Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

Table des matières

6.1 Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions

Dans ce paragraphe, on donne les définitions pour des fonctions $f : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$. On les adapte dans le cas où les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou même dans un evn. Il suffit de remplacer les valeurs absolues par le module ou la norme.

DÉFINITION 6.1 ♡♡♡ **Convergence simple d'une suite de fonctions**
On considère un ensemble non-vide quelconque X et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers une fonction $f : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathrm{X}$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathrm{X},\quad \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} :\quad \forall n \in \mathrm{N},\quad n \geqslant \mathrm{N} \implies \big|f(x) - f_n(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 6.1 Dans cette définition, le rang N dépend de x et ε.

PLAN 6.1 : Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n)

Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n),

1. *Fixer $x \in \mathrm{X}$.*
2. *Étudier la suite $(f_n(x))$.*
3. *Noter $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$*
4. *On définit ainsi une fonction $f : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$, et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvs}} f$.*

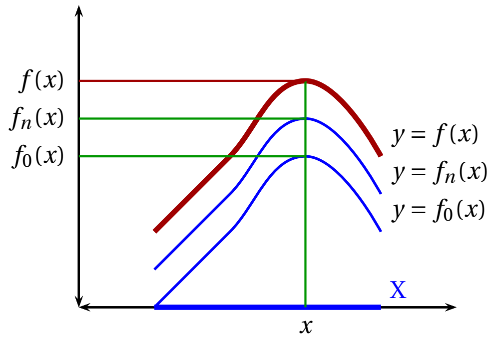


FIGURE 6.1 – Convergence simple d'une suite de fonctions

Exemple 6.1 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

Étudions la convergence simple de (f_n).
Si $x \in [0,1[$ alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $x = 1$ alors $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc (f_n) converge simplement vers

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Remarque 6.2 Si on considère une suite de fonctions (f_n) définies sur I à valeurs réelles qui converge simplement sur I vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, il est naturel de se demander quelles propriétés des f_n passent à la la limite f. Étudions plus précisément le problème de la continuité : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$, qu'en est-il de f ? On a vu dans l'exemple précédent que f n'est pas nécessairement continue sur I. Essayons alors de comprendre quelle(s) hypothèse(s) imposer à (f_n) pour f soit continue sur I. Tentons un calcul : considérons $a \in \mathrm{I}$ et $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathrm{I}$, essayons de majorer $|f(x) - f(a)|$ par ε. Il faut faire intervenir nos hypothèses qui sont la convergence simple de f_n vers f et la continuité des f_n. Ceci nous invite à écrire :

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

On aimerait alors majorer chacun de ces 3 termes par $\varepsilon/3$ pour que leur somme soit plus petite que ε.

1. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I donc il existe $\eta > 0$ qu'on notera $\eta(n)$ car il dépend de la fonction f_n considérée tel que si $x \in \mathrm{I} \cap \left]a - \eta(n), a + \eta(n)\right[$ alors $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon/3$.
2. Comme $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, qu'on notera $\mathrm{N}(x)$ car il dépend de x, tel que $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/3$ si $n \geqslant \mathrm{N}(x)$.
3. On a alors $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/3$ si $n \geqslant \mathrm{N}(a)$.

Afin d'obtenir la majoration souhaitée, il faut donc vérifier les deux « conditions croisées » qui sont « $x \in \mathrm{I} \cap \left]a - \eta(n), a + \eta(n)\right[$ » et « $n \geqslant \mathrm{N}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \left]a - \eta(n), a + \eta(n)\right[$ » et le principal obstacle est dû au fait que le rang N est dépendant de x. Si on suppose que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si on suppose qu'il existe N tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/3$ alors on obtient facilement notre majoration et on sait donc montrer que f est continue en a. Ces considérations nous amènent à la définition suivante.

DÉFINITION 6.2 ♡ **Convergence uniforme d'une suite de fonctions**
On considère un ensemble non-vide quelconque X et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On dit que cette suite de fonctions *converge uniformément* vers une fonction $f : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{E}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant \mathrm{N} \implies \left[\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\right]$$

Remarque 6.3 Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, cela signifie que pour toute bande délimitée par $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$, à partir d'un certain rang, tous les graphes des fonctions f_n se trouvent dans cette bande. Voir la figure 6.2

Remarque 6.4 Il est instructif de comparer les définitions avec quantificateurs de la convergence simple et de la convergence uniforme. Dans le convergence simple, le « N » dépend du x et du ε choisi tandis qu'il ne dépend que du ε dans le cas de la convergence uniforme, voir remarque 6.1.

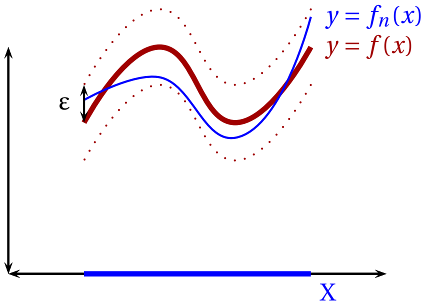


FIGURE 6.2 – Convergence uniforme

PROPOSITION 6.1 ♡ **Caractérisation de la convergence uniforme avec $\|\,\|_\infty$**
Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ si et seulement si :

1. À partir d'un certain rang, les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées.
2. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que (f_n) converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang N, si $n \geqslant N$ alors*

$$\forall x \in I, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

donc à partir d'un certain rang $f_n - f$ est bornée on peut prendre sa norme sup et on a $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On peut alors de plus affirmer que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si à partir d'un certain rang, les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées, alors on peut leur appliquer la norme $\|.\|_\infty$ et comme $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$ alors $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc pour tout $x \in I$, $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que (f_n) converge uniformément vers f.*

Remarque 6.5 Si les fonctions f_n et f sont toutes bornées, pour étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction f, on étudie la suite de réels $\alpha_n = \|f_n - f\|_\infty$. La norme $\|.\|_\infty$ s'appelle la *norme de la convergence uniforme*.

