Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

Table des matières

1 Compléments d'algèbre linéaire **1**
1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels 1
1.1.1 Produit d'un nombre fini de sev 1
1.1.2 Rappels de première année : somme de deux sevs 3
1.1.3 Somme finie de sevs 4
1.2 Matrices par blocs et sous-espaces stables 7
1.3 Déterminants 9
1.3.1 Déterminants par blocs 9
1.3.2 Déterminant de Vandermonde 10
1.4 Matrices semblables et trace 11
1.4.1 Trace d'une matrice carrée 11
1.4.2 Matrices semblables 11
1.5 Projecteurs et symétries (Rappels de première année) 12
1.5.1 Projecteurs 12
1.5.2 Symétries 14

Dans tout ce chapitre et sauf mention du contraire, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1.1 Produit d'un nombre fini de sev

Commençons par le cas simple d'un produit de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

PROPOSITION 1.1 **Produit d'espaces vectoriels**
Soient $(E_1,+,\cdot)$ et $(E_2,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble $E_1 \times E_2$

— une addition $+$

$$+ : \begin{cases} (E_1 \times E_2)^2 & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \longmapsto & \big(x_1+y_1, x_2+y_2\big) \end{cases}$$

— une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times (\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \\ (\alpha, (x_1, x_2)) & \longmapsto & (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \end{array} \right. .$$

Alors $(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est $\boxed{\left(0_{\mathrm{E}_1}, 0_{\mathrm{E}_2}\right)}$.

Démonstration *Vérifications faciles.*

On généralise alors cette proposition à un produit fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

PROPOSITION 1.2 ♡ **Produit d'espaces vectoriels**

Soit $p \geqslant 2$. On considère $(\mathrm{E}_1, +, \cdot), \dots, \left(\mathrm{E}_p, +, \cdot\right)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$

— une addition $+$

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \left(\left(x_1, \dots, x_p\right), \left(y_1, \dots, y_p\right)\right) & \longmapsto & \left(x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p\right) \end{array} \right.$$

— une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \left(\alpha, \left(x_1, \dots, x_p\right)\right) & \longmapsto & \left(\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_p\right) \end{array} \right. .$$

Alors $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est $\boxed{\left(0_{\mathrm{E}_1}, \dots, 0_{\mathrm{E}_p}\right)}$.

Démonstration *On effectue une récurrence sur p. Si $p = 2$, alors la proposition est une conséquence de la précédente. Soit $p \geqslant 2$. On suppose que la propriété est vraie pour un produit de p espaces vectoriels. On considère $p+1$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{p+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d'après la proposition 1.1, $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p \times \mathrm{E}_{p+1} = \left(\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p\right) \times \mathrm{E}_{p+1}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et la propriété est prouvée par récurrence.*

✎ *Notation 1.1* Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$ est aussi noté $\prod_{k=1}^{p} \mathrm{E}_i$ ou $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ dans le cas d'espaces indiciés par une famille finie I.

Exemple 1.2 Une application immédiate, qui permet de retrouver un résultat classique de première année, est la suivante. On sait que $(\mathbb{K}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donc $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ facteurs}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

PROPOSITION 1.3 ♡ **Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finies**

Soient $(\mathrm{E}_1, +, \cdot), \dots, \left(\mathrm{E}_p, +, \cdot\right)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$. Alors $(\mathrm{E}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n = n_1 + \ldots + n_p$:

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p\right) = \dim \mathrm{E}_1 + \ldots + \dim \mathrm{E}_p}$$

Démonstration *On propose deux démonstrations.*

La première utilise la notion d'espaces vectoriels isomorphes. Vous avez appris en première année que si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors ils ont même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.

En particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

De plus, si $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{E}'$ et F' sont quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E et F, ainsi que E' et F' sont isomorphes alors $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ est isomorphe à $\mathrm{F} \times \mathrm{F}'$. Prouvons le. Par hypothèses, il existe $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E}' \to \mathrm{F}'$ deux isomorphismes de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Posons $h = (f, g)$, on a pour tout $(x, x') \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$, $h(x, x') = (f(x), g(x')) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}'$. On vérifie facilemnt que h est linéaire. De plus, si $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ vérifie $h(x, x') = 0$ alors $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Mais f et g étant injectives, ce n'est possible que si $x = 0$ et $x' = 0$. On en déduit que h est injective. Si $(y, y') \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}'$ alors, comme f et g sont surjectives, il existe $(x, x') \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ tel que $f(x) = y$ et $g(x') = y'$. Alors $h(x, x') = (y, y')$ et h est surjective et la propriété est prouvée.

Alors $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \simeq \mathbb{K}^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2} = \mathbb{K}^{n_1 + n_2}$ qui est de dimension $n_1 + n_2$. Donc $\dim \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$.

On effectue alors une récurrence sur p. On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 2$ et on la montre au rang $p+1$.

On a alors

$$\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p \times \mathrm{E}_{p+1} \simeq \left(\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p\right) \times \mathrm{E}_{p+1} \simeq \mathbb{K}^{n_1 + \ldots + n_p} \times \mathbb{K}^{n_{p+1}} = \mathbb{K}^{n_1 + \ldots + n_p + n_{p+1}}$$

mais $\dim \mathbb{K}^{n_1 + \ldots + n_{p+1}} = n_1 + \ldots + n_{p+1}$ donc $\dim\left(\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_{p+1}\right) = n_1 + \ldots + n_{p+1} = \dim \mathrm{E}_1 + \ldots + \dim \mathrm{E}_{p+1}$ et la propriété est prouvée par récurrence.

