Chapitre 2

Séries numériques

Table des matières

Les paragraphes 2.1, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4 et 2.3.1 sont des rappels de première année.

2.1 Définitions

DÉFINITION 2.1 ♡ **Série**
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles (ou complexes). On lui associe la suite des *sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

— On appelle *série* de terme général u_n, la suite (S_n) de terme général S_n que l'on note $\sum u_n$.

— On dit que la *série* $\sum u_n$ *converge* si et seulement s'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Sinon, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge*.

— Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on dit que S est la *somme de la série* et l'on note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque 2.1 Ne pas confondre les notations, on peut parler d'une série $\sum u_n$ même si la série ne converge pas. Par contre, la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme d'une série qui n'a de sens que si la série converge. Cette notation représente une *limite* et non pas une somme « infinie » ...

Remarque 2.2 Il se peut que la suite (u_n) ne soit définie qu'à partir d'un rang n_0. On parle également de la série $\sum u_n$, les sommes partielles n'étant définies qu'à partir du rang n_0 :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

et si la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge, on note sa limite $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

Remarque 2.3 Étudier la *nature* d'une série $\sum u_n$ consiste à préciser si la série converge ou diverge.

Remarque 2.4 Une série n'est pas autre chose qu'une suite. On peut donc lui appliquer les résultats vus en première année concernant les suites réelles ou complexes.

PROPOSITION 2.1 ♡♡♡ **Espace vectoriel des séries convergentes**
L'ensemble des suites $E = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge }\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur E.

Démonstration *Remarquons que E est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*
L'ensemble E des séries convergente est non vide car il comporte la série de terme général nul.
Soient $\sum u_n, \sum v_n \in E$ deux séries convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n et T_n la nième somme partielle respectivement associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Soient aussi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dire que $\sum u_n, \sum v_n$ sont convergentes revient à dire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes. Mais alors par théorème sur les suites, $\alpha(S_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(T_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha S_n + \beta T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite convergente. Donc $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente. On note $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ sa somme.
De plus, si $S = \lim S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et si $T = \lim T_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ alors $\alpha S_n + \beta T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha S + \beta T$, ce qui s'écrit aussi $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$.

Remarque 2.5 En particulier, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes de somme respectives S et T alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la série $\alpha \sum u_n + \beta \sum v_n$ est convergente de somme $\alpha S + \beta T$.

⚠ *Attention 2.1* On ne peut écrire $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ qu'après avoir vérifier que les séries $\sum(u_n + v_n)$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

PROPOSITION 2.2
Une série à termes complexes converge si et seulement si les séries partie réelle et partie imaginaire associées convergent.

Démonstration *Laissée en exercice.*

THÉORÈME 2.3 ♡ **Séries grossièrement divergentes**
Il y a un lien important entre la suite (u_n) et la suite des sommes partielles (S_n) :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum u_n \text{ CV} \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est *grossièrement divergente*.

Démonstration

$$\begin{cases} S_n &= u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ S_{n-1} &= u_0 + \cdots + u_{n-1} \end{cases}$$

En faisant la différence, $u_n = S_n - S_{n-1}$. *Si la série* $\sum u_n$ *converge, il existe* $S \in \mathbb{R}$ *tel que* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, *mais alors* $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ *et par les théorèmes généraux,*

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$$

Remarque 2.6 Il ne suffit pas que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour que la série converge. On verra que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque 2.7 Pour étudier la nature et calculer la somme d'une série $\sum u_n$, il est intéressant de trouver une suite (v_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_{n+1} - v_n$$

Alors le télescopage permet de calculer explicitement la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (v_n) converge et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$$

Remarque 2.8 Pour étudier une *suite* (v_n), il peut être également intéressant d'étudier la convergence de la série $\sum t_n$ où $t_n = (v_n - v_{n-1})$. En effet,

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \cdots + (v_1 - v_0) + v_0 = v_0 + \sum_{k=1}^{n} t_k$$

Par conséquent,

$$\text{la suite } (v_n) \text{ converge} \iff \text{la série } \sum t_n \text{ converge}$$

PROPOSITION 2.4 ♡ **On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration *Introduisons les sommes partielles des deux séries :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=n_0}^{n} v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \Big(\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k - u_k\Big) \\ &= S_n + C \end{aligned}$$

où C *est une constante ne dépendant pas de* n. *Par conséquent, la suite* (T_n) *converge si et seulement si la suite* (S_n) *converge.*

DÉFINITION 2.2 ♡ **Reste d'une série convergente**

Soit une série $\sum u_n$ *convergente*. Notons $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme. On appelle *reste d'ordre* n de la série $\sum u_n$, la suite de terme général $\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$ notée

$$\boxed{\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

On a $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque 2.9 On veut calculer une valeur approchée de la somme d'une série $\sum u_n$:

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

On décide de prendre comme valeur approchée de cette somme, la somme partielle de la série :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Puisque $\mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = \mathrm{S}$, l'erreur commise dans cette approximation est le reste de la série :

$$|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n|$$

On peut écrire la procédure Python suivante qui prend en argument une fonction f telle que $u_n = f(n)$, un entier n et calcule la somme partielle S_n de la série :

Python

```python
#première possibilité
def somme_partielle(f,n):
  S=0
  for i in range(0,n+1):
    S+=f(i)
  return(S)

#seconde possibilité
sum([f(i) for i in range(0,n+1)])
```

Le problème consiste à déterminer la valeur de n pour être sûr que S_n soit une valeur approchée à ε près de L. On résout ce problème si l'on sait majorer simplement le reste R_n. Si par exemple $\mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{n}$, pour obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près, il *suffit* que $\frac{1}{n} \leqslant 10^{-p}$, c'est-à-dire $n \geqslant 10^p$.

THÉORÈME 2.5 ♡ **Séries géométriques**

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ s'appelle une *série géométrique* de raison z.

1. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.
2. On connaît explicitement les sommes partielles, la somme et le reste d'une série géométrique :

$$\boxed{\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}}$$

Si $|z| < 1$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}}$$

Démonstration

1. *On suppose que* $\sum z^n$ *est convergente. On note* S_n *La nième somme partieelle associée à cette série, on a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si} \quad z \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad z = 1 \end{cases}.$$

   Alors $\sum z^n$ *converge si et seulement si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge c'est-à-dire si et seulement si* $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, ce qui est équivalent à* $|z| < 1$.

2. *Si* $|z| = 1$*, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim S_n = \frac{1}{1-z}.$$

   On en tire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$R_n = S - S_n = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Remarque 2.10 Les séries géométriques sont d'un usage fondamental en Analyse. Les formules précédentes sont à connaître par coeur.

2.2 Séries à termes positifs

2.2.1 Convergence des séries à termes positifs

Dans cette section, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à *termes positifs ou nuls*. Si tous les termes de (u_n) sont négatifs, puisque les séries $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature, on se ramène au cas d'une série à termes positifs.

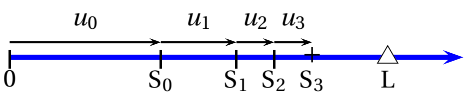


FIGURE 2.1 – Série à termes positifs

THÉORÈME 2.6 ♡ **Convergence d'une série à termes positifs**
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Alors :

1. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante*.
2. la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

a. *Soit* $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

   ce qui montre que la suite (S_n) *est croissante.*

1. *C'est le théorème de la limite monotone.*

Remarque 2.11 Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Exemple 2.2

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.2.2 Critères de comparaison

THÉORÈME 2.7 ♡ **Critère d'inégalité des séries positives**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

H1 Les deux séries sont à *termes positifs* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.

H2 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

Alors :

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge également.

Démonstration *Considérons les sommes partielles de ces séries :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

D'après l'hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leqslant V_n$$

1. *Si $\sum v_n$ converge, d'après le théorème 2.6, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$S_n \leqslant V_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

La suite (S_n) étant majorée et croissante, la série à termes positifs $\sum u_n$ converge d'après le théorème de la limite monotone.

2. *Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geqslant S_n$ et que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc la série $\sum v_n$ est divergente.*

Exemple 2.3 Étudions la convergence de $\sum \frac{\ln n}{n2^n}$. La série est bien à termes positifs. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ tend vers 0 en l'infini donc il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{\ln n}{n2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et la série de terme général $\frac{M}{2^n}$ étant convergente, il en est de même de la série initiale.

2.2.3 Comparaison avec une intégrale

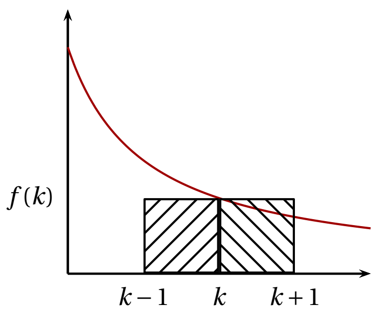


FIGURE 2.2 – $\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$

THÉORÈME 2.8 ♡ **Comparaison avec une intégrale**
Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ($a \in \mathbb{N}$). On suppose que :

H1 f est à valeurs *positives*.

H2 f est *décroissante*.

Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ sont de même nature. De plus, si elles convergent :

$$\boxed{\int_{a+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=a+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Démonstration
On effectue la démonstration dans le cas où $a = 0$. Comme f est décroissante, il vient

$$\forall x \in [n, n+1], \quad f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

et en passant à l'intégrale, on obtient :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

donc les séries positives de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature d'après le théorème de comparaison.