Remarque 6.6 Si (f_n) et f sont des fonctions bornées telles que (f_n) converge uniformément vers f alors

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty.$$

En effet $\left|\|f\|_\infty - \|f_n\|_\infty\right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

THÉORÈME 6.2 ♡♡♡ **CV uniforme $\implies$ CV simple**
Soit une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f, alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvu}} f \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvs}} f$$

Démonstration *C'est immédiat !*

PLAN 6.2 : Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n)

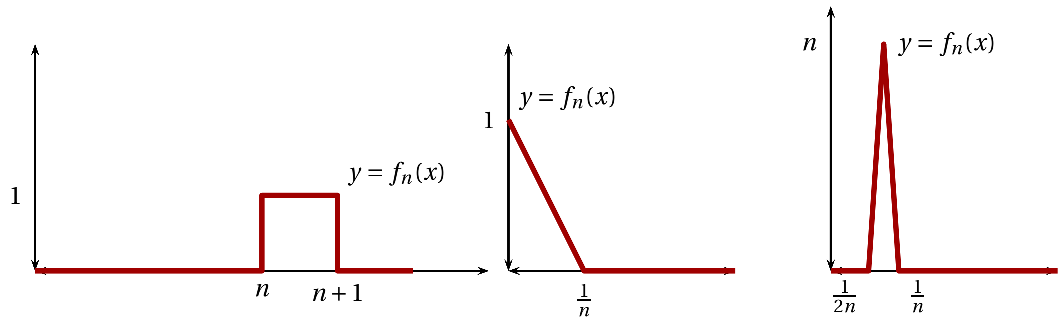
Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n) :

1. *Étudier la convergence simple : fixer $x \in X$ et étudier la limite de la suite numérique $(f_n(x))$.*
2. *Définir la fonction limite simple :*

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{cases}$$

3. *Étudier la convergence uniforme : si la suite de fonctions converge uniformément, ce ne peut être que vers la fonction f.*
4. *Calculer (ou majorer) $\|f_n - f\|_\infty$ et montrer que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Voici trois exemples « graphiques » de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément :



(a) bosse glissante (b) pic rétrécissant (c) pic évanescent

FIGURE 6.3 – Pas de convergence uniforme

1. Dans le premier cas, on montre que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Les fonctions f et f_n sont bornées. De plus $\|f - f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 1 \not\to 0$ donc la convergence n'est pas uniforme.
2. Dans le second cas, on montre que (f_n) converge simplement vers
$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right. .$$
Là encore les fonctions f et f_n sont bornées mais $\|f - f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$.
3. Dans le dernier exemple, montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À partir d'un certain rang ($N = E(1/x) + 1$), on a $1/n < x$ donc $f_n(x) = 0$ et $f(x) = 0$. On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui prouve le résultat. Remarquons que là encore, les fonctions f et f_n sont toutes bornées. Par contre $\|f_n - f\|_\infty = n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la convergence n'est pas uniforme.

Exemple 6.2 On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :
$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x e^{-nx} \end{array}\right.$$
où $\alpha > 0$ est un réel fixé. Étudions la convergence simple et uniforme de cette suite.

1. CV simple. À x fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite converge simplement vers la fonction nulle.
2. CV uniforme. Calculons $\|f_n\|_\infty$ en étudiant les variations de f_n à n fixé.
$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}\left[1 - nx\right]$$
On en déduit que pour tout n, $f_n - f = f_n$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\|f_n\|_\infty = f(1/n) = n^{\alpha-1}e^{-1}$. La suite converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$.

PROPOSITION 6.3 ♡♡ **La limite uniforme de fonctions bornées est bornée**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f : X \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 (f_n) converge uniformément vers f sur X.

H2 Les fonctions (f_n) sont bornées sur X.

Alors la fonction f est bornée sur X.

Démonstration *On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur X alors comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvu}} f$, on sait aussi, d'après la proposition 6.1, que les fonctions $f - f_n$ sont bornées à partir d'un certain rang. Mais $f = (f - f_n) + f_n$ est une somme de fonction bornées sur X et est donc bornée sur X (car les fonctions bornées sur X forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$).*

Remarque 6.7 Ce résultat est faux si on suppose uniquement la convergence simple. Par exemple, la fonction exponentielle n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$, et si l'on définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors ces fonctions sont toutes bornées et la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^x$.

THÉORÈME 6.4 ♡♡♡ **La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue**
Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ et une suite $(f_n) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur X et $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Soit un point $x_0 \in A$. On suppose que :

- (H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue au point x_0.
- (H2) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f.

Alors la fonction f est continue au point x_0.

Démonstration *Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$. Posons $n = N$. Puisque la fonction f_n est continue au point x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in X$, $|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon/3$. Soit alors $x \in X$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$. Majorons :*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \Big|[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + [f_n(x_0) - f(x_0)]\Big| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Remarque 6.8 Ce résultat est faux si l'on suppose uniquement la convergence simple, penser au pic rétrécissant ou à la figure 6.4.

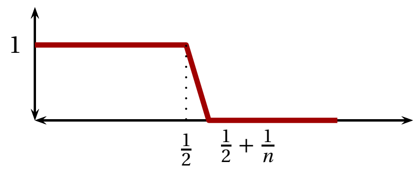


FIGURE 6.4 – La limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue

Remarque 6.9 On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Exemple 6.3 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

Étudions la convergence simple et uniforme de cette suite. On sait, d'après l'exemple 6.1 qu'elle converge simplement vers la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Il n'y a pas convergence uniforme puisque les fonctions f_n sont continues au point 1 mais pas la fonction f.

Remarque 6.10 La continuité est une notion locale, aussi pour qu'une fonction f obtenue comme limite simple d'une suite de fonctions continues (f_n) soit continue en un point de I est-il suffisant d'avoir la convergence uniforme de cette suite sur un segment portant ce point (en dehors de ses extrémités) et inclus dans I. Ainsi, pour prouver la continuité de f sur I, il suffit que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Proposition 6.5 ♡ Pour la convergence uniforme sur tout segment, la limite d'une suite de fonctions continues est continue
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $f : I \mapsto E$. On suppose que :

- (H1) toutes les fonctions f_n sont continues sur I ;
- (H2) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction f est continue sur I.

Démonstration *Soit $x_0 \in I$. Montrons que f est continue au point x_0. On peut trouver un segment $K \subset I$ tel que $x_0 \in K$. Comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cvu}} f$ sur K et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur K alors la fonction f est continue sur K et en particulier au point x_0.*

La proposition suivante est un corollaire immédiat de la proposition 6.1.

Proposition 6.6 ♡ Convergence uniforme sur tout segment
Soit une partie $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Alors la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément sur tout segment* vers la fonction $f : I \mapsto E$ si et seulement si pour tout segment $K = [a,b] \subset I$:

1. À partir d'un certain rang $f - f_n$ est bornée sur K ;
2. $\|f_n - f\|_{\infty,K} = \sup_{x\in K} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque 6.11 En pratique, on ne cherche pas à prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur tout segment de I mais seulement sur une *famille exhaustive de parties de* I, c'est-à-dire une famille $(K_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de parties de I telle que pour tout segment $[a,b]$ de I, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $[a,b] \subset K_\omega$. Souvent, pour la famille $(K_\omega)_{\omega\in\Omega}$, on considère :
- quand $I = \mathbb{R}$, $K_a = [-\alpha,\alpha]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
- quand $I = \mathbb{R}_+^*$, $K_n = [\alpha,+\infty]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 6.4 Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cvs}} f$ où f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On a $f_n(n) = n^2 \sin \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc on ne peut avoir convergence uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$ vers f.
3. Posons $K = [-\alpha,\alpha]$ avec $\alpha > 0$. Alors, en utilisant l'inégalité classique $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$, il vient pour tout $x \in K$,
$$\left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{\left|x^2\right|}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{\alpha}{n}$$
donc $\|f - f_n\|_{\infty,K} \leqslant \frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que f_n converge vers f uniformément sur tout segment $K = [-\alpha,\alpha]$. Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ alors $[a,b] \subset [-\alpha,\alpha]$ avec $\alpha = \max(|a|,|b|)$ et donc on a aussi convergence uniforme de f_n vers f sur $[a,b]$. En conclusion, f_n converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Remarque 6.12 Bien réfléchir à la remarque suivante : c'est une source d'erreurs classiques ! On considère une suite de fonctions (f_n) définies sur un intervalle I et on suppose que cette suite de fonctions converge simplement vers une fonction $f : I \mapsto I$ et que la convergence est uniforme sur tout compact de I.
- On a prouvé que f était continue sur I.
- Il peut ne pas y avoir de convergence uniforme sur I ! Par exemple, si $I = [0,1[$ et $f_n(x) = x^n$, montrer qu'il y a CVU sur tout segment $[a,b] \subset [0,1[$, mais pas CVU sur $[0,1[$.

Toute la fin de cette section est hors programme.

Théorème 6.7 ♡ Double limite HORS PROGRAMME EN PC
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$, et un point adhérent $a \in \overline{A}$. On considère une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et une fonction $f : A \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \in \mathbb{R}$.

(H2) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f.

Alors :

1. La suite numérique (l_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Démonstration

1. *Montrons que la suite (l_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que*
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$$
Soit alors $n \geqslant \mathrm{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathrm{A}$,
$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| = |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_{n+p}(x)]| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$$
Passons à la limite dans les inégalités lorsque $x \to a$:
$$|l_n - l_{n+p}| \leqslant \varepsilon$$
Comme la suite (l_n) est de Cauchy, elle est convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
2. *Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$. Soit $\varepsilon > 0$.*
   - *Comme la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, il existe un rang $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_1$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$.*
   - *Comme la suite (l_n) converge vers l, il existe un rang $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_2$, $|l_n - l| \leqslant \varepsilon/3$.*

   Posons $n = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Puisque $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{A}$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - l_n| \leqslant \varepsilon/3$.
   Soit alors $x \in \mathrm{A}$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$. Majorons :
$$\begin{aligned}|f(x) - l| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - l_n] + [l_n - l]| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \\ &\leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Remarque 6.13 On peut donc sous l'hypothèse de convergence uniforme « intervertir » les limites :
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)$$

Remarque 6.14 Le résultat précédent reste valable pour des limites $l_n = \pm\infty$.

COROLLAIRE 6.8 ♡ **$\mathscr{C}(\mathrm{K})$ est un sev ferme de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{K})$ HORS PROGRAMME EN PC**
Si $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$ est une partie compacte, on considère l'evn $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur K, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Alors l'ensemble $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ des fonctions continues sur K est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{K})$.

Démonstration

1. *Une fonction continue sur un compact est bornée, donc $\mathscr{C}(\mathrm{K}) \subset \mathscr{B}(\mathrm{K})$.*
2. *Soit une suite $(f_n) \in \mathscr{C}(\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in \mathscr{B}(\mathrm{K})$. Puisque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite (f_n) converge uniformément sur K. D'après le théorème précédent, la fonction f est continue sur K, donc $f \in \mathscr{C}(\mathrm{K})$.*

6.2 Intégration sur un segment et convergence uniforme

On a souvent à étudier la limite d'une suite d'intégrales. Par exemple, chercher la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{n^4 + x^4}{(n+x)^4}\,\mathrm{d}x$$
La tentation est grande de dire qu'à x fixé,
$$\frac{n^4 + x^4}{(n+x)^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

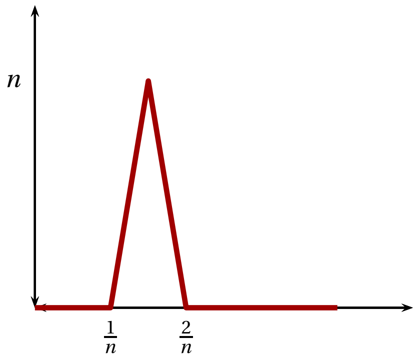


FIGURE 6.5 – Un pic glissant

et « donc » que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$. Ce « raisonnement » peut être faux comme le montre l'exemple suivant. Considérons la suite de fonctions (f_n) continues sur $[0,1]$ définies selon la figure 6.5 :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x$$

En effet, $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$ et on a montré auparavant que (f_n) convergeait simplement (et pas uniformément...) vers la fonction nulle. Donc $\int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x = 0$.

THÉORÈME 6.9 ♡♡♡ **Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues**
On considère une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que

H1 La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sur le segment $[a,b]$.

Alors la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, et

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration *Comme (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, f est continue sur $[a,b]$ et donc intégrable sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant (b-a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Remarque 6.15 Sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut donc inverser limite et intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 6.16 On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Exemple 6.5 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x^n (1-x)\end{array}\right.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire que la convergence n'est pas uniforme.
4. Calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et retrouver le résultat.

Solution :

1. *Si $x = 1$, $f_n(1) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $x \in [0,1[$, la suite géométrique (x^n) converge vers 0 et $x^n = o(n^2)$. Donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle f.*
2. *On calcule $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*
3. *Il ne peut pas y avoir convergence uniforme de (f_n) vers f car alors d'après le théorème précédent, on aurait $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
4. *On étudie les variations de f_n :*
$$f_n'(x) = n^2 x^{n-1}\big[n-(n+1)x\big]$$
et donc
$$\|f_n\|_\infty = f_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \frac{n^2}{n+1}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$$
On a donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et il n'y a pas convergence uniforme.

6.3 Dérivation et convergence uniforme

Une limite uniforme de fonction $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle n'est pas forcément $\mathscr{C}^1$, voir l'exercice **??**. Nous établissons dans cette section une condition suffisante pour que ce soit le cas.

LEMME 6.10 ♡♡♡ **Convergence uniforme des primitives**
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur un segment $\mathrm{K} = [a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction du théorème fondamental (unique primitive de f_n qui s'annule en a) :

$$\mathrm{F}_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur le segment K vers une fonction f, alors la suite de fonctions (F_n) converge uniformément sur K vers la fonction

$$\mathrm{F} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

Démonstration

1. *Puisque les fonctions f_n sont continues et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur K, on sait déjà que f est une fonction continue sur K. Par conséquent, la fonction F est bien définie.*
2. *Pour tout $x \in [a,b]$,*
$$\begin{aligned} |\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}(x)| &= \Big|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (x-a)\|f_n - f\|_{\infty,[a,x]} \\ &\leqslant (b-a)\|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$
Par conséquent,
$$\|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\|_\infty \leqslant 2\mathrm{M}\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
puisque la suite (f_n) converge uniformément vers f sur le segment K. Donc la suite (F_n) converge uniformément sur K vers la fonction F.