La seconde preuve est un peu plus longue mais n'utilise pas de résultat de première année. On prouve déjà la proposition pour un produit de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E_1 et E_2 de dimensions respectives n_1 et n_2. Soient $e = (e_1, \dots, e_{n_1})$ une base de E_1 et $e' = (e'_1, \dots, e'_{n_2})$ une base de E_2. Alors une base de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ est donnée par

$$f = \left((e_1, 0), \dots, (e_{n_1}, 0), (0, e'_1), \dots, (0, e'_{n_2})\right).$$

En effet :

— *la famille f est libre : soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2} \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 (e_1, 0) + \dots + \alpha_{n_1} (e_{n_1}, 0) + \beta_1 (0, e'_1) + \dots + \beta_{n_2} (0, e'_{n_2}) = 0$ alors $(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n_1} e_{n_1}, \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_{n_2} e'_{n_2}) = (0_{\mathrm{E}_1}, 0_{\mathrm{E}_2})$ et donc $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i = 0_{\mathrm{E}_1}$ et $\sum_{i=1}^{n_2} \beta_i e'_i = 0$. Mais e et e' étant libres, il vient $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} = \beta_1 = \dots = \beta_{n_2} = 0$ et f est libre.*

— *la famille f est génératrice : soit $(x, x') \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ alors comme e engendre E_1 et que e' engendre E_2, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}$, $\beta_1, \dots, \beta_{n_2} \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i$ et $x' = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha'_i e'_i$ et $(x, x') = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n_2} \alpha'_i e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{n_2} \alpha'_i \left(0, e'_j\right)$ donc f engendre bien $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.*

En conclusion, on a bien $\dim(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \mathrm{Card}(f) = n_1 + n_2$. On s'attaque maintenant au cas général qu'on traite par récurrence sur $p \geqslant 2$. On vient d'initialiser cette récurrence. Soit $p \geqslant 2$. On suppose que la propriété est vraie au rang p. On considère $p+1$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p, \mathrm{E}_{p+1}$ de dimensions respectives $n_1, \dots, n_p, n_{p+1}$. On a :

$$\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_p \times \mathrm{E}_{p+1} = \underbrace{(\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_p)}_{=\mathrm{E}} \times \mathrm{E}_{p+1} = \mathrm{E} \times \mathrm{E}_{p+1}$$

et d'après la première partie de la preuve, on sait que $\dim(\mathrm{E} \times \mathrm{E}_{p+1}) = \dim \mathrm{E} + \dim \mathrm{E}_{p+1}$ mais d'après l'hypothèse de récurrence, $\dim \mathrm{E} = \dim(\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_p) = n_1 + \dots + n_p$ donc $\dim \mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_{p+1} = n_1 + \dots + n_p + n_{p+1}$ et la propriété est prouvée par récurrence.

1.1.2 Rappels de première année : somme de deux sevs

On rappelle que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors

1. $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \{x + y \mid x \in \mathrm{E}, y \in \mathrm{G}\}$. On peut montrer que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel, c'est le plus petit à contenir à la fois F et G.
2. F et G sont dits en somme direct si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. La somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ s'écrit alors $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

THÉORÈME 1.4 **Caractérisation de la somme directe**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall (x, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, [x + y = 0 \implies x = y = 0]$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que F et G sont en somme directe. Soit $(x, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x + y = 0$ alors $x = -y$ et donc, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, il vient que $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Mais $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ donc $x = y = 0$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors on a $x - x = 0$ avec $x \in \mathrm{F}$ et $-x \in \mathrm{G}$ donc $x = 0$ et $\mathrm{F} \Cap \mathrm{G} = \{0\}$.*

THÉORÈME 1.5 **Caractérisation de la somme directe**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall x \in \mathrm{F} + \mathrm{G}, \quad \exists ! (x_1, x_2) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, $\boxed{\textit{tout}}$ vecteur de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose de manière $\boxed{\textit{unique}}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que F et G soient en somme directe et soit $x \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Par définition, il existe $x_1 \in \mathrm{F}$ et $x_2 \in \mathrm{G}$ tels que $x = x_1 + x_2$. Supposons qu'il existe $x'_1 \in \mathrm{F}$ et $x'_2 \in \mathrm{G}$ tels qu'on ait encore $x = x'_1 + x'_2$. Comme $x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$, on a l'égalité : $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$. Notons y ce vecteur. Comme F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $y = x_1 - x'_1 \in \mathrm{F}_1$ et $y = x'_2 - x_2 \in \mathrm{F}_2$. Par conséquent $y \in \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$. Mais F_1 et F_2 étant en somme directe, on a $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0\}$ donc $y = 0$. Par conséquent, $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$ et l'unicité est prouvée.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Prouvons maintenant la réciproque. Soit $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Il existe alors deux couples de $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ permettant de décomposer x en un vecteur de F et un vecteur de G : $(x, 0)$ et $(0, x)$. Par hypothèse, elles sont égales : $(x, 0) = (0, x)$. Par conséquent $x = 0$ et les sous-espaces F et G sont en somme directe.*

DÉFINITION 1.1 ♡ **Sous-espaces supplémentaires**

Deux sous-espaces E_1 et E_2 d'un espace E sont dits *supplémentaires* dans E lorsque :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$
2. la somme de E_1 et E_2 est directe.

On note alors $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$.

Enfin on peut caractériser la somme directe grâce à la dimension :

THÉORÈME 1.6 ♡♡♡ **Caractérisation de la somme directe grâce à la dimension**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe ;
2. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* F *et* G *sont en somme direct alors par la formule de Grassmann,* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ *(car* $\dim F \cap G = 0$*).*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ *alors par la formule de Grassmann,* $\dim F \cap G = 0$ *et donc* $F \cap G = \{0\}$*. On prouve ainsi que* F *et* G *sont en somme directe.*

Si on dispose dans un espace vectoriel E de deux sous-espaces supplémentaires F et G alors tout vecteur de E peut être décomposé de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

THÉORÈME 1.7 **Caractérisation des sous-espaces supplémentaires**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$ (c'est-à-dire F et G sont supplémentaires).
2. $\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F \times G : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, $\boxed{\textit{tout}}$ vecteur de E se décompose de manière $\boxed{\textit{unique}}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* F *et* G *sont supplémentaires. Soit* $x \in E$*. Comme* $E = F + G$*, il existe* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$*. En appliquant le théorème 1.5, comme* F *et* G *sont en somme directe, cette décomposition est unique.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si pour tout* $x \in E$*, il existe un unique couple* $(x_1, x_2) \in F \times G$ *tel que* $x = x_1 + x_2$ *alors on a nécessairement* $E = F + G$*. On peut de plus appliquer à nouveau le théorème 1.5 et affirmer que les deux sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires. On a ainsi montré que* $E = F \oplus G$*.*

On a aussi la caractérisation suivante de la supplémentarité en terme de bases.