Remarque 2.12 On utilise en général ce théorème avec $a = 0$ ou $a = 1$.

Remarque 2.13 Si f est positive et continue sur $[a, +\infty]$, alors on montre facilement que la fonction F définie pour tout $x \geqslant a$ par $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante. En effet, pour tout $y > x \geqslant a$, $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Le théorème de la limite monotone permet alors d'affirmer que soit F converge vers une limite finie en $+\infty$ (si F est bornée), soit F admet une limite infinie en ∞ (si F n'est pas bornée).
On note (u_n) la suite de terme général $u_n = \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors équivalence entre :
- F est bornée ;
- (u_n) est bornée.

En effet, si F est bornée alors $(u_n) = (\mathrm{F}(n))$ aussi. Réciproquement, si (u_n) est bornée alors il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \geqslant a$ et pour $x \geqslant a$, on a $\mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{F}(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant \mathrm{M}$ car F est croissante. Donc F est bornée.
On montre ainsi que $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et F sont de même nature en $+\infty$.
Prenant un peu d'avance avec le chapitre **??**, on dit qu'une intégrale de la forme $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui admet une limite quand $x \to \infty$ est une *intégrale convergente* (et divergente sinon).
Le theorème précédent peut alors se reformuler sous la forme compacte suivante.

THÉORÈME 2.9 ♡ **Comparaison avec une intégrale**
Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ($a \in \mathbb{N}$). On suppose que :

H1 f est à valeurs *positives*.

H2 f est *décroissante*.

Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De plus, si elles convergent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Remarque 2.14 La comparaison série/intégrale est un outil très classique et est en général utilisée pour obtenir des résultats asymptotiques avec des séries. On propose un exemple très classique avec la série harmonique qu'il faut complètement maîtriser.

Exemple 2.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k}$ la nième somme partielle de la série harmonique. Montrons que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
Comme $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui amène pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles, on calcule alors que :

$$1 + \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \ln(n)$ ce qui s'écrit aussi

$$1 + \frac{1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leqslant \frac{\mathrm{H}_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

et donc $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Théorème 2.10 ♡♡♡ **Comparaison avec une intégrale, version avec contrôle de l'erreur** **Hors programme en PC**

Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ($a \in \mathbb{N}$). On suppose que :

H1 f est à valeurs *positives*.

H2 f est *décroissante*.

On note pour $n \geqslant a+1$,

$$\boxed{w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)}$$

Alors :

1. La série $\sum w_n$ est convergente.
2. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas :

$$\boxed{\sum_{n=a}^{+\infty} w_n = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=a}^{+\infty} f(n)}.$$

Démonstration *En interprétant $f(n)$ comme l'aire de deux rectangles (voir la figure 2.2), et puisque la fonction f est décroissante, on a l'encadrement :*

$$\int_{n+1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire que

$$0 \leqslant w_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

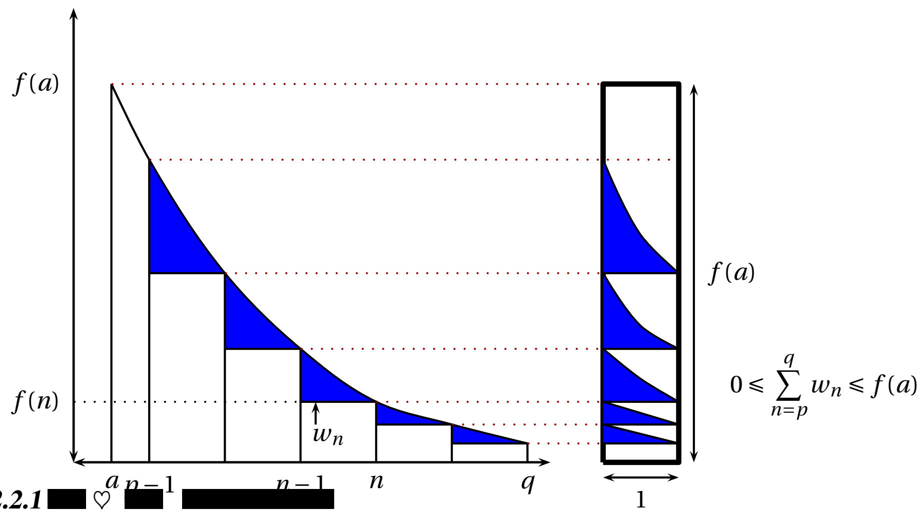
et donc en notant $\mathrm{W}_n = \sum_{k=a+1}^{n} w_k$ *et* $u_k = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$,

$$0 \leqslant \mathrm{W}_n \leqslant \sum_{k=a+1}^{n} [u_{k-1} - u_k] = u_a - u_n = \int_a^{a+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite des sommes partielles est donc majorée et alors la série $\sum w_n$ converge.
Ensuite, pour $n \geqslant a+1$,

$$\sum_{k=a+1}^{n} f(k) = \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=a+1}^{n} w_k$$

Puisque la série $\sum w_k$ converge, la série $\sum f(k)$ converge si et seulement si la suite de terme général $\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$.