On a alors le théorème :

THÉORÈME 6.11 ♡♡♡ **Dérivation et convergence uniforme**
On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f:\mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}$.

H3 La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I vers une application $g:\mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sus tout segment $\mathrm{K}\subset\mathrm{I}$ vers f sur I.
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I
3. $f'=g$.

qui est un cas particulier de :

THÉORÈME 6.12 ♡♡♡ **Dérivation et convergence uniforme sur tout segment**
On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f:\mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}$.

H3 La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur tout segment $\mathrm{K}\subset\mathrm{I}$ vers une application $g:\mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $\mathrm{K}\subset\mathrm{I}$.
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I
3. $f'=g$.

Démonstration *Fixons un point $a\in\mathrm{I}$ et notons pour $n\in\mathbb{N}$, $g_n=f'_n$ et*

$$\mathrm{G}_n:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

On a

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad f_n(x)=f_n(a)+\mathrm{G}_n(x)$$

D'après les hypothèses, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment. D'après le lemme, la suite de fonctions $(\mathrm{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers la fonction G définie par

$$\mathrm{G}(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrons que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(a)+\mathrm{G}$. sur tout segment. Soit un segment $\mathrm{K}\subset\mathrm{I}$ et $x\in\mathrm{I}$,*

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-[f(a)+\mathrm{G}(x)]\right| &= \left|[f_n(a)+\mathrm{G}_n(x)]-[f(a)+\mathrm{G}(x)]\right|\\ &= \left|[\mathrm{G}_n(x)-\mathrm{G}(x)]+[f_n(a)-f(a)]\right|\\ &\leqslant |\mathrm{G}_n(x)-\mathrm{G}(x)|+|f_n(a)-f(a)|\\ &\leqslant \|\mathrm{G}_n-\mathrm{G}\|_{\infty,\mathrm{K}}+|f_n(a)-f(a)|\end{aligned}$$

Par passage à la borne sup, on en déduit que

$$\|f_n-[f(a)+\mathrm{G}]\|_{\infty,\mathrm{K}}\leqslant\|\mathrm{G}_n-\mathrm{G}\|_{\infty,\mathrm{K}}+|f_n(a)-f(a)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

puisque (G_n) converge uniformément vers G et que (f_n) converge simplement vers f.

2. *Puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $\mathrm{G}+f(a)$, elle converge également simplement vers cette fonction. Par unicité de la limite, on en déduit que*

$$f=f(a)+\mathrm{G}$$

3. *Puisque $\forall x\in\mathrm{I},\ f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, d'après le théorème fondamental, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\forall x\in\mathrm{I},\ f'(x)=g(x)$.*

THÉORÈME 6.13 ♡ Généralisation
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I})$;

H2 $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une application f_i ;

H3 la suite de fonctions dérivées kièmes, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément sur* I (resp. *uniformément sur tout segment de* I vers une application g.

Alors :

1. La fonction $f = f_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
2. $f^{(k)} = g$.
3. $\forall i \in [\![0, k]\!]$, la suite de fonction $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f^{(i)}$ sur I (resp. sur tout segment de I).

Démonstration *Par récurrence.*

Remarque 6.17 On retiendra qu'il faut vérifier la *convergence simple* des premières dérivées de f_n, et la *convergence uniforme sur tout segment* de la plus haute dérivée pour pouvoir intervertir dérivée et limite :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$$

6.4 Approximation des fonctions Hors programme en PC

THÉORÈME 6.14 ♡ Approximation sur un segment par des fonctions en escalier
Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$.

Démonstration

THÉORÈME 6.15 ♡ Par des fonctions affines par morceaux
Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions affines par morceaux et continues qui converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$.

Démonstration

THÉORÈME 6.16 ♡ Weierstrass
Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur un segment $[a, b]$. Il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$.

Démonstration

Remarque 6.18 Dans le théorème précédent, le mot *segment* est fondamental.

Exercice 6.4.1 ♡ [redacted]

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Solution : *Pour tout polynôme P, $\int_a^b \mathrm{P}(t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Considérons une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f,*

$$0 = \int_a^b f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $f = 0$.

6.5 Intégration sur un intervalle : théorème de convergence dominée

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ comme sur la figure 6.6 :

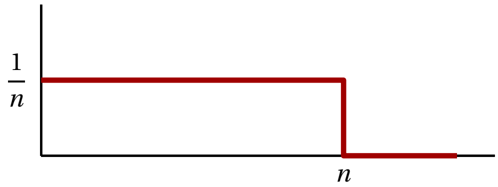


FIGURE 6.6 – Bosse affaissante

Puisque $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$, cette suite de fonctions converge uniformément vers la fonction nulle f sur $[0,+\infty[$. Pourtant,

$$1 = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Dans le cas de l'intégrale généralisée, la convergence uniforme ne suffit pas pour intervertir les limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{\mathrm{I}} \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Il faut une hypothèse de *domination* :

THÉORÈME 6.17 ♡♡♡ Théorème de convergence dominée de Lebesgue
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$. On suppose que :

- H1 $\forall n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
- H2 La suite de fonctions (f_n) converge *simplement* sur I vers une fonction f.
- H3 La fonction f est continue par morceaux sur I.
- H4 **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction $\varphi : \mathrm{I}\mapsto\mathbb{R}$, *indépendante de n* qui est continue par morceaux et *intégrable sur* I telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathrm{I},\quad |f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$$

Alors :

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.
2. La fonction f est intégrable sur I.
3. $\boxed{\int_{\mathrm{I}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Démonstration *Ce résultat est admis. La preuve est hors programme.*

Remarque 6.19 Ce théorème est tellement pratique qu'on s'en sert souvent même si I est un segment : l'hypothèse de domination est souvent plus simple à vérifier que la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

Exemple 6.6 Étudions la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Posons pour $n\geqslant 1$,

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{x^2+1} \end{cases}$$

— $\forall n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathrm{I}=[0,+\infty[$.

— Soit $x\in\mathrm{I}$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{x^2+1}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f : $\begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$.

— La fonction f est continue sur I.

— **Domination :** posons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array} \right.$. La fonction φ est continue, positive et intégrable sur I, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathrm{I}$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

6.6 Modes de convergence d'une série de fonctions

On considère un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On donne les définitions de ce chapitre dans le cas de fonctions $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$, mais on peut généraliser sans problème dans le cas de fonctions $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ ou $f : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{E}$ où E est un evn. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module ou la norme.

DÉFINITION 6.3 ♡ **Série de fonctions**
Soit $(f_n) \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On appelle *série de fonctions de terme général f_n* la suite (S_n) de terme général

$$\mathrm{S}_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right.$$

On note $\sum f_n$ une telle série de fonctions. La fonction S_n s'appelle la *nième somme partielle* de la série $\sum f_n$.

