit, exponentielles, factorielles, essayer la règle de d'Alembert. Si elle ne s'applique pas, on ne peut rien conclure encore !*
3. *Utiliser des majorations-minorations simples de* $|a_n|$.

4 *Utiliser la définition du rayon de convergence. Soit $\rho > 0$. Étudier les valeurs de ρ pour lesquelles la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée.*



Remarque 7.5 On dit d'une série entière qu'elle est *lacunaire* si elle possède une infinité de termes qui s'annulent. Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$ est lacunaire. On ne peut appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières à de telles séries. Par contre, pour cet exemple, si $\rho \in \mathbb{R}_+$, alors $\sum \dfrac{n}{2^n}\rho^{3n}$ est une série numérique à laquelle on peut appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques. On note u_n le terme général de cette série numérique. Si $\rho = 0$ alors $\sum u_n$ est convergente de somme nulle. Sinon, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{2n}\rho^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\rho^3}{2}.$$

Alors :
— si $\rho < \sqrt[3]{2}$, $\sum u_n$ est convergente. Alors $R \geqslant \sqrt[3]{2}$.
— si $\rho > \sqrt[3]{2}$, $\sum u_n$ est divergente. Alors $R \leqslant \sqrt[3]{2}$.

On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$ a pour rayon de convergence $\sqrt[3]{2}$.

7.3 Opérations algébriques sur les séries entières

DÉFINITION 7.4 ♡ **Somme de deux séries entières**
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On appelle *somme* de ces deux séries entières, la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

THÉORÈME 7.10 ♡ **Rayon de convergence d'une somme de séries entières**
On note R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$. On note S_a, S_b et S_{a+b} les fonctions sommes de ces séries entières. Alors :

1. $\boxed{R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)}$.

2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\boxed{S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)}.$$

Démonstration

1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. Donc la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge également absolument ce qui montre que $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$.*
2. *Si par exemple $R_a < R_b$, on sait déjà que $R_{a+b} \geqslant R_a$. Soit $\rho \in]R_a, R_b[$. La série numérique $\sum a_n \rho^n$ diverge car $\rho > R_a$ et la série numérique $\sum b_n \rho^n$ converge puisque $\rho < R_b$. On en déduit que la série numérique $\sum (a_n + b_n)\rho^n$ diverge et donc $R_{a+b} \leqslant R_a$.*
3. *Le troisième point est une conséquence directe de la linéaire de la somme d'une série numérique.*

Remarque 7.6 De même, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, $S_{\lambda a + \mu b}(z) = \lambda S_a(z) + \mu S_b(z)$.

DÉFINITION 7.5 ♡ **Produit de Cauchy de deux séries entières**
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries entières, la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

THÉORÈME 7.11 ♡ **Rayon de convergence du produit de Cauchy**
En notant R_a, R_b et R_{ab} les rayons de convergence des deux séries entières et de leur produit de Cauchy et S_a, S_b et S_{ab} les fonctions sommes,

1. $\boxed{R_{ab} \geqslant \inf(R_a, R_b)}$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\boxed{S_{ab}(z) = S_a(z) \times S_b(z)}$$

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. On sait alors que le produit de Cauchy de ces deux séries converge également absolument. Mais on calcule le produit de Cauchy,*

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

Il vient donc que la série $\sum c_n z^n$ converge absolument et donc que $R_{ab} \geqslant \min(R_a, R_b)$.

COROLLAIRE 7.12 ♡ **Propriété de l'exponentielle complexe**
Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$.

Démonstration *On calcule le produit de Cauchy des deux séries entières.*

DÉFINITION 7.6 ♡ **Série entière dérivée**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$. On appelle *série entière dérivée*, la série entière $\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ ou encore $\sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

THÉORÈME 7.13 ♡ **Rayon de convergence de la série dérivée**
En notant R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et R′ le rayon de convergence de la série entière dérivée, ces deux séries entières ont même rayon de convergence.

$$\boxed{R = R'}.$$

Démonstration

1. $\forall n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n|a_n|$. *Par conséquent,* $R \geqslant R'$.
2. *Soit* $\rho' \geqslant 0$ *tel que* $\rho' < R$. *Il existe* $\rho > 0$ *tel que* $\rho' < \rho < R$ *(même si* $R = +\infty$*). Alors,* $\forall n \geqslant 1$,

$$|na_n\rho'^n| = |a_n\rho^n|\left(n\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n\right)$$

Mais comme $\rho < R$, *la suite* $(a_n\rho^n)$ *est bornée. D'autre part,* $n\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *On en déduit donc que* $na_n\rho'^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc que la suite* $(na_n\rho'^n)$ *est bornée. Par conséquent,* $R' \geqslant \rho'$ *et donc* $R' \geqslant R$.