[redacted]**Exercice 2.2.1** [redacted] ♡ [redacted]

Montrer qu'il existe un réel γ (constante d'Euler) tel que

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Exemple 2.5 Étudions la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ où $\beta > 0$.

Remarque 2.15 Lorsque la fonction f est *croissante*, on obtient également un encadrement de $f(n)$ par deux intégrales qui peut être intéressant comme le montre l'exercice suivant.

Exemple 2.6 Montrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

$$ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

Introduisons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array} \right.$$

Elle est *croissante* et positive sur $[1,+\infty[$. Soit $k \geqslant 2$, on dispose de l'encadrement :

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant, on en déduit l'encadrement :

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t + \ln n - \int_{1}^{2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Et puisque $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t = n\ln(n) - n$, en divisant par $n\ln n$, on trouve que

$$1 \leqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{n} - \frac{C}{n\ln n}$$

et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Un application essentielle de ce théorème est le suivant.

THÉORÈME 2.11 ♡ **Séries de Riemann**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *série de Riemann* la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$, la série de Riemann converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$, la série de Riemann diverge.

Démonstration

- *Le cas $\alpha = 1$ correspond à la série harmonique dont on a déjà prouvé la divergence. On suppose dans la suite que $\alpha \neq 1$.*
- *Si $\alpha \leqslant 0$ alors la suite (u_n) ne converge par vers 0 et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.*
- *Si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, introduisons $f : t \mapsto 1/t^\alpha$ et considérons (u_n) la suite de terme général $u_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est bien définie car f est continue sur $[1,n]$. De plus f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty]$. Par théorème de comparaison série-intégrale, on sait alors que la série $\sum u_n$ et la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ sont de même nature.*

  Pour $n \geqslant 1$, on calcule que

  $$u_n = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

  qui est bien définie car $\alpha \neq 1$.
  De plus, on obtient ainsi le terme général d'une suite convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha < 1$, d'où le théorème.

Exemple 2.7

- Montrons la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et par comparaison à une série de Riemann, cette dernière converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$ converge.
- La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ diverge. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n+1}{n\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont à termes positifs et cette dernière est de Riemann et divergente donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ diverge.

2.2.4 Encore des critères de comparaison

COROLLAIRE 2.12 ♡ **Critère de domination des séries positives**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On suppose que :

H1 les séries sont à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.

H2 $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ (ou $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$)

Alors :
- si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.
- si $\sum u_n$ divverge, la série $\sum v_n$ diverge également.

Démonstration *Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$, il existe $\mathrm{C} > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \mathrm{C}v_n$.*
On ne change pas la nature d'une série en modificant un nombre fini de ses termes donc on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant \mathrm{C}v_n$.
Si $\sum v_n$ est convergente, alors il en est de même de $\sum \mathrm{C}v_n$ et par critère d'inégalité sur séries à terme général positif, on sait que $\sum u_n$ est convergente.

De la même façon, on montre que si $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum \mathrm{C}v_n$ est aussi divergente, ce qui implique la divergence de $\sum v_n$.

Enfin, si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ et donc si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi.

Dans la pratique, on utilise souvent la règle suivante qui découle directement du corollaire précédent.

THÉORÈME 2.13 ♡ **Règle $n^\alpha u_n$**
On considère une série $\sum u_n$. On suppose que :

H1 La série est à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

H2 Il existe $\boxed{\alpha > 1}$ tel que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, c'est-à-dire $\boxed{n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.
Si par contre :

H1 La série est à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

H2 Il existe $\boxed{\beta < 1}$ tel que $\frac{1}{n^\beta} = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$, c'est-à-dire $\boxed{n^\beta u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Exemple 2.8 Montrons que la série $\sum \frac{n^3}{2^n}$ converge. Par croissances comparées entre suites usuelles, on sait que $n^5/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire que $n^3/2^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(1/n^2\right)$. Les séries $\sum \frac{n^3}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont à termes positifs. La seconde converge donc la première aussi.

THÉORÈME 2.14 ♡ **Critère d'équivalence des séries positives**
Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose que :

H1 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

H2 À partir d'un certain rang, $v_n \geqslant 0$.