DÉFINITION 6.4 ♡ **Convergence simple d'une série de fonctions**
On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$ fixé, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.
Si $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, on définit alors la fonction

$$\mathrm{S} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

1. La fonction S s'appelle la *somme de la série de fonctions* et est notée $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathrm{S} - \mathrm{S}_n$ s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions et est noté

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

Remarque 6.20 Dire qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I revient à dire que la *suite de fonctions* $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S.

Remarque 6.21 Il se peut qu'une série de fonctions ne converge simplement que sur un sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \mathrm{I}$. On dit alors que D est le domaine de définition de la série de fonctions et on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge sur D.

Exemple 6.7 On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

Étudions la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ et calculons sa somme, ses sommes partielles et son reste d'ordre n.
La série converge simplement sur $]-1,1[$ et la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

ses sommes partielles :

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

et son reste d'ordre n :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

Exemple 6.8 [Fonction ζ de Riemann]On définit la fonction ζ *de Riemann* par :

$$\zeta(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$$

On remarque qu'il s'agit d'une série de Riemann qui converge pour $x > 1$. donc son domaine de définition est $]1, +\infty[$

DÉFINITION 6.5 ♡ **Convergence absolue d'une série de fonctions**
On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge absolument* sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge .

DÉFINITION 6.6 ♡ **Convergence uniforme d'une série de fonctions**
On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément* sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sommes partielles) converge uniformément sur I.

PROPOSITION 6.18 ♡ **CV uniforme $\implies$ CV simple**
$\sum f_n$ CV uniformément vers S sur I $\implies$ $\sum f_n$ CV simplement vers S sur I.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème 6.2 page 3.*

PROPOSITION 6.19 ♡ **Une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions**
Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Démonstration *Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I alors la la suite (S_n) de ses somme partielles converge uniformément vers f et la suite $f_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.*

Remarque 6.22 On se sert souvent de cette proposition pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, il suffit de montrer que la suite numérique $\|f_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0. Comme pour les séries numériques, si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

PROPOSITION 6.20 ♡ **Caractérisation pratique de l'uniforme convergence**
Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

H1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I ;

H2 La suite de fonctions des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Le sens direct est une conséquence de la proposition 6.18 et du fait que, si S est la somme de la série, alors la suite de fonction $R_n = S - S_n$ converge uniformément vers 0.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I et que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = f - R_n$ converge uniformément vers f et donc $\sum f_n$ converge uniformément vers S.*

Remarque 6.23 Il est en général difficile de montrer qu'une série de fonctions converge uniformément, et on le vérifie assez rarement. Si l'on doit le prouver, on utilise la caractérisation précédente. On essaie pour cela de calculer explicitement le reste $R_n(x)$ ou de le majorer-minorer.

Exemple 6.9 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathrm{I} = [1, +\infty]$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx}$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|f_n(x)\right|$ est décroissante et de limite nulle donc par le critère spécial $\sum f_n(x)$ est convergente. Donc $\sum f_n$ est simplement convergente sur I. Par ailleurs, toujours grâce au critère spécial, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n}$$

donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par le critère de convergence uniforme, la série converge uniformément sur I.

DÉFINITION 6.7 ♡♡♡ **Convergence normale**
On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ bornée sur I *converge normalement* sur I, si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$$

converge où $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{I}} |f_n(x)|$.

PROPOSITION 6.21 ♡♡♡ **Caractérisation de la convergence normale, série majorante**
Une série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si et seulement si il existe une suite réelle (a_n) vérifiant les deux conditions suivantes :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leqslant a_n$;

H2 la série $\sum a_n$ converge.

La série $\sum a_n$ est dite être une *série majorante* de la série $\sum f_n$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si $\sum f_n$ converge normalement alors la suite de terme général $a_n = \|f_n\|_\infty$ vérifie les deux conditions.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, soient (a_n) une suite vérifiant les deux hypothèses. Les deux séries $\sum \|f_n\|_\infty$ et $\sum a_n$ sont à termes positifs donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et $\sum f_n$ est normalement convergente.*

THÉORÈME 6.22 ♡♡♡ **Comparaison des modes de convergence**

$$\sum f_n \text{ CV normalement sur I} \implies \begin{cases} \sum f_n & \text{CV uniformément sur I} \\ \sum f_n & \text{CV absolument sur I} \end{cases} \implies \sum f_n \text{ CV simplement sur I.}$$

Démonstration

— *Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I. Alors il existe une série majorante $\sum a_n$ telle que pour tout x in A :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant a_n.$$

Alors la série converge absolument.

— *Si $\sum f_n$ converge absolument alors pour tout $x \in \mathrm{A}$, $\sum f_n(x)$ est une série numérique absolument convergente et donc convergente. Donc $\sum f_n(x)$ converge et $\sum f_n$ est simplement convergente. La convergence absolue d'une série de fonctions implique donc sa convergence simple.*

— *On suppose à nouveau que $\sum f_n$ converge normalement. Elle converge donc absolument et simplement vers une fonction S de A. On utilise les mêmes notations que précédemment. On note aussi (R_n) la suite des restes d'ordre n de $\sum f_n$ et (r_n) celle de $\sum a_n$. Comme les séries $\sum f_n$ et $\sum a_n$ sont absolument convergentes, on sait, d'après la proposition* **??** *page* **??**, *que :*

$$\forall x \in \mathrm{I}, |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_n| = r_n$$

donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant a_n$. Mais $\sum a_n$ est convergente donc $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
et il s'ensuit que $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors d'après la proposition 6.20, $\sum f_n$ converge uniformément.

— *Enfin, on sait avec la proposition 6.18 que la convergence uniforme implique la convergence simple d'une série.*

Remarque 6.24 La convergence normale d'une série est la notion la plus forte qui entraîne les autres. On commence toujours par étudier la convergence normale.

PLAN 6.3 : Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$

Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$:

1. *Commencer par étudier la convergence* normale *: si*
   — $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$,
   — *la série numérique $\sum \alpha_n$ converge,*
   alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément (absolument), donc simplement.
2. *Si on n'arrive pas à montrer la convergence normale, étudier d'abord la convergence simple (ou absolue).*
3. *S'il y a convergence simple, étudier la convergence uniforme :*
   — *La suite de fonctions $\|f_n\|_\infty$ converge-t-elle vers la fonction nulle ? Si ce n'est pas le cas, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.*
   — *Essayer de montrer que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pour cela, majorer-minorer le reste $\mathrm{R}_n(x)$. On peut :*
     — *utiliser une comparaison avec une intégrale,*
     — *utiliser le critère spécial des séries alternées, qui majore $|\mathrm{R}_n(x)|$ par le premier terme négligé,*
     — *majorer la série $\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ en faisant apparaître des séries plus simples (géométriques, ...)*

Exemple 6.10 Étudions les modes de convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx^2)}{n^2}$. On pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n^2}$ et on calcule $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (exemple de Riemann), la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, absolument et simplement.