DÉFINITION 7.7 ♡ **Série entière primitive**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$. On appelle *série entière primitive* la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ou encore $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

THÉORÈME 7.14 ♡ **Rayon de convergence d'une série entière primitive**
En notant R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $\widetilde{R}$ le rayon de convergence de sa série entière primitive,

$$\boxed{R = \widetilde{R}}$$

Démonstration *Utiliser le résultat sur la série dérivée.*

7.4 Séries entières d'une variable réelle

DÉFINITION 7.8 ♡ **Série entière d'une variable réelle**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R son rayon de convergence et on suppose $R > 0$. Pour $x \in]-R, R[$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument. On définit alors la fonction d'une variable réelle :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

THÉORÈME 7.15 ♡ **Une série entière d'une variable réelle converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence**
Soit une série entière $\sum a_n x^n$ d'une variable réelle où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ On note R son rayon de convergence et on suppose $R > 0$. Alors $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Démonstration *Soient* $[a, b] \subset]-R, R[$ *et* $x \in [a, b]$ *alors* $\|a_n x^n\|_{\infty,[a,b]} = |a_n| r^n \leqslant |a_n| r^n$ *où* $r = \max\{|a|, |b|\} < R$. *Donc* $\sum a_n r^n$ *est absolument convergente (car* $r \in D(0, R)$*) et* $\sum a_n z_n$ *est bien normalement convergente sur* $[a, b]$.

⚠ *Attention 7.4* Attention, en général on n'a pas convergence uniforme sur tout le disque de convergence. Par exemple, $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge sur $D(0,1)$. Si la convergence était uniforme sur $D(0,1)$ alors par le théorème de la double limite, comme $-1 \in \overline{D(0,1)}$ et que $x^n \xrightarrow[x\to-1]{} (-1)^n$ alors $\sum(-1)^n$ serait convergente ce qui n'est pas le cas (série grossièrement divergente). Donc la convergence sur $D(0,1)$ n'est pas uniforme.
On peut alors prouver, dans le cas des séries entières d'une variable réelle, la propriété suivante qu'on avait admise dans le cas de la variable complexe.

COROLLAIRE 7.16 ♡ **La somme d'une série entière d'une variable réelle est continue sur son intervalle de convergence**
La série de la variable réelle $f(x) = \sum a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la convergence uniforme de* $\sum f_n$ *sur tout segment de* $]-R, R[$.
On a en fait beaucoup mieux :

THÉORÈME 7.17 ♡ **Régularité de f**
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et soir $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ sa somme.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$.
2. Les séries entières $\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$ ont même rayon de convergence R que $\sum a_n z^n$.
3. $\forall x \in]-R,R[$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

Démonstration *Soit $p \geqslant 1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = a_n x^n$. On a $f = \sum f_n$.*

1. *On sait que la série $\sum f_n$ converge simplement (et même uniformément, et même normalement sur tout segment) vers f sur $I =]-R,R[$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
3. *La série entière $g_k(x) = \sum_{n \geqslant p} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$ admet R comme rayon de convergence. En effet, si $p = 1$, g_1 est la série dérivée de f qui a même rayon de convergence R que f et donc qui est uniformément convergente sur $]-R,R[$. On montre de même que $g_2, \dots, g_p$ admettent R comme rayon de convergence. D'après la proposition précédente, on sait alors que g_p est uniformément convergente sur tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$.*

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et que $f^{(p)} = g_p$. Comme p est quelconque, on a bien prouvé le théorème.