Alors à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$ et les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration *Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \mathrm{N}$ alors :*

$$\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n.$$

Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(u_n)$. D'après les hypothèses, il existe un rang $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$, $v_n \geqslant 0$. Alors pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}v_n \geqslant 0$ et on utilise alors le critère de domination pour les séries à terme général positif.

PLAN 2.1 : $\boxed{\text{Plan d'étude d'une série } \sum u_n \text{ à } \textit{termes positifs}}$

1. *Chercher un équivalent simple (v_n) de la suite (u_n) (on peut utiliser les développements limités).*
2. *L'équivalent permet de déduire le signe de u_n à partir d'un certain rang.*
3. *Vérifier que la série $\sum v_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang.*
4. *Utiliser les séries de référence (séries de Riemann, séries géométriques) ou la règle $n^\alpha v_n$ pour trouver la nature de la série $\sum v_n$.*
5. *Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exemple 2.9 Étudions la nature de la série $\sum \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)}{\sin(1/n)}$.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et que (u_n) est positive, la série converge.

2.2.5 Comparaison logarithmique

THÉORÈME 2.15 ♡ **Comparaison logarithmique**
On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose que :

H1 $\forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0$ et $v_n > 0$.

H2 $\forall n \geqslant n_0,\ \boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}}$.

Alors :

1. $\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)}$
2. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration *Pour $n \geqslant n_0$,*

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$$

Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante. Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = \mathrm{C} \text{ donc } u_n \leqslant \mathrm{C} v_n$$

par positivité de (u_n) et de (v_n) On conclut grâce aux critères de comparaison.

COROLLAIRE 2.16 ♡ **Critère de d'Alembert**
Soit une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs.

1. S'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. S'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une constante $k < 1$ telle que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration

1. *Puisque pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > 0$, la suite (u_n) ne converge pas vers 0. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
2. *On utilise le critère de comparaison logarithmique avec une suite géométrique : $v_n = k^n$. En effet,*

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et puisque $0 \leqslant k < 1$, la série géométrique $\sum v_n$ converge.

Remarque 2.16 En pratique, on utilise plutôt la règle de d'Alembert suivante :

THÉORÈME 2.17 ♡ **Règle de d'Alembert**
Soit une série $\sum u_n$. On suppose que :

H1 $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n > 0.$

H2 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ (= [0,+\infty]).$

Alors

1. Si $0 \leqslant k < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $k > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $k = 1$, on ne peut rien dire en général.

Démonstration

1. Si $0 \leqslant k < 1$, en posant $k' = \dfrac{1+k}{2}$, on a $k < k' < 1$. Puisque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers k, il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k'$. Puisque $k' < 1$, en utilisant le corollaire précédent, la série $\sum u_n$ converge.

2. Si $k > 1$, en posant $k' = \dfrac{1+k}{2}$, on a $1 < k' < k$. Puisque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$, il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k'$. Comme $k' > 1$, d'après le corollaire précédent, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 2.17 Dans le cas où $k = 1$, on ne peut rien dire comme le montrent les exemples suivants :
— $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum u_n$ diverge.
— $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum u_n$ converge.

Remarque 2.18 La règle de d'Alembert est indiquée pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ lorsque le terme général u_n est un produit (factorielles, ...). Dans ce cas, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est souvent simple.

Exemple 2.10
— Pour $x > 0$, étudions la nature de la série $\sum \frac{n!}{(2n)!} x^n$. La série est à termes positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après la règle de d'Alembert, la série converge.
— Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, étudions la nature de la série $\sum n^\alpha x^n$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série converge si $x < 1$ et diverge si $x > 1$. Si $x = 1$, la série converge d'après le critère de Riemann si et seulement si $\alpha < -1$.

Remarque 2.19 La règle de d'Alembert n'est pas une panacée !
— Si la suite (a_n) s'annule une infinité de fois, ne pas chercher à utiliser d'Alembert.
— La réciproque est fausse : il existe des séries $\sum a_n$ à termes strictements positifs tels que la série $\sum a_n$ converge avec $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ qui n'a pas de limite.

2.2.6 Plan d'étude d'une série à terme général positif

Nature de $\sum u_n$ si $u_n \geqslant 0$

1 Simplifier si possible u_n :
- transformations algébriques, racines conjuguées, décomposition en éléments simples,...
- par un équivalent
- par un DL

2 $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ — Divergence grossière

3 Majoration ou calcul (par télescopage) des sommes partielles S_n

4 Critère d'inégalité ou d'équivalence

5 Critère de domination, « règle du n^α », comparaison avec une intégrale, règle de d'Alembert

2.3 Séries à termes quelconques

2.3.1 Absolue convergence

DÉFINITION 2.3 ♡ **Série absolument convergente**
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe (ou réelle). On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si et seulement si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

THÉORÈME 2.18 ♡ **Une série absolument convergente est convergente**
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe (ou réelle). Si la série $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration *Si (u_n) est complexe alors en utilisant les inégalités $|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$, on se ramène à une série réelle. On suppose dorénavant que (u_n) est réelle. On note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. On remarque que $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$. Par ailleurs les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes deux à termes positifs donc elles convergent d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on en déduit par linéarité que $\sum u_n$ converge.*

Remarque 2.20 Il se peut que la série $\sum u_n$ converge sans que la série $\sum |u_n|$ converge. On dit alors que la série $\sum u_n$ est *semi-convergente*.

Exemple 2.11
- On montrera dans la section 2.3.2 que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.
- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente.

PROPOSITION 2.19 ♡ **Inégalité triangulaire**
Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|}.$$

Démonstration *Comme $\sum u_n$ est absolument convergente, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$ sont convergentes, ce qui implique pour tout $N \in \mathbb{N}$ la convergence des séries $\sum_{n\geqslant N} |u_n|$ et $\sum_{n\geqslant N} u_n$. L'inégalité triangulaire amène pour tout $M \geqslant N$, $\left|\sum_{n=N}^{M} u_n\right| \leqslant \sum_{n=N}^{M} |u_n|$ d'où l'inégalité en passant à la limite quand $M \to +\infty$.*

2.3.2 Séries alternées

Définition 2.4 ♡ **Série alternée**
On appelle *série alternée* une série $\sum(-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite à termes positifs.

Théorème 2.20 ♡ **Critère spécial des séries alternées (TSA)**
On considère une série $\sum \underbrace{(-1)^n v_n}_{u_n}$.

(H1) À partir d'un certain rang $v_n \geqslant 0$.

(H2) La suite (v_n) est *décroissante* à partir d'un certain rang.

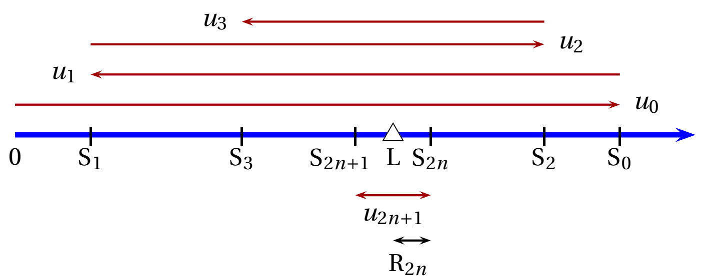
(H3) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors :

1. la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ converge ;
2. On dispose d'une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n v_n$ par la valeur absolue du premier terme négligé $|u_{n+1}|$:
$$\boxed{|R_n| \leqslant v_{n+1}}$$
3. Le signe du reste R_n est le même que celui du premier terme négligé : $\mathrm{sg}(R_n) = \mathrm{sg}(u_{n+1})$.

Démonstration *On étudie la suite partielle (S_n) et on montre que les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k$ et*
$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} < 0$$
car (v_n) est décroissante donc (S_{2n}) est décroissante. De même, $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k$ et
$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} > 0$$
*donc (S_{2n+1}) est croissante. Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = v_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc les deux suites sont bien adjacentes. Le théorème **??** page **??** nous assure alors du fait que (S_n) converge.*
De plus, de $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ donc $-v_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} = R_{2n} \leqslant 0$ et $0 \leqslant R_{2n-1} = S - S_{2n-1} \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} = v_{2n}$.

Remarque 2.21 Comme (S_{2n}) est décroissante, que (S_{2n+1}) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, on a les inégalités sur les sommes partielles :
$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \ldots \leqslant S \leqslant \ldots \leqslant S_{2n} \leqslant \ldots \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$



Remarque 2.22 Pour vérifier qu'une série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée, le point souvent délicat consiste à montrer que la suite (u_n) est *décroissante* à partir d'un certain rang. Porter un soin particulier à cette vérification !

Exemple 2.12 On montre facilement en appliquant ce critère que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Remarque 2.23 On veut déterminer le signe de la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ d'une série alternée :

— Si la série est alternée à partir du rang 0, le signe de la somme est celui de $S_0 = u_0$.

— Si la série est alternée à partir d'un rang n_0, pour $n \geqslant n_0$, on a l'encadrement $S \in [S_n, S_{n+1}]$. En particulier, si $S_n \geqslant 0$, et $S_{n+1} \geqslant 0$, alors $S \geqslant 0$.

— À titre d'exemple, donnons les valeurs approchées des 20 premières sommes partielles de la série $\sum(-1)^n/n$:

$$1., .5000000000, .8333333333, .5833333333, .7833333333, .6166666667, .7595238095, .6345238095, .7456349206,$$
$$.6456349206, .7365440115, .6532106782, .7301337551, .6587051837, .7253718504, .6628718504, .7216953798, .6661398242,$$
$$.7187714032, .6687714032.$$

Cette série converge vers $\ln 2 \simeq 0.6931471806$. On a bien à chaque fois $S \in [S_n, S_{n+1}]$.

Exemple 2.13 On veut calculer une valeur approchée de la somme d'une série alternée $\sum(-1)^n f(n)$ où f est une fonction décroissante positive qui tend vers 0. On prend comme valeur approchée de la somme $L = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k)$. On dispose de la majoration de l'erreur :

$$|S_n - L| = |R_n| \leqslant f(n+1)$$

On peut donc écrire la procédure Python suivante qui renvoie une valeur approchée à ε près de la somme :

Python

```python
def serie_alt(epsilon,f)
  S=0
  k=0
  sig=1
  while f(k+1)>epsilon:
    S+=sig*f(k)
    sig*=-1
    k+=1
  return(S)
```

PROPOSITION 2.21 ♡♡♡♡ **Séries de Riemann alternées**
Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

— Si $\alpha > 1$, la série converge absolument.
— Si $0 < \alpha \leqslant 1$, la série est semi-convergente.
— Si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement.

Démonstration *Séries de Riemann et critère des séries alternées.*

Remarque 2.24 Une Technique très importante est celle dite d'éclatement des termes Étudions la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Remarque 2.25 La condition dans le théorème spécial portant sur la décroissance de (v_n) est essentielle, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.14 Nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$

Remarque 2.26 Deux erreurs à ne pas commettre :

— si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si la série $\sum v_n$ est une série alternée convergente, la série $\sum u_n$ n'est pas forcément convergente ;
— si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n v_n$ avec $v_n \geqslant 0$ et (v_n) décroissante, la suite $(|u_n|)$ n'est pas nécessairement décroissante.
— si $u_n = a_n + b_n + \underset{n\to+\infty}{o}(c_n)$ avec $\sum a_n, \sum b_n$ divergente et $\sum c_n$ convergente n'implique pas en général que $\sum u_n$ est divergente.

Utiliser la technique d'éclatement des termes. Faire un développement asymptotique de u_n à la précision un terme d'une série absolument convergente. Si par exemple

$$u_n = a_n + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \alpha > 1$$

La nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum a_n$.

2.3.3 Plan d'étude d'une série de signe quelconque

Nature de $\sum u_n$

- 1 Absolue convergence de $\sum u_n$
  - Étude de la série à termes positifs $\sum |u_n|$
- 2 Série de la forme $\sum (-1)^n v_n$
  - (v_n) positive décroissante et de limite nulle
    - Critère spécial
  - Technique d'éclatement des termes
- 3 Technique d'éclatement des termes

2.4 Formule de Stirling

LEMME 2.22 ♡♡♡ **Quelques résultats classiques concernant les intégrales de Wallis**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'*intégrale de Wallis* $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$. On a alors :

1. La suite (I_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$;
4. $\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ autrement dit $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n+1}$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{I}_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Démonstration

THÉORÈME 2.23 ♡♡♡ **Formule de Stirling**

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}.$$

Démonstration *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

et étudions la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right] \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

et par comparaison avec une série de Riemann la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_2 + \ldots + v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_1$. *Donc la suite* $(\ln u_n)$ *est convergente et si* λ *est sa limite alors* (u_n) *converge vers* $k = e^{\lambda} > 0$.
On en déduit que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}n^n e^{-n}$ *et il nous faut encore calculer* k.
Grâce au lemme précédent et à cet équivalent, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} &= \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{2n}(n)!^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{k\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^{2n}k^2 n n^{2n} e^{-2n}}\right)^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{n}}\right)^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{k^2}\frac{2n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Alors $\frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\pi}{k^2}$. *Toujours d'après le lemme, on sait que cette limite vaut* 1. *On en déduit que* $k = \sqrt{2\pi}$ *et la formule de Stirling est démontrée.*
Voir aussi l'exercice **??**.

2.5 Produit de Cauchy de deux séries complexes

DÉFINITION 2.5 ♡ **Produit de Cauchy**
On considère deux séries complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On appelle *produit de Cauchy* de ces séries, la série $\sum w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}}$$

THÉORÈME 2.24 ♡ **Convergence d'un produit de Cauchy**
On suppose que :

(H1) La série $\sum u_n$ est absolument convergente.

(H2) La série $\sum v_n$ est absolument convergente.

Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)}$$

Démonstration

1. ***Absolue convergence de*** $\sum w_n$. *Soit* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, *on calcule*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |w_n| &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \Big|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| \\
&= \sum_{(p,q)\in\mathrm{I}} |u_p||v_q| \quad \text{(voir figure)} \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant p,q\leqslant \mathrm{N}} |u_p||v_q| \\
&= \Big(\sum_{p=0}^{\mathrm{N}} |u_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\mathrm{N}} |v_q|\Big) \\
&\leqslant \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\Big)
\end{aligned}$$

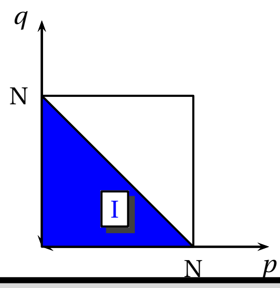
Par conséquent, la série $\sum w_n$ converge absolument.

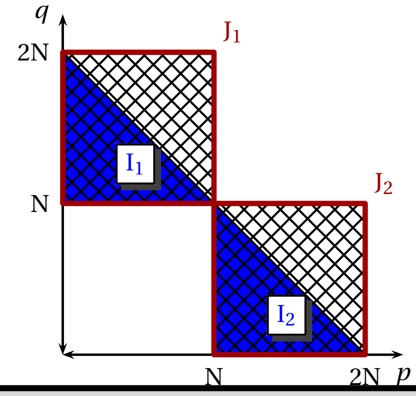
2. ***Valeur de la somme*** *Notons (S_n), (V_n) et (W_n) les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On estime :*

$$\begin{aligned}
\left|W_{2N} - S_N V_N\right| &= \Big|\sum_{(p,q)\in I_1\cup I_2} u_p v_q\Big| \\
&\leqslant \sum_{(p,q)\in I_1\cup I_2} |u_p||v_q| \\
&\leqslant \sum_{(p,q)\in J_1\cup J_2} |u_p||v_q| \\
&= \Big(\sum_{p=0}^{N}|u_p|\Big)\Big(\sum_{q=N+1}^{2N}|v_q|\Big) + \Big(\sum_{p=N+1}^{2N}|u_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{N}|v_q|\Big) \\
&\leqslant U(S_{2N} - S_N) + V(V_{2N} - V_N) \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

On en déduit puisque $S_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} U$ et que $V_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} V$ que $W_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} UV$. Mais comme la série $\sum w_n$ converge, il vient que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = UV$$





THÉORÈME 2.25 ♡ **Exponentielle complexe**

Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$.

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On définit l'exponentielle du nombre complexe z par

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

2. Pour deux complexes $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\boxed{e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}}$$

Démonstration

1. *Montrons que la série converge absolument. Si $z = 0$, c'est évident et $e^0 = 1$. Si $z \neq 0$, posons $a_n = \frac{|z^n|}{n!}$. Puisque*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

la règle de d'Alembert montre que la série $\sum a_n$ converge.

2. *En posant $u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $v_n = \frac{z'^n}{n!}$, calculons le produit de Cauchy :*

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{n!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \\
&= \frac{(z+z')^n}{n!} \qquad (\text{ binôme })
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque les deux séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ *et* $\sum \frac{z'^n}{n!}$ *convergent absolument, il en est de même de leur produit de Cauchy et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\Big)$$

2.6 L'essentiel

1. Comprendre les définitions élémentaires. En particulier les notations $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Définition du reste d'une série convergente.
2. Toutes les propriétés des séries géométriques sont à connaître parfaitement.
3. La relation $u_n = S_n - S_{n-1}$ est fondamentale.
4. Les techniques d'étude de convergence d'une série sont à rapprocher de celles des intégrales généralisées :
   — La série diverge-t-elle grossièrement ? (comprendre la différence avec les intégrales généralisées)
   — Si la série n'est pas positive, étudier la convergence absolue.
   — Utiliser les critères des séries à termes positifs.
   — Chercher un équivalent de u_n et utiliser les séries de Riemann ou la règle $n^\alpha u_n$.
5. Bien étudier la comparaison série-intégrale et les techniques pour obtenir un équivalent de la somme partielle d'une série divergente et du reste d'une série convergente.
6. Le théorème de comparaison logarithmique est à connaître. La règle de Raabe-Duhamel est hors-programme, mais à savoir retrouver.
7. La règle de d'Alembert n'est pas une équivalence de convergence. Bien le comprendre.
8. Connaître parfaitement les séries alternées et le critère spécial (en particulier la majoration et le signe du reste ...).
9. Comprendre la technique « d'éclatement de termes » : Pour une série qui n'est pas à termes positifs, un équivalent ne suffit pas. Faire un développement asymptotique :

$$u_n = (-1)^n a_n + \underbrace{b_n}_{\underset{n\to+\infty}{O}(1/n^\alpha)}, \ \alpha > 1$$

   (la série $\sum b_n$ est absolument convergente et $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée).
10. La formule de Stirling est à connaître par coeur.
11. Théorème du produit de Cauchy : les deux séries sont *absolument* convergentes.