Exemple 6.11 Étudions les modes de convergence sur $]0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
On pose $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. **convergence normale** : Soit $n \geqslant 1$ fixé. On étudie les variations de f_n, $f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$ et on calcule $\|f_n\|_\infty = f_n(2/\sqrt{n}) = \frac{4}{e^2}$. Puisque la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4}{e^2}$ diverge grossièrement, il n'y a pas convergence normale.
2. **convergence simple** : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque $n^2 f_n(x_0) = n^3 x^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $f_n(x_0) = o(1/n^2)$ et donc, par critère de domination des séries à terme général positif, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge. La série de fonctions converge simplement.
3. **convergence uniforme** : Puisque $\|f_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0, il ne peut y avoir convergence uniforme.
4. **convergence normale sur** $[a,+\infty[$: Soit $a > 0$. On calcule sur $[a,+\infty[$, $\|f_n\|_\infty = f_n(a)$ pour n suffisamment grand. Puisque la série $\sum f_n(a)$ converge (cv simple), il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

6.7 Convergence uniforme et continuité

THÉORÈME 6.23 ♡ **Double limite** **Hors programme en PC**
Soit une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ et un point adhérent $a \in \overline{\mathrm{I}}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \in \mathbb{R}$;

H2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I.

Alors, en notant S la fonction somme de la série,

1. la série numérique $\sum l_n$ converge ;
2. $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$.

Démonstration *Définissons la suite de fonctions sommes partielles :*

$$S_n : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f_n(x) \end{array} \right.$$

On applique le théorème d'inversion de limites pour les suites de fonctions.

Remarque 6.25 Sous hypothèse de convergence uniforme, on peut donc intervertir limite et signe somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Remarque 6.26 On se sert souvent de ce théorème pour justifier qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I.

Exemple 6.12 1On considère la suite de fonctions $\sum \frac{x^n}{1+nx^n}$ sur $I =]0,1[$. Étudions ses modes de convergence.

1. CV simple : soit $x \in]0,1[$ fixé, puisque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$, la série de fonctions converge simplement sur $]0,1[$.
2. On calcule $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{1+n}$ et donc il n'y a pas convergence normale. Par contre, $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. CVU : s'il y avait convergence uniforme, puisque $f_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{1+n}$, d'après le théorème de la double limite, on devrait avoir la série $\sum \frac{1}{1+n}$ qui convergerait, ce qui est faux

THÉORÈME 6.24 ♡ **CV uniforme et continuité**
Soit une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue au point a ;

H2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I.

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue au point a.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème 6.4 page 4 appliquée à la suite des sommes partielles de* $\sum f_n$.

Remarque 6.27 Pour montrer que la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I, il suffit de montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $K \subset I$. Autrement dit, on a le même théorème en remplaçant la deuxième hypothèse par
H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;

Exemple 6.13

a. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$.
b. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
c. Déterminer la limite de S en $+\infty$. Hors programme en PC

Solution :

a. *Il y a cv simple pour $x > 0$. Le domaine de S est donc $]0,+\infty[$.*
b. *Soit $K = [a,b]$, $|f_n(x)| = f_n(x) = e^{x\ln n - nx}$, et $f_n'(x) = e^{x\ln n - nx}(\ln n - n) < 0$. Par conséquent,*

$$\|f_n\|_{\infty,K} = f_n(a) = e^{a\ln n - na}$$

et puisque $\sum \|f_n\|_{\infty,K}$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme sur tout compact. La fonction S est continue sur $]0,+\infty[$.
c. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Puisqu'il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion de limites et donc $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*

Les résultats précédents s'étendent lorsque l'ensemble d'arrivée est un espace vectoriel normé de dimension finie. En particulier,

PROPOSITION 6.25 ♡ **Continuité de l'inverse** **Hors programme en PC**
Soit une algèbre normée de dimension finie unitaire A. On note e l'élément neutre de cette algèbre. On sait que pour tout élément $x \in \mathrm{A}$ tel que $\|x\| < 1$, l'élément $(e-x)$ est inversible et

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

On peut donc définir l'application :

$$i : \begin{cases} \mathrm{B}(0,1) & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ x & \longmapsto & (e-x)^{-1} \end{cases}$$

Cette application est continue.

Démonstration

PROPOSITION 6.26 ♡ **Continuité de l'exponentielle** **Hors programme en PC**
Soit une algèbre normée de dimension finie unitaire A. On sait que pour tout élément $x \in \mathrm{A}$, on peut définir

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

L'application $\exp : \begin{cases} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{cases}$ est continue sur A.

Démonstration

6.8 Intégration sur un segment d'une série de fonctions

THÉORÈME 6.27 ♡ **CV uniforme et intégration, théorème d'intégration terme à terme**
Soit une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a,b]$;

H2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur le segment $[a,b]$.

Alors :

1. La fonction somme $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur le segment $[a,b]$;
2. La série numérique $\sum\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge ;
3. On peut inverser les signes sommes : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème 6.9 page 8 appliquée à la suite des sommes partielles de* $\sum f_n$.

Exemple 6.14 **Série « mirabili » de Johann Bernoulli, 1697**
Montrons que

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Pour $x > 0$, $x^x = e^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln^n x}{n!}$. Posons $f_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^n \ln^n x}{n!} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

En étudiant les variations de $x \mapsto x \ln x$, on voit que $|x \ln x| \leqslant 1/e$ et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{e^n n!}$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$. On peut intervertir les signes sommes :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais on calcule par parties,

$$\mathrm{J}_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p x \,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{J}_{n,p} = -\frac{p}{n+1}\mathrm{J}_{n,p-1}$$

d'où $\mathrm{J}_{n,p} = (-1)^p \dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}}$

$$\int_0^1 x^n \ln^n x \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et le résultat s'ensuit.

Remarque 6.28 Soit une série de fonctions $\sum f_n$ continues par morceaux sur un segment $[a,b]$. On suppose qu'elle converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k(x) + \mathrm{R}_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_a^b \mathrm{R}_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\varepsilon_n}$$

Si $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$

Pour permuter les signes sommes, il suffit de montrer que l'intégrale du reste tend vers 0. Ceci est possible même si la convergence de la série de fonctions n'est pas uniforme.

Exemple 6.15 Montrons que $\forall \alpha > 0$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}.$$

Soit $x \in [0,1[$ fixé. On remarque que

$$\frac{1}{1+x^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^\alpha)^n$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (-x^\alpha)^n$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$. On calcule le reste :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-x^\alpha)^{n+1}}{1+x^\alpha}$$

Cette fonction se prolonge par continuité en 1, et

$$\Big|\int_0^1 \mathrm{R}_n(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha}}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{(n+1)\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+(n+1)\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} (-x^\alpha)^n$ converge et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^\alpha)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$$

6.9 Intégration terme à terme sur un intervalle d'une série de fonctions

THÉORÈME 6.28 ♡ **Interversion des signes sommes sur un intervalle**
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I ;

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ;

H3 La fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.