THÉORÈME 1.8 ♡♡♡ **Caractérisation de la supplémentarité en terme de bases**
Soient F, G sont deux sev de E de dimension finie. On a équivalence entre :

- $E = F \oplus G$.
- La réunion d'une base de F avec une base de G est une base de E.

Démonstration

- *Prouvons le sens direct. On suppose que* $E = F \oplus G$*.*
  - *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre : soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q = 0$*. On a alors :* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = -\left(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q\right)$*. Comme* e *est une base de* F*, on a* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in F$ *et comme* f *est une base de* G*, on a :* $x = -\left(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q\right) \in G$*. Mais* F *et* G *étant en somme directe, on a :* $F \cap G = \{0\}$ *et donc* $x = 0$*. Comme* e *est une base de* F *et* f *une base de* G*, ceci implique que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = 0$ *et donc que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  - *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* E*. Soit* $x \in E$*. Comme* $E = F \oplus G$*, il existe un vecteur* $x_1 \in F$ *et un vecteur* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$*. De plus :*
    - *Comme* e *est une base de* F *et que* $x_1 \in F$*, il existe* $\alpha_1, \dots \alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$*.*
    - *Comme* f *est une base de* G *et que* $x_2 \in G$*, il existe* $\beta_1, \dots \beta_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q$*.*

    Par conséquent : $x = x_1 + x_2 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ *et* $\mathscr{B}$ *est donc bien génératrice de* E*.*

  On a ainsi prouvé que $\mathscr{B}$ *est une base de* E*.*
- *Prouvons la réciproque. On suppose que* $\mathscr{B}$ *est une base de* E*.*
  - *On a* $F \cap G = \{0\}$*. En effet si* $x \in F \cap G$ *alors il existe* $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = y_1 f_1 + \dots + y_q f_q$*. Mais alors* $x_1 e_1 + \dots + x_p - y_1 f_1 - \dots - y_q f_q = 0$*. Mais la famille* $\mathscr{B}$ *est libre donc* $x_1 = \dots = xp = y_1 = \dots = y_q = 0$ *et* $x = 0$*.*
  - *On a* $E = F + G$*. En effet, si* $x \in E$ *alors comme* $\mathscr{B}$ *engendre* E*, il existe* $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_p e_p}_{\in F} + \underbrace{y_1 f_1 + \dots + y_q f_q}_{\in G} \in F + G.$$

  Donc $E = F \oplus G$*.*

On rappelle aussi la formule de Grassmann :

THÉORÈME 1.9 ♡ **Dimension d'une somme, Formule de Grassmann**
Si F_1, F_2 sont deux sev de E de dimension finie,

$$\boxed{\dim(F_1+F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)}$$

1.1.3 Somme finie de sevs

Les notions et résultats précédents sont généralisables quand on considère plus que deux sevs.

DÉFINITION 1.2 ♡♡ **Somme d'une famille finie de sevs**
On considère p sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ d'un espace vectoriel E. On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$E_1 + \dots + E_p = \{x_1 + \dots + x_p;\ (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

Lorsque $(E_i)_{i \in I}$ est une famille *finie* de sevs, on note $\sum_{i \in I} E_i$ la somme de cette famille de sevs.

Remarque 1.1 On montre facilement que la somme d'une famille finie de sevs de E est encore un sev de E. C'est d'ailleurs le plus petit sev de E contenant chacun des sevs E_i.

DÉFINITION 1.3 ♡ **Somme directe**
On dit qu'une somme $E_1 + \dots + E_p$ est *directe* si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

On note alors $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ une telle somme directe, ou $\bigoplus_{i \in I} E_i$ dans le cas d'une famille finie I.

Remarque 1.2 Le théorème 1.5 nous garantie que cette définition est cohérente avec la notion de somme directe vue en première année qui ne concernait que deux sevs ($p = 2$).
Par ailleurs si pour $p \geqslant 3$, la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe alors il en est de même de la somme $E_1 + \dots + E_{p-1}$. En effet, si $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in E_1 \times \ldots \times E_{p-1}$ est tel que $x_1 + \ldots + x_{p-1} = 0$ alors $x_1 + \ldots + x_{p-1} + 0_{E_p} = 0$ et donc $x_1 = \ldots = x_{p-1} = 0$.

PROPOSITION 1.10 ♡♡ **Caractérisation de la somme directe par une application linéaire**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $E_1, \dots, E_p$ des sevs de E. On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_p & \longrightarrow & E_1 + \ldots + E_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array} \right. .$$

Alors :

1. l'application φ est linéaire.
2. l'application φ est injective si et seulement si la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe.
3. l'application φ est surjective si et seulement si $E = E_1 + \dots + E_p$.