Remarque 7.7 En utilisant les arrangements, la formule précédente pour $f^{(p)}$ s'écrit aussi :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} A_n^p a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{n+p}^p a_{n+p} x^n$$

THÉORÈME 7.18 ♡ **Expression des coefficients à partir de f**
On récupère les coefficients de la série entière à partir des dérivées de f en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème précédent.*

THÉORÈME 7.19 ♡ **Primitive de f**
Pour tout $x \in]-R,R[$, on note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0 et on a l'expression de F comme somme d'une série :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration *Soit $x \in]-R,R[$. Notons $f_n(t) = a_n t^n$.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,x]$.*
2. *D'après le théorème 7.15 , $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,x]$.*

donc d'après le théorème d'échange des symboles de sommation, f est continue et intégrable sur $[0,x]$. De plus

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

7.5 Fonctions développables en série entière

7.5.1 Définitions

DÉFINITION 7.9 ♡ **Fonction DSE**
Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction d'une variable réelle $f : V \mapsto \mathbb{C}$. On dit que la fonction f est *développable en série entière* (DSE) à l'origine s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ *non-nul* et $0 < r < R$ tel que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque 7.8 Si f est définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est DSE au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non-nul $R > 0$ et $0 < r < R$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Cela revient à dire que la fonction translatée $g(x) = f(x_0 + x)$ est DSE au voisinage de 0.

THÉORÈME 7.20 ♡ **Unicité du DSE**
Soit f une fonction développable en série entière sur un voisinage $]-r, r[$ de 0 :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors :

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.
2. $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$.
3. Si $\forall x \in]-r, r[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$
alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Démonstration *C'est une conséquence du théorème 7.17. L'unicité provient de l'égalité $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.*

COROLLAIRE 7.21 ♡ **Utilisation de la parité**
Soit une fonction f DSE sur un voisinage $]-r, r[$ de 0 :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Si f est paire, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.
2. Si f est impaire, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

Démonstration *Il suffit de comparer $f(-x)$ et $f(x)$ puis d'utiliser l'unicité du développement en série entière.*

DÉFINITION 7.10 ♡ **Série de Taylor d'une fonction**
Soit une fonction $f :]-r, r[\mapsto \mathbb{C}$ définie sur un voisinage de 0. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V. On appelle *série de Taylor* de f, la série entière

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n}$$

Remarque 7.9

— Si f est DSE, alors sa série de Taylor a un rayon de convergence $R > 0$.
— La réciproque est fausse : il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont pas DSE comme le montre l'exemple

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On montre que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. La série de Taylor de f est la série nulle qui a un rayon de convergence $R = \infty$ mais pourtant f n'est pas DSE.

THÉORÈME 7.22 ♡ **Opérations sur les DSE**
Soient deux fonctions f, g DSE au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ et deux séries entières telles que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

2. La fonction fg est DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \quad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) x^n$$

3. Les dérivées successives de f sont DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

4. Les primitives successives de f qui s'annulent en 0 sont DSE

$$\forall x \in]-r, r[, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration *On note $R_a > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et S_a sa somme. De même, on note $R_b > 0$ celui de $\sum b_n z^n$ et S_b sa somme. On a $r \leqslant \min(R_a, R_b)$.*

1. *D'après le théorème 7.10, $\sum (\lambda a_n + \beta b_n) z^n$ est convergente sur un disque de rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et si $S_{\lambda a+\beta b}$ est sa somme, alors $S_{\lambda a+\beta b} = \lambda S_a + \beta S_b$. Donc pour tout $x \in]-r, r[$, $S_{\lambda a+\beta b}(x) = \lambda S_a(x) + \beta S_b(x)$ ce qui s'écrit aussi $\big(\lambda f + \beta g\big)(x) = \lambda f(x) + \beta g(x)$.*
2. *On fait de même en utilisant le théorème 7.11*
3. *De même avec le théorème 7.17*
4. *et avec le théorème 7.19.*

7.5.2 DSE usuels

Du théorème d'opérations sur les DSE, on déduit les DSE usuels suivants :

$\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=1+x+x^2+\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\dfrac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=k-1}^{+\infty}\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}x^{n-k+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n+k-1}{k-1}x^n$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$
$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$

$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots$	$R=\infty$	$I=\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots$	$R=\infty$	$I=\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$	$R=\infty$	$I=\mathbb{R}$
$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots$	$R=\infty$	$I=\mathbb{R}$
$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots$	$R=\infty$	$I=\mathbb{R}$

$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots$	$R=1$	$I=]-1,1[$

Remarque 7.10 Par analogie avec les coefficients binomiaux, on note :

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

On obtient alors si $\alpha=-p$,

$$\binom{-p}{n}=\frac{-p(-p-1)\dots(-p-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(n+p-1)(n+p)\dots(p+1)p}{n!}=(-1)^n\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}=(-1)^n\binom{n+p-1}{p-1}$$

ce qui amène

$$\frac{1}{(1-x)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n.$$