H4 La série numérique $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ converge.

Alors :

1. La fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I.
2. $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} |f_n|$.
3. On peut permuter les signes sommes :

$$\boxed{\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{I}} f_n \right)}$$

Démonstration *Hors programme.*

Remarque 6.29 La quatrième hypothèse peut aussi s'écrire : « La série numérique $\sum \|f_n\|_1$ converge. »

PLAN 6.4 : Quand utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ?

On veut prouver une égalité de la forme : $\int_{\mathrm{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

1. *Si* I *est un segment, on peut essayer d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, ce qui nécessite la continuité des* f_n *sur* I *ainsi que la convergence uniforme (ou normale) de* $\sum f_n$ *sur* I.
2. *Si on n'arrive pas à prouver cette convergence uniforme ou si* I *n'est pas un segment, on essaye alors d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle. L'hypothèse la plus sensible à vérifier est celle de la convergence de* $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$. *L'autre hypothèse sensible est la continuité par morceaux de la somme* f *de la série* $\sum f_n$. *Rappelons que cette continuité peut être obtenue par convergence uniforme sur tout segment de* I.
3. *Si le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle ne s'applique pas, on peut alors tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite* (S_n) *des sommes partielles de* $\sum f_n$ *ou à la suite des restes* (R_n) *(il suffit de montrer que* $\int_{\mathrm{I}} \lim \mathrm{S}_n = \lim \int_{\mathrm{I}} \mathrm{S}_n$ *ou que* $\lim \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_n = 0$. *Cette dernière limite peut aussi être obtenue directement par majoration, voir le dernier exercice de ce document.*

6.10 Exercices

Exercice 6.10.1 ♡

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solution : *On vérifie tout d'abord que les deux termes de l'égalité sont bien définies.*
On pose $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $t \in \mathrm{I}$, $f(t) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$. *La fonction* f *est prolongeable par continuité en* 0. *De plus* $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-t}$ *et par croissance comparée* $t^2 |f(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{t^2}$. *Donc* $|f(t)| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. *Mais, par critère de Riemann,* $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc par critère d'inégalité sur fonctions intégrables,* f *est intégrable sur* $[1, +\infty[$. *On montre ainsi que* f *est intégrable sur* I *et que le membre de gauche de l'égalité est bien défini.*
Il en est clairement de même du membre de droite par critère de Riemann.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$. Mais pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc en remplaçant x par $e^{-t} \in]0,1[$, il vient

$$f(t) = te^t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{(1-n)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$$

par linéarité de la somme d'une série.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = te^{-nt}$.

1. *Les fonctions f_n sont définies, continues et positives sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc les f_n sont intégrables sur I.*
2. *Comme on vient de le voir, la somme $\sum f_n$ converge simplement vers f.*
3. *La fonction f est continue sur I par opérations.*
4. *Pour $x > 0$, on a par une intégration par parties :*

$$\int_0^x \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{-1}{n}\left[t\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x + \frac{1}{n}\int_0^x \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{n}\left[t\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x - \frac{1}{n^2}\left[\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$$

donc par critère de Riemann, $\sum \|f_n\|_1$ est convergente.

D'après le théorème de permutation des signes sommes sur un intervalle, on en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 6.10.2 ♡

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Solution : *Pour $t > 0$, on remarque que $\sum_{n\geqslant 1} t^2\mathrm{e}^{-nt} = t^2 \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-nt} = t^2 e^{-t} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nt}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nt}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-t} \in]0,1[$ donc convergente de somme $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} t^2\mathrm{e}^{-nt}$ est donc convergente de somme $f(t) = \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$.*

De même, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente par le critère de Riemann.

Posons alors $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f_n(t) = t^2\mathrm{e}^{-nt}$. On a :

- H1 *Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur I et même sur $\mathbb{R}_+$ par opérations. Pour $t \in \mathrm{I}$, $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(1/t^2\right)$. Alors par critère de Riemann et critère de domination pour les fonctions intégrables, f_n est intégrable sur $[1,+\infty]$ et donc sur I.*
- H2 *On a montré juste avant que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur I.*
- H3 *f est continue sur I par opérations.*
- H4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{I}$, en effectuant deux intégrations par parties successives :*

$$\begin{aligned}\int_0^x \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^2\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right]_0^x + \frac{2}{n}\int_0^x t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\left[t^2\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x - \frac{2}{n^2}\left[t\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x + \frac{2}{n^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\left[t^2\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x - \frac{2}{n^2}\left[t\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x - \frac{2}{n^3}\left[\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{n^3}.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{n^3}$. Mais par le critère de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Alors par théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Exercice 6.10.3 ♡

On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} \end{array} \right.$$

et l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *les intégrales* $\mathrm{J}_n = \int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ *sont définies et les calculer.*
2. *Montrer que :* $\forall t \in]0,1[,\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}$.
3. *En déduire que* $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Solution : *Soit* $\mathrm{J} =]0,1]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathrm{J}$, *on pose* $g_n(t) = t^n \ln t$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, g_n *est continue sur* J *par opérations et on a* $\sqrt{t}\,g_n(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ *par croissances comparées donc* $|g_n(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. *Mais, par critère de Riemann,* $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *est intégrable sur* J *donc, par critère de domination sur fonctions intégrables,* g_n *est aussi intégrable sur* J. *De plus, pour* $x \in \mathrm{J}$, *une intégration par parties permet d'écrire :*

$$\int_x^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\ln t\right]_x^1 - \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\ln t\right]_x^1 - \frac{1}{(n+1)^2}\left[t^{n+1}\right]_x^1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{(n+1)^2}$$

donc $\mathrm{J}_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2. *On écrit le DSE de* $t \mapsto \ln(1-t)$ *dont le rayon de convergence est* $\mathrm{R} = 1$. *Pour tout* $t \in]0,1[$, *on a donc :*

$$f(t) = -\frac{\ln(t)}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-t^{n-1}\ln t}{n}.$$

3. *Posons* $\mathrm{K} =]0,1[$ *et pour tout* $t \in \mathrm{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = -\dfrac{t^{n-1}\ln t}{n}$. *On a :*

H1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue sur* K *par opérations et intégrable sur* K *d'après la question 1.*

H2 *D'après la question 2.,* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge simplement sur* K *vers la fonction* f.

H3 f *est continue sur* $\mathbb{K}$ *par opérations.*

H4 *Toujours d'après 1., pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n^3}$ *donc par critère de Riemann, la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Alors par théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, on en déduit que f *est intégrable sur* K *et que de plus :*

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Exercice 6.10.4 ♡

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ *(On montrera au préalable que l'intégrale et la somme sont bien définies).*

Solution : *On note* $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$.