Démonstration

1. *On montre facilement que φ est linéaire.*
2. *La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si et seulement si φ est injective. En effet, si la somme est directe et si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $x_1 + \ldots + x_p = 0$ ce qui n'est possible que si $x_1 = \ldots = x_p = 0$ et donc que si $x = 0$. Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est injective. Réciproquement, si φ est injective et si $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ est tel que $x_1 + \ldots + x_p = 0$ alors $\varphi(x) = 0$ mais φ étant injective, il vient $x = 0$ donc $x_1 = \ldots = x_p = 0$ et la somme est directe.*
3. *Si $E = E_1 + \ldots + E_p$ alors pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$ et donc $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x$ ce qui prouve que φ est surjective. Réciproquement, si φ est surjective, pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tel que $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x$ soit $x = x_1 + \ldots + x_p$ et donc $E \subset E_1 + \ldots + E_p$. Par ailleurs $E_1 + \ldots + E_p \subset E$ donc $E = E_1 + \ldots + E_p$.*

THÉORÈME 1.11 ♡♡♡ **Caractérisations d'une somme directe, unicité de la décomposition d'un vecteur dans une somme directe**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $E_1, \dots, E_p$ des sevs de E. On a équivalence entre :

1. La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe.
2. (Unicité de la décomposition sur une somme directe) Tout vecteur $x \in E_1 + \dots + E_p$ se décompose de façon unique en $x = x_1 + \dots + x_p$ où $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.
3. $$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad E_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} E_j\Big) = \{0_E\}$$

Démonstration

$\boxed{1. \Leftrightarrow 2.}$ *Cette équivalence est juste une retranscription du fait que l'application φ précédente est injective.*

$\boxed{1. \Rightarrow 3.}$ *On suppose que la somme est directe. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ et soit $x \in E_i \cap \big(\sum_{j \neq i} E_j\big)$ alors $x \in E_i$ et $x \in \sum_{j \neq i} E_j$. Donc pour tout $j \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$, il existe $x_j \in E_j$ tels que $x = \sum_{j \neq i} x_j$. De $x = x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_p$, on tire*

$$\underbrace{x_1}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{x_{i-1}}_{\in E_{i-1}} + \underbrace{-x}_{\in E_i} + \underbrace{x_{i+1}}_{\in E_{i+1}} + \dots + \underbrace{x_p}_{\in E_p} = 0$$

et comme la somme est directe il vient $x_1 = \dots = x_{i-1} = -x = x_{i+1} = \dots = x_p = 0$ et $E_i \cap \big(\sum_{j \neq i} E_j\big) = \{0_E\}$.

$\boxed{3. \Leftarrow 1.}$ *Réciproquement, on suppose que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $E_i \cap \big(\sum_{j \neq i} E_j\big) = \{0_E\}$. Fixons $i \in [\![1, p]\!]$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x_1 + \dots + x_p = 0_E$. On a donc $x := \underbrace{-x_i}_{\in E_i} = \underbrace{x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_p}_{\in \sum_{j \neq i} E_j}$ et donc $x = 0$, c'est-à-dire $x_i = 0$. Comme i est quelconque, il vient alors $x_1 = \dots = x_p = 0_E$.*

Remarque 1.3 Attention à la caractérisation d'une somme directe dans le cas de plus de deux sevs ! Dans $E = \mathbb{R}^2$, trois droites vectorielles D_1, D_2, D_3 distinctes (figure 1.1) sont en somme directe deux à deux, mais la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas directe !
Par contre, trois droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe.

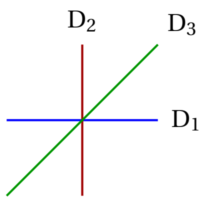


FIGURE 1.1 – Une somme non directe dans $\mathbb{R}^2$

DÉFINITION 1.4 ♡ **Base adaptée à un sev, à une somme directe**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On dit qu'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E est :
- *adaptée à* F si et seulement si on peut extraire de e une base de F.
- *adaptée à la somme directe* $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ si on peut extraire de e des bases $e^1, \dots, e^p$ de $E_1, \dots, E_p$.

Remarque 1.4 Si E est de dimension finie et si F est un sev de E alors il existe une base de E adaptée à F. Pour la construire, il suffit de considérer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F (qui existe car F est lui aussi de dimension finie) puis de la compléter, grâce au théorème de la base incomplète, en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
Remarquons que cette construction permet d'obtenir un supplémentaire G de F dans E donné par $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

THÉORÈME 1.12 ♡ **Dimension d'une somme directe, caractérisation de la somme direct grâce à la dimension**
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère un nombre fini de sevs $E_1, \dots, E_p$. Alors

$$\boxed{\dim(E_1 + \dots + E_p) \leqslant \dim E_1 + \dots + \dim E_p}$$

et on a égalité si et seulement si $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe :

$$\boxed{\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p}$$

Démonstration *Considérons l'application* $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_p & \longrightarrow & V = E_1 + \ldots + E_p \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array}\right.$ *de la proposition 1.10. On a* $\operatorname{Im}\varphi = E_1 + \ldots + E_p$ *et donc en vertue de la formule de rang appliquée à* φ,

$$\dim\left(E_1 \times \ldots \times E_p\right) = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi \geqslant \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim\left(E_1 + \ldots + E_p\right)$$

et on a égalité si et seulement si φ *est injective, c'est-à-dire, toujours d'après la proposition 1.10, si et seulement si la somme est directe.*

Remarque 1.5 Avec les notations des familles finies, l'inégalité précédente devient :

$$\dim \bigoplus_{i \in I} E_i \leqslant \sum_{i \in I} \dim E_i$$

THÉORÈME 1.13 **Base adaptée à une somme directe, caractérisation de la somme directe en terme de bases**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $E_1, \ldots, E_p$ des sevs de E admettant comme bases respectives $e^1, \ldots, e^p$. On a équivalence entre :

— $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$;
— La réunion e des bases e^i pour $i \in [\![1, p]\!]$ est une base de E.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *On note* $e^j = \left(e^j_1, \ldots, e^j_{i_j}\right)$ *une base de* E_j. *Montrons que* $e = e^1 \cup \ldots \cup e^p$ *est une base de* V.

— *La famille* e *est libre. En effet, si* $\sum_{v \in e} \alpha_v v = 0$ *alors* $\sum_{i=1}^p \sum_{v \in e^i} \alpha_v v = 0$ *mais* $\sum_{v \in e^i} \alpha_v v \in E_i$ *donc d'après la proposition 1.11, il vient* $\sum_{v \in e^i} \alpha_v v = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$ *et donc, comme* e^i *est une base de* E_i, *on a* $\alpha_v = 0$ *pour tout* $v \in e^i$ *et la famille est bien libre.*
— *La famille* e *est génératrice de* V. *En effet, comme* $V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, *alors si* $x \in V$, *il existe* $x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p$ *tels que* $x = x_1 + \ldots + x_p$ *mais les familles* e^i *étant génératrices de* E_i *pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$, *on a* $x_i = \sum_{v \in e^i} \alpha_v v$ *et donc* $x = \sum_{i=1}^p \sum_{v \in e^i} \alpha_v v = \sum_{v \in e} \alpha_v v$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons réciproquement que* $e = e^1 \cup \ldots \cup e^p$ *est une base de* E. *Alors*

$$\dim E = \operatorname{Card}(e) = \sum_{i=1}^p \operatorname{Card}(e^i) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

et donc, d'après le théorème précédent, la somme $E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$ *est directe et égale à* E.

Remarque 1.6 Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si E est de dimension finie alors il existe toujours une base de E adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^p E_i$. En effet, il suffit de considérer, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$ une base e^i de E_i (qui existe car E_i est de dimension finie). Alors d'après le théorème **??**, la réunion e des bases e^i pour $i \in [\![1, p]\!]$ est une base de E qui, par construction, est adaptée à la somme directe.

1.2 Matrices par blocs et sous-espaces stables

DÉFINITION 1.5 ♡ **Sous-espace stable par un endomorphisme**
Soit un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$. On dit que le sev F est *stable* par u si et seulement si :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

ce qui est équivalent à dire que $u(F) \subset F$.

Remarque 1.7 On dit aussi que u *stabilise* F.

Remarque 1.8

— En particulier, pour tout endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.
— Certains endomorphismes n'ont pas d'autre sev stable, par exemple les rotations vectorielles du plan.
— À l'inverse, une homothétie vectorielle stabilise n'importe quel sev de E. On démontre dans l'exercice **??** que cette propriété caractérise les homothéties.

LEMME 1.14 ♡ **Endomorphismes qui commutent**
Soient deux endomorphismes $(u, v) \in \mathfrak{L}(E)^2$ qui commutent : $u \circ v = v \circ u$. Alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Démonstration

— *Montrons que* $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$ *alors comme* u *et* v *commutent,* $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ *donc* $v(x) \in \operatorname{Ker} u$ *et donc* $\operatorname{Ker} u$ *est stable par* v.

— *Montrons que* $v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} u$. *Alors il existe* $x \in \operatorname{Im} u$ *tel que* $y = u(x)$ *donc* $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$. *Donc* $\operatorname{Im} u$ *est bien stable par* v.

PROPOSITION 1.15 ♡ **Restriction d'un endomorphisme à un sev stable**
Si $F \subset E$ est un sous-espace stable par un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$, la restriction de u à F notée $u_{|F}$ définit un endomorphisme de F :

$$u_{|F} : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$$

Démonstration *C'est immédiat, la linéarité de* $u_{|F}$ *provient directement de celle de* u *sur* E.

THÉORÈME 1.16 ♡♡♡ **Caractérisation matricielle d'un sev stable**
On suppose que E est un espace de dimension finie n, que $F \subset E$ est un sev de dimension $1 \leqslant p \leqslant n$. On considère une base de F de la forme $e' = (e_1, \dots, e_p)$ que l'on complète en une base de E : $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors F est stable par u si et seulement si

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* F *est stable pour* u, *les vecteurs images par* u *de ceux de la famille* $e' = (e_1, \dots, e_p)$ *se décomposent encore dans* e' *d'où la forme de la matrice.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* u *admet une telle matrice dans la base* e *alors les vecteurs* $u(e_1), \dots, u(e_p)$ *se décomposent dans* e' *et donc* F *est stable par* u.

Remarque 1.9 On dit qu'une telle matrice est *triangulaire par blocs*. Son déterminant vaut $\det(A) \times \det(C)$.

THÉORÈME 1.17 ♡ **Somme directe de sous-espaces stables**
Soient E un espace de dimension finie et des sev $F_1, \dots, F_p$ en somme directe :

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$$

On considère une base e adaptée à cette somme directe. Soit un endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$. Alors chaque sev F_i est stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base e est *diagonale par blocs* :

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbb{O} & \\ & A_2 & & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée de taille $\dim F_i$.

Démonstration *Par récurrence sur* p.

Remarque 1.10 Reprenons les définitions de la proposition précédente et supposons que $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \dim F_i = 1$ alors la matrice de u dans la base e adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ est diagonale :

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbb{O} & \\ & \lambda_2 & & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Prenant un peu d'avance sur le prochain chapitre d'algèbre linéaire, indiquons qu'un sous-espace F de E de dimension 1 stable pour u est un cas particulier de sous-espace propre de u.

r

THÉORÈME 1.18 ♡ **Produit par blocs**
Soient des matrices $A, A' \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $D, D' \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On calcule « par blocs » le produit matriciel des matrices $(p+q)\times(p+q)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}}$$

On peut généraliser ce calcul à d'autres découpages par blocs, à condition que les tailles des différentes matrices soient compatibles avec le produit matriciel.

Démonstration *Il faut revenir à la définition du produit matriciel et vérifier les différentes relations.*

1.3 Déterminants

1.3.1 Déterminants par blocs

PROPOSITION 1.19 ♡♡♡ **Formule du déterminant par blocs**
Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ deux matrices carrées et $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. On définit la matrice carrée par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

On sait calculer un déterminant avec un bloc de zéros en bas à gauche :

$$\boxed{\det(M) = \det(A)\det(C)}$$

Démonstration
On effectue le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}.$$

En développant successivement selon les colonnes $C_1, \dots, C_p$, on calcule facilement

$$\det\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} = \det(C).$$

et en développant successivement selon les lignes $L_n, \dots L_{p+1}$, on calcule facilement

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A).$$

Il suffit ensuite d'utiliser que le déterminant du produit de deux matrices carrées est le produit de leurs déterminants.

Remarque 1.11 Attention à ne pas utiliser d'autres formules que celle du théorème. Par exemple, si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, en général $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ …

PROPOSITION 1.20 ♡ **Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**
Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux :

$$\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & \ddots & A_{p-1,p} \\ & & & A_{p,p} \end{pmatrix} = \det(A_{1,1}) \times \dots \times \det(A_{p,p}).$$

Démonstration *Par une récurrence simple sur p*

Exemple 1.3 Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, Formons la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a\mathrm{I}_n & b\mathrm{I}_n \\ c\mathrm{I}_n & d\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

Pour calculer son déterminant, essayons de faire apparaître un bloc de zéros en bas à gauche.

1. Si $d \neq 0$, en effectuant les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes : $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \dfrac{c}{d}\mathrm{C}_{n+1}, \ldots, \mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \dfrac{c}{d}\mathrm{C}_{2n}$, on obtient

$$\det(\mathrm{M}) = \det\begin{pmatrix} \left(a - \frac{bc}{d}\right)\mathrm{I}_n & b\mathrm{I}_n \\ 0_{n,n} & d\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \left(a - \frac{bc}{d}\right)^n d^n = (ad-bc)^n.$$

2. Si $d = 0$, le déterminant à calculer s'écrit

$$\det(\mathrm{M}) = \det\begin{pmatrix} a\mathrm{I}_n & b\mathrm{I}_n \\ c\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}.$$

   Amenons le bloc de zéros à gauche en effectuant les opérations suivantes sur les colonnes : $\mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}, \ldots, \mathrm{C}_n \leftrightarrow \mathrm{C}_{2n}$. On obtient

$$\det(\mathrm{M}) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} b\mathrm{I}_n & a\mathrm{I}_n \\ 0_{n,n} & c\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = (-1)^n b^n c^n.$$

Dans les deux cas, on obtient que $\det(\mathrm{M}) = (ad-bc)^n$.

1.3.2 Déterminant de Vandermonde

THÉORÈME 1.21 ♡ **Calcul d'un déterminant de Vandermonde**
Soient n scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant $n \times n$:

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)}$$

En particulier, la matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ sont distincts.

Démonstration *On propose deux preuves :*

$\boxed{\text{Preuve 1}}$ *Il suffit d'exécuter l'opération sur les colonnes* $\mathrm{C}_i \longleftarrow \mathrm{C}_i - (a_n \times \mathrm{C}_{i-1})$ *, en partant de* $i = n$ *et en remontant jusqu'à* $i = 2$.

$$\mathrm{V}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \ldots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ 1 & a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \ldots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la dernière ligne, il vient :

$$\mathrm{V}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \ldots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \ldots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}.$$

Soit

$$\mathrm{V}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_n - a_a)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Par récurrence immédiate,

$$\mathrm{V}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Preuve 2 *On effectue une récurrence sur la taille $n \in \mathbb{N}^*$ du déterminant. La formule est trivialement vraie pour un déterminant de taille 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose la formule vraie au rang $n-1$ et on la montre au rang n. Il s'agit de calculer*

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si au moins deux parmi les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont égaux alors ce déterminant est nul ainsi que $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$ donc on a bien égalité. On suppose dans la suite que les complexes $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.
Remplaçons le scalaire a_n par une variable x. Le déterminant s'écrit alors :

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si on le développe relativement à la dernière colonne, on observe que $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré $n-1$ en x. De plus, a_1, ..., a_{n-1} sont des racines deux à deux distinctes de ce polynôme. On peut alors le factoriser en $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = \alpha(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})$. Le coefficient du terme dominant est le terme devant x^{n-1} quand on développe le déterminant par rapport à la dernière colonne, c'est-à-dire $\alpha = \mathrm{V}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ qu'on sait calculer grâce à l'hypothèse de récurrence. On obtient alors le résultat en prenant $x = a_n$ et en appliquent la relation de récurrence. On prouve ainsi la formule par récurrence.

1.4 Matrices semblables et trace

1.4.1 Trace d'une matrice carrée

DÉFINITION 1.6 ♡ **Trace d'une matrice carrée**
Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A et on note Tr (A), le scalaire :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque 1.12 La trace de $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à la somme des éléments diagonaux de A.

PROPOSITION 1.22 ♡ **Propriétés de la trace**

— L'application $\mathrm{Tr} : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \end{cases}$ est un forme linéaire. En particulier, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\boxed{\mathrm{Tr}(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) + \beta\mathrm{Tr}(\mathrm{B})}$.

— $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BA})}$.

— $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$

Démonstration

— *La linéarité de la trace est laissée en exercice.*

— *Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$. On a : $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{BA}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}\right)$ et ces deux quantités sont bien égales.*

— *L'opération de transposition laisse invariante la diagonale d'une matrice donc aussi sa trace.*

1.4.2 Matrices semblables

DÉFINITION 1.7 **Matrices semblables**
Deux matrices carrées $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$.

Remarque 1.13 Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Remarque 1.14 La relation de similitude sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Remarque 1.15 La matrice identité n'est semblable qu'à elle-même...

PROPOSITION 1.23 **Deux matrices semblables ont même rang.**
Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

Démonstration *On effet, on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible.*

PROPOSITION 1.24 **Deux matrices semblables ont même trace.**
Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables alors $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$.

Démonstration *Comme* A *et* B *sont semblables alors il existe une matrice inversible P telle que* $A = P^{-1}BP$. *On utilise alors les propriétés de la trace :*

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(P^{-1}BP) = \operatorname{Tr}(P^{-1}PB) = \operatorname{Tr}(B).$$

Cette proposition permet de donner un sens à la definition suivante :

DÉFINITION - PROPOSITION 1.8 ♡ **Trace d'un endomorphisme**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E. On définit *la trace de u* qu'on note $\operatorname{Tr} u$ comme étant la trace de la matrice de u dans une base de E. Cette quantitée est bien indépendante de la base choisie.

Démonstration *Soient e et e' deux bases de* E. *Alors avec* $P = P_{e\to e'}$, *on a*

$$\operatorname{Mat}_{e'}(u) = P_{e'\to e} \times \operatorname{Mat}_e(u) \times P_{e\to e'}.$$

Autrement dit $\operatorname{Mat}_{e'}(u)$ *et* $\operatorname{Mat}_e(u)$ *sont semblables et leurs traces sont les mêmes.*

1.5 Projecteurs et symétries (Rappels de première année)

E désigne là encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.5.1 Projecteurs

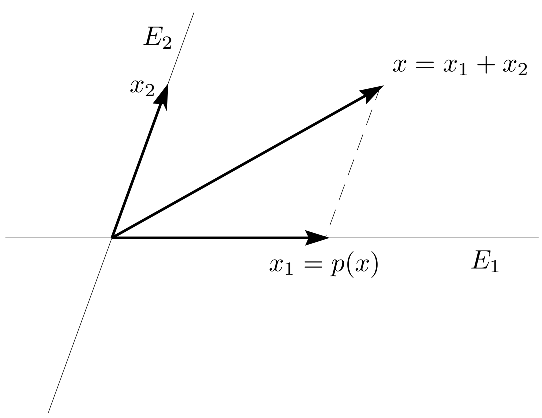


FIGURE 1.2 – Projection sur E_1 parallèlement à E_2

DÉFINITION 1.9 ♡ **Projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$$

L'application p est bien définie et est appelée *projecteur de* E *sur* E_1 *parallèlement à* E_2.

PROPOSITION 1.25 ♡ **Propriétés des projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

1. p est linéaire : $p \in \mathfrak{L}(E)$.
2. $\operatorname{Ker} p = E_2$.
3. $\operatorname{Im} p = E_1$.
4. $p(x) = x \Longleftrightarrow x \in E_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Démonstration

1. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *et* $x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *ainsi que deux scalaires* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. *On a :*
$$\alpha x + \alpha' x' = \underbrace{\left(\alpha x_1 + \alpha' x'_1\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\alpha x_2 + \alpha' x'_2\right)}_{\in E_2} \in E_1 \oplus E_2.$$
et :
$$\begin{aligned} p\left(\alpha x + \alpha' x'\right) &= \alpha x_1 + \alpha' x'_1 \\ &= \alpha p(x) + \alpha' p\left(x'\right) \end{aligned}$$
ce qui prouve que p *est linéaire.*
2. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*
$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0 \Longleftrightarrow x = x_2 \Longleftrightarrow x \in E_2.$$
Par conséquent : $\operatorname{Ker} p = E_2$.
3. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Im} p &\Longleftrightarrow \exists x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 : \quad x = p\left(x'\right) \\ &\Longleftrightarrow x = x'_1 \in E_1 \\ &\Longleftrightarrow x \in E_1. \end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Im} p = E_1$.
4. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*
$$p(x) = x \Longleftrightarrow x = x_1 \Longleftrightarrow x \in E_1$$

PROPOSITION 1.26 ♡ **Caractérisation des projecteurs**
Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $\boxed{p \circ p = p}$ (c'est-à-dire si et seulement si p est *idempotente*).
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* p *est un projecteur et si* $x \in E$, *alors en appliquant la proposition précédente,* $p(x) \in E_1$ *et comme* E_1 *est stable par* p, $p\left(p(x)\right) = p(x)$. *Donc* $p \circ p = p$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* p *est un endomorphisme de* E *vérifiant* $p \circ p = p$ *: posons* $E_1 = \operatorname{Im} p$ *et* $E_2 = \operatorname{Ker} p$ *et montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de* E *sont supplémentaires dans* E.

— *Soit* $x \in E_1 \cap E_2$. *Alors, on a à la fois* $p(x) = 0$ *car* $x \in E_2 = \operatorname{Ker} p$ *et* $x = p\left(x'\right)$ *où* $x' \in E$ *car* $x \in E_1 = \operatorname{Im} p$. *Par conséquent :* $0 = p(x) = p\left(p\left(x'\right)\right)$. *Mais comme* $p \circ p = p$, *on a* $p\left(p\left(x'\right)\right) = p\left(x'\right) = x$ *et donc* $x = 0$, *ce qui prouve que* E_1 *et* E_2 *sont en somme directe.*

— *Soit* $x \in E$. *On a :*
$$x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{\left(x - p(x)\right)}_{=x_2}$$
et $x_1 \in E_1$ *(car* $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im} p$*) et* $x_2 \in E_2$ *(car* $p(x_2) = p\left(x - p(x)\right) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$*). Par conséquent :* $E = E_1 + E_2$

Donc $E = E_1 \oplus E_2$. *Si* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$, *comme* $x_1 \in E_1$, $p(x_1) = x_1$ *et comme* $x_2 \in E_2$, $p(x_2) = 0$. *Par linéarité de* p, $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$. p *est donc bien le projecteur de* E *sur* E_1 *parallèlement à* E_2.

PROPOSITION 1.27 ♡
Si $E = E_1 \oplus E_2$, si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 et si $q \in \mathfrak{L}(E)$ alors on a équivalence entre :

1. q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.
2. $\boxed{p + q = \mathrm{id}_E}$.

Démonstration

— *Supposons que q est le projecteur de* E *sur* E_2 *parallèlement à* E_1. *Si* $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ *alors* $p(x) = x_1$ *et* $q(x) = x_2$. *Donc* $x = p(x) + q(x)$ *et on a bien* $p + q = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

— *Réciproquement, si* $p + q = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ *et si* $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ *alors* $q(x) = x - x_1 = x_2$ *donc* q *est le projecteur de* E *sur* E_2 *parallèlement à* E_1.

La proposition suivante est fort utile dans les exercices :

PROPOSITION 1.28 ♡ **Trace d'un projecteur**
Soit p un projecteur d'un espace E de dimension finie. Alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Démonstration *Comme* p *est un projecteur, on a* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$. *Donc la matrice de* p *dans une base adaptée à cette supplémentarité est :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{pmatrix}$$

où $m = \dim \mathrm{Im}\, p = \mathrm{rg}(p)$. *Donc* $\mathrm{Tr}(p) = m = \mathrm{rg}(p)$.

1.5.2 Symétries

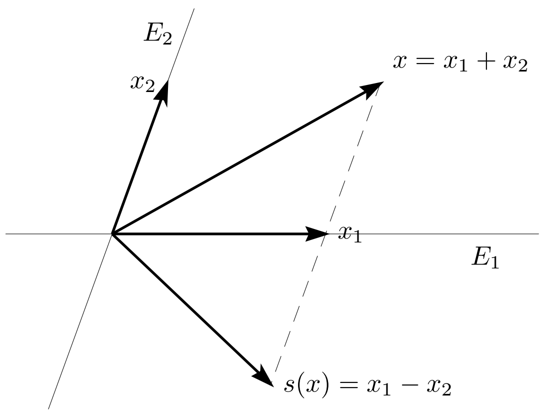


FIGURE 1.3 – Symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2

DÉFINITION 1.10 ♡ **Symétries**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

s est bien définie et est appelée *symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_2, ou plus simplement *symétrie*.

PROPOSITION 1.29 ♡ **Propriétés des symétries**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, alors :

1. L'application s est linéaire : $s \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$.
2. Si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors $\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}}$.
3. s est *involutive*, c'est-à-dire : $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Démonstration *Soit* p *le projecteur de* E *sur* E_1 *parallèlement à* E_2. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$. *On a :* $p(x) = x_1$ *et*

$$\left(2p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right)(x) = 2p(x) - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$$

ce qui démontre le second point. Comme p est linéaire et qu'une combinaison linéaire d' applications linéaires est linéaire, s est linéaire et le premier point est aussi démontré. Enfin, en utilisant la linéarité et l'idempotence de p :

$$\begin{aligned} s\circ s &= \left(2p-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right)\circ\left(2p-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right)\\ &= 2p\circ\left(2p-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right)-\left(2p-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right)\\ &= 4p^2-2p-2p+\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\\ &= 4p-4p+\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\\ &= \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

et le troisième point est démontré.

PROPOSITION 1.30 ♡ **Caractérisation des symétries**
Soit $s \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. Si s est involutive, c'est-à-dire si $\boxed{s\circ s=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}}$, alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{E}_1=\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et parallèlement à $\mathrm{E}_2=\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$).

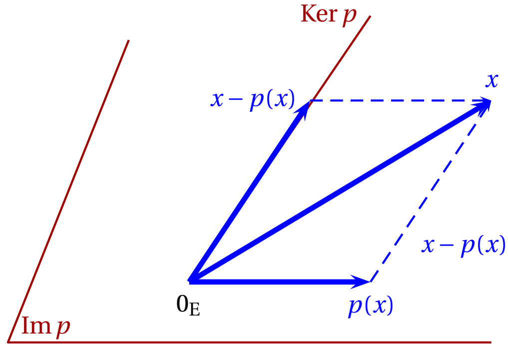
Démonstration *Supposons que s est linéaire et involutive. Posons $\mathrm{E}_1=\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{E}_2=\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.*

— *Soit $x\in\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2$. On a donc : $s(x)-x=0$ et $s(x)+x=0$. Soustrayant ces deux égalités, on obtient $x=0$, donc E_1 et E_2 sont en somme directe*
— *Soit $x\in\mathrm{E}$. On a :*

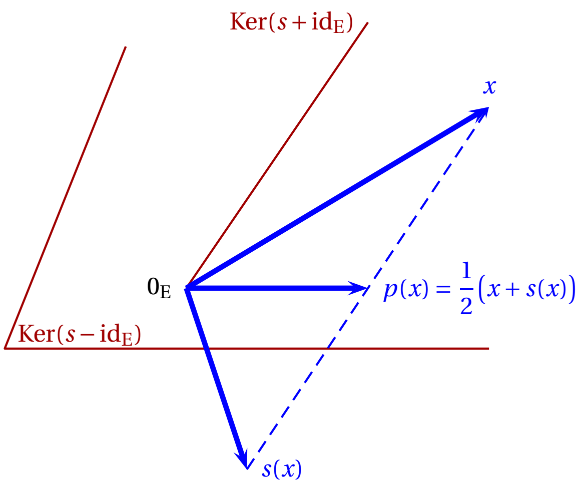
$$x=\underbrace{-\frac{1}{2}(s(x)-x)}_{\in\mathrm{E}_1}+\underbrace{\frac{1}{2}(s(x)+x)}_{\in\mathrm{E}_2}$$

et donc $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2$.

On en déduit que $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\oplus\mathrm{E}_2$. De plus, si $x=x_1+x_2\in\mathrm{E}_1\oplus\mathrm{E}_2=\mathrm{E}$ alors : comme $x_1\in\mathrm{E}_1$, on a : $s(x_1)=x_1$ et comme $x_2\in\mathrm{E}_2$, on a aussi : $s(x_2)=-x_2$. Par linéarité de s, on en déduit que : $s(x)=s(x_1)+s(x_2)=x_1-x_2$. L'application s est donc bien la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2



(a) Décomposition associée à un projecteur



(b) Décomposition associée à une symétrie

FIGURE 1.4 – Projecteur, symétrie