1. *La fonction* $f : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} \end{cases}$ *est continue sur* I *et prolongeable par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 1$. *De plus, pour* $x > 0$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$. *Mais* $x \mapsto e^{-x}$ *est intégrable sur* I *donc par critère d'équivalence pour les fonctions intégrables,* f *est intégrable sur* I.

   Par ailleurs $\dfrac{1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente par critère de Riemann. Donc* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^2+1}$ *est convergente par critère d'équivalence pour les séries à terme général positif.*

2. *H1* *Pour* $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$, *donc la série géométrique de raison* e^{-x} *converge, et on a*

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = e^{-x} \sin x \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sin x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sin(x) e^{-nx}}_{f_n(x)}$$

   La série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement sur l'intervalle* $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ *vers la fonction* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 - e^{-x}}$.

   H2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et même sur* R^+. *De plus,* $|f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \leqslant e^{-x}$. *Donc par critère d'inégalité pour les fonctions intégrables,* f_n *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

   H3 *La fonction* f *est continue par morceaux sur* I.

   H4 *Montrons que la série* $\sum \underbrace{\int_{\mathrm{I}} |f_n|}_{\mathrm{I}_n}$ *converge. Une première majoration ne suffit pas :*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} |\sin(x)| e^{-nx} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

   Le problème vient de 0, *coupons en deux :*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 |\sin(x)| e^{-nx} \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} |\sin(x)| e^{-nx} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x e^{-nx} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-nx}$$

   On calcule par parties le majorant :

$$\mathrm{I}_n \leqslant \frac{1 - e^{-n}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

   Par conséquent, la série $\sum \mathrm{I}_n$ *converge.*

   Par le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, on a le droit d'intervertir les signes sommes, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-nx} \, \mathrm{d}x \right)}_{\mathrm{J}_n}$$

   Et on calcule

$$\mathrm{J}_n = \mathrm{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-n+i)x} \, \mathrm{d}x \right) = \mathrm{Im} \, \frac{1}{n - i} = \frac{1}{n^2 + 1}$$

Remarque 6.30 Il arrive souvent qu'on ne puisse pas appliquer ce théorème. On écrit alors

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S}(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{I}} f_k(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_n(x) \, \mathrm{d}x$$

et il suffit de montrer que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_n(x) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour pouvoir intervertir les signes sommes.

Exercice 6.10.5 ♡

On définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} \text{ et } \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,\mathrm{d}t$$

a. *Déterminer le domaine de définition de* f *et* F *.*

b. *Étudier la continuité de* f *et* F*.*

c. *Trouver* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et un équivalent de* f *au voisinage de* 0*.*

d. *Montrer que* $\mathrm{F} = f$*.*

Solution :

a. $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_\mathrm{F} =]0,+\infty[$ *(f_0 doit être définie, donc $x > 0$).*

b. *Il n'y a pas CV normale puisque* $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$*. Il y a CV uniforme en utilisant le critère des séries alternées :* $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Pour* F*, domination locale sur* $[a,b]$*,* $0 < a < b$ *:*

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$$

avec φ *intégrable sur* $]0,+\infty[$*, donc* F *est continue.*

c. $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et puisqu'il y a convergence uniforme,* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*. En* 0*, penser à sortir le premier terme :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$$

Pour $n \geqslant 1$*,* $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*, donc comme il y a convergence uniforme,* $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$*. Par conséquent,* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *et tend vers* $+\infty$*.*

d. *Soit* $x > 0$ ***fixé****. Essayons le théorème précédent :* $h_n(t) = \dfrac{(-1)^n e^{-(n+x)t}}{\sqrt{t}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(-n+x)t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t =$ $\dfrac{\pi}{\sqrt{n+x}}$ *par le changement de variables* $u = \sqrt{(n+x)t}$*. La série des intégrales n'est donc pas convergente. Considérons le reste*

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-(n+x)t}}{\sqrt{t}}$$

C'est une série alternée pour $t > 0$*, et donc*

$$|\mathrm{R}_n(t)| \leqslant \frac{e^{-(n+1+x)t}}{\sqrt{t}}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} |\mathrm{R}_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1+x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{n+1+x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut donc permuter les signes sommes :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = f(x)$$

6.11 Dérivation d'une série de fonctions

THÉORÈME 6.29 ♡ **CV uniforme et dérivation, théorème de dérivation terme à terme**
Soit un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I.

(H2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur I.

(H3) La série de fonctions $\sum f'_n$ converge *uniformément* sur I

Alors :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$;
2. La fonction somme $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
3. On peut inverser dérivation et signe somme : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Démonstration *On vérifie que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I})$,
2. *la* suite de fonctions (S_n) *converge simplement sur* I,
3. *la* suites de fonctions (S'_n) *converge uniformément sur* I.

D'après le théorème sur les suites de fonctions, on sait que $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I})$, *que* (S_n) *converge uniformément sur tout segment* $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ *et que* $\mathrm{S}' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Remarque 6.31 On a le même théorème en remplaçant la troisième hypothèse par

(H3) La série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

COROLLAIRE 6.30 ♡ **CV uniforme et dérivation d'ordre k**

Soit un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I})$;

(H2) $\forall i \in [\![1, k]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge *simplement* sur I ;

(H3) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge *uniformément sur tout segment* de I.

Alors,

1. $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
3. $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Démonstration *Récurrence.*

Exemple 6.16 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Domaine de définition de f ;
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[)$ et calculer f'.
3. Calculer f.

Solution :

1. $\mathrm{D}_f = [0, +\infty[$.
2. *Série alternée, CV normale sur* $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ *et uniforme sur* $[0, +\infty[$. f *est continue sur* $[0, +\infty[$.
3. $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$, *cv normale sur* $[a, +\infty[$, *donc* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Prolongement dérivable en 0, f *est* $\mathscr{C}(1)$ *sur* $[0, +\infty[$. *On a donc* $f(x) = -\ln(1 + e^{-x})$, *puisque* $f(0) = -\ln 2$.

On dispose des mêmes théorèmes lorsque les fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. En particulier :

PROPOSITION 6.31 ♡ **Dérivation de l'exponentielle** **Hors programme en PC**
Soit une algèbre A unitaire, normée de dimension finie et $a \in A$. L'application

$$exp_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ta)^n}{n!} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall a \in A, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'_a(t) = a\exp(ta) = \exp(ta)a$$

Démonstration *Le montrer pour les matrices.*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & \frac{t^n A^n}{n!} \end{array} \right.$$

est $\mathscr{C}^1$ et on vérifie la CV uniforme (normale) sur tout $K \subset I$ de la série des dérivées.

On utilisera ce résultat pour la résolution d'équations différentielles. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & e^{tA} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$g^{(k)}(t) = A^k \times e^{tA} = e^{tA} \times A^